

# OPTIMALE QUERSCHNITTSABMESSUNGEN VON ASYMMETRISCHEN GESCHWEISSTEN I-PROFILIEN

Von

S. NAGY

Lehrstuhl für Stahlkonstruktionen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 12. April 1969.)

Vorgelegt von Prof. Dr. O. HALÁSZ

Bei Hoch- und Industriebaukonstruktionen, wo die Belastungen, die geometrischen Verhältnisse, ferner die Abstützungsart der Träger und ihre Verbindungen weitgehend veränderlich sind, bereitet die Bestimmung des optimalen Trägerprofils oft Schwierigkeiten, weil keine empirischen Formeln zur Verfügung stehen, wie z. B. für Balkenträger von Eisenbahnbrücken.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, den Optimalquerschnitt für asymmetrische, geschweißte I-Profile auf zwei Stützen bei ständigem Trägheitsmoment, senkrechten Lasten und gerader Biegung zu bestimmen.

Die statische Kontrollrechnung des Trägers umfaßt folgende Fragen:

- a) Biegung,
- b) Schubbeanspruchung des Stegbleches,
- c) Beulung des Stegbleches,
- d) Formänderung (Durchbiegung),
- e) Kippen (Gurtsteifigkeitsuntersuchung).

Der übliche Verlauf der Entwurfsarbeit ist wie folgt:

Zuerst werden aufgrund von empirischen Daten Trägerhöhe und Stegdicke aufgenommen, sodann die Gurte so gewählt, daß der Träger *auf Biegung* (a) ausgenutzt sei.

Jetzt folgen eine Anzahl Untersuchungen um nachzuweisen, ob der gewählte Querschnitt auch die Bedingungen *b — e* erfüllt. Da jedoch die Untersuchungen *b — e* in der Regel eine überschüssige Sicherheit aufweisen, stellt sich die Frage, ob Untersuchung *a* unter der Annahme *des Profils mit dem Mindestquerschnitt* erfolgte, wenn dieser auch voll ausgenutzt ist.

Im weiteren werden in Anlehnung an eine frühere Arbeit des Verfassers [9] die Bestimmung des Optimalquerschnitts von symmetrischen, geschweißten I-Trägern behandelt, der prinzipielle Verlauf einer wirtschaftlichen Bemessung und deren Grundformeln dargelegt bzw. abgeleitet.

Die Untersuchung wird in zwei Etappen durchgeführt. Zuerst wird vorausgesetzt, daß sich Untersuchung *e* (auf Kippen) erübrigt, weil der Obergurt in seitlicher Richtung genügend versteift ist. Der Verlauf der Untersuchung

ist so einfacher. Im zweiten Schritt wird auch die Kippungsuntersuchung erörtert.

### I. Bemessung ohne Kippungsuntersuchung

Annahmen: die Dickenmaße können im Verhältnis zur Breite geometrisch vernachlässigt werden — die Querschnittsformänderung ist verhindert. Bei den eingehenden Untersuchungen werden noch einige weitere Annahmen gemacht.

a) *Biegeuntersuchung* (Abb. 1)

Mit der Einführung der Verhältniszahlen

$$\varepsilon = \frac{h}{v} \quad (1)$$

bzw.

$$\alpha = \frac{y_f}{y_a} = \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \quad (2)$$

sind die die Lage des Schwerpunktes angehenden Maße:

$$y_a = \frac{1}{1 + \alpha} h \quad \text{und} \quad y_f = \frac{\alpha}{1 + \alpha} h \quad (3)$$

Unter- bzw. Obergurttflächen:

$$F_a = F \frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{h^2}{2\varepsilon}; \quad F_f = F \frac{1}{1 + \alpha} - \frac{h^2}{2\varepsilon} \quad (4)$$

Wegen der üblichen Gestaltung eines asymmetrischen Querschnitt-Profiles ( $F_a < F_f$ ) wird bei den weiteren Berechnungen das Widerstandsmoment der unteren Randfaser berücksichtigt.

Für das auf die  $x$ -Achse bezogene Trägheitsmoment gilt:

$$J = F_f y_f^2 + F_a y_a^2 + \frac{y_f^3 v}{3} + \frac{y_a^3 v}{3} \quad (5)$$

Werden die Formeln (3), (4) und (1) eingesetzt, dann ist:

$$J = F h^2 \frac{\alpha^2 + \alpha}{(1 + \alpha)^3} - \frac{h^4}{2\varepsilon} \frac{\alpha^2 + 1}{(1 + \alpha)^2} + \frac{h^4}{3\varepsilon} \frac{\alpha^3 + 1}{(1 + \alpha)^3} \quad (6)$$

Das Widerstandsmoment für die untere Faser ( $K_a$ ) erhält man durch Division mit  $y_a$ . Wird aus der so erhaltenen Gleichung  $F$  ausgedrückt, ergibt sich:

$$F = \frac{K_a (1 + \alpha)}{h \alpha} + \frac{h^2 (1 + \alpha)^2}{6\varepsilon \alpha} \quad (7)$$

Soll womöglich der kleinste Querschnitt (das kleinste Eigengewicht) gewählt werden, so muß für die Trägerhöhe der Grenzwert der durch Formel (7) beschriebenen Funktion gesucht, d. h. die Ableitung  $\frac{\delta F}{\delta h}$  bestimmt werden; wird diese gleich Null gesetzt, erhält man für die optimale Trägerhöhe die Formel

$$h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{3K_a}{1 + \alpha} \varepsilon} \quad (8)$$

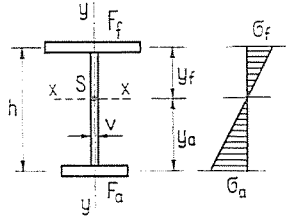


Abb. 1

Der kleinste Querschnitt ergibt sich durch Einsetzen von (8) in (7):

$$F = \sqrt[3]{\frac{9}{8} \frac{(\alpha + 1)^4 K_a^2}{\alpha^3 \varepsilon}} \quad (9)$$

Nachfolgend werden die sonstigen erforderlichen Untersuchungen durchgeführt.

### b) Schubuntersuchung

Die einzelnen Faktoren der Shurawskii-Formel für Schubprüfung ergeben sich wie folgt:

Das Trägheitsmoment erhält man aus Formel (5), in welche die in (9) bzw. in (8) angegebenen Ausdrücke für  $F$  bzw.  $h$  eingesetzt werden; ferner wird abgeleitet, daß

$$F_f = F \left( \frac{1}{\alpha + 1} \right)^2 \quad \text{und} \quad F_a = F \left( \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2 \quad (10)$$

So erhält man das Trägheitsmoment in der Form:

$$J = \sqrt[3]{\frac{3K_a^4 \varepsilon}{(\alpha + 1)^4}} \quad (11)$$

Für das statische Moment haben wir:

$$S = F_f y_f + \frac{y_f^2 v}{2} \quad \text{oder} \quad S = F_a y_a + \frac{y_a^2 v}{2}$$

Aus welchem Wert man auch ausgeht, erhält man nach Einsetzen der Formeln (3), (4) und (1), unter Berücksichtigung der Werte von (10):

$$S = \frac{3}{2} K_a \frac{z^2 + z + 1}{(z + 1)^3} \quad (12)$$

Für die Annahme von  $\varepsilon$  ergibt also die Schubuntersuchung schließlich folgende Bedingung:

$$\varepsilon \leq \frac{3K_a^2 \tau H^3}{3R^3} \cdot \frac{(z + 1)^4}{(z^2 + z + 1)^3} \quad (13)$$

### c) Beulungsuntersuchung

Wir bedienen uns der Näherungsformel für Balkenträger auf zwei Stützen [10]. Also gilt

$$\text{bei } z_1 \geq 1 \quad v \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{0,1 z_1^2 R h}{z_1^2 + 0,75}} \quad (14)$$

wobei  $z_1 = a/h$  ist, der Quotient aus dem Abstand der Stegversteifungen und aus der Trägerhöhe. ( $R$  wird in Mp,  $h$  in m eingesetzt, dann ergibt sich  $v$  in cm.) Da bei den im Hochbau verwendeten I-Trägern die Versteifungen in bedeutend größeren Abständen als die Trägerhöhe angeordnet sind, kann der Fall  $z \leq 1$  außer acht gelassen werden.

Wir bedienen uns weiter der näherungsweisen Annahme:

$$\frac{z_1^2}{z_1^2 + 0,75} \approx 1$$

Werden in Formel (14)  $h/v = \varepsilon$  und die Formel (8) für  $h_{opt}$  eingesetzt, wird sodann die Gleichung nach  $\varepsilon$  aufgelöst, gilt:

$$\varepsilon \leq \frac{64,4}{\sqrt[7]{(z + 1)^2}} \sqrt[7]{\frac{K_a^2}{R^3}} \quad (15)$$

Damit haben wir die zweite Bedingung für  $\varepsilon$ . Bei der Anwendung der Formel in d R in Mp,  $K_d$  in  $\text{cm}^3$  einzusetzen.

#### d) Durchbiegungsuntersuchungen

Die Durchbiegungsformel für Träger mit ständigem Querschnitt lautet:

$$e = \frac{5}{48} \frac{Ml^2}{EJ_x} \leq e_{\text{zul}} \quad (16)$$

Die zulässige Durchbiegung wird im allgemeinen als Quotient der Stützweite angegeben:

$$e_{\text{zul}} = \frac{l}{\eta} \quad (17)$$

Nach den Richtlinien ist  $\eta$  zwischen 150 und 900 anzusetzen.

Einsetzung in Formel (16) der Formel (17) und der Trägheit aus (11), und Ausdruck von  $\varepsilon$  ergeben:

$$\varepsilon \geq \left( \frac{Ml}{E} \frac{\eta}{13,85} \right)^3 \frac{(x+1)^4}{K_d^4} \quad (18)$$

Das ist also die dritte Bedingung für  $\varepsilon$ .

## 2. Bemessung unter Berücksichtigung der Kippungsuntersuchungen

Zuerst wird festgestellt, daß sich der in Abschnitt 1 dargelegte Verlauf der Bemessung auch hier anwenden läßt, mit dem Unterschied, daß jetzt zur Berechnung des erforderlichen Widerstandsmomentes nicht die Zugzugspannung  $\sigma_H$ , sondern nur eine geringere *Knickzugspannung*  $\sigma_{KH}$  berücksichtigt werden darf, deren Höhe von der Profilform, vor allem von der Seitensteifigkeit des Obergurtes abhängig ist. Für eine wirtschaftliche Bemessung genügt die Genauigkeit der in den Normen und Bauvorschriften vorgeschriebenen Prüfung. Diese vernachlässigt die Torsionssteifigkeit des Trägers und führt diese Erscheinung auf die Seitenknickung des Obergurtes zurück. Bei dieser Vernachlässigung liefert die Prüfung ein hinreichend genaues Ergebnis, wenn die Seiteneinspannungspunkte des Gurtes verhältnismäßig nahe aneinander liegen.

Im Hinblick darauf, daß Zweck der vorliegenden Arbeit die Erarbeitung eines wirtschaftlichen Bemessungsverfahrens ist, scheint hier die in der Norm vorgeschriebene Gurtsteifigkeitsprüfung ohne Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit zu genügen, unabhängig vom Abstand der Einspannungspunkte des Obergurtes.

Die allgemeinbekannte Ableitung beiseite lassend, ist für die Knickung des Obergurtes die Formel maßgebend:

$$\lambda_y^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_{KH}} \frac{\sigma_H - \sigma_{KH}}{\sigma_0 - \sigma_{KH}} \quad (19)$$

Dabei bedeuten:

- $\lambda_y$  —  $a/i_y$ , die Schlankheit des Obergurtes, bezogen auf die  $y$ -Achse ( $a$  = Abstand der Einspannungspunkte,  $i_y$  = Trägheitshalbmesser);
- $\sigma_{KH}$  — die größte *Durchschnittsspannung* bei der Erreichung der Grenzspannung in einer Randfaser;
- $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  — von dem Trägermaterial abhängige Größen in  $\text{kp/cm}^2$ .

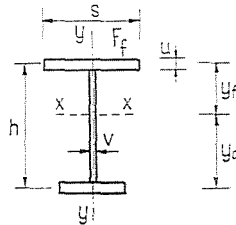


Abb. 2

Die Schlankheit des Obergurtes, bezogen auf die  $y$ -Achse, mit den Bezeichnungen in Abb. 2 ist

$$\lambda_y^2 = 12 \frac{a^2}{s^2} \quad (20)$$

da

$$i_y^2 = \frac{J_{yf}}{F_f} = \frac{us^3}{12} \frac{1}{us} = \frac{s^2}{12}$$

(20) in (19) eingesetzt, gilt

$$12 \frac{a^2}{s^2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{KH}} \frac{\sigma_H - \sigma_{KH}}{\sigma_0 - \sigma_{KH}} \quad (21)$$

Wir transformieren Formel (21), damit auf der linken Seite die Querschnittsfläche des Profils erscheint.

Nach Einführung der Verhältniszahl  $\psi = s/u$ , ergibt sich als erster Schritt

$$F_f = su = \frac{12a^2}{\psi} \cdot \frac{\sigma_{KH}}{\sigma_1} \frac{\sigma_0 - \sigma_{KH}}{\sigma_H - \sigma_{KH}} \quad (22)$$

Unter Anwendung der Formeln (4), (8), (9) kann abgeleitet werden, daß

$$F = F_f(1 + \alpha)^2,$$

also gilt

$$F = \frac{12a^2}{\psi} (1 + \alpha)^2 \frac{\sigma_{KH}}{\sigma_1} \frac{\sigma_0 - \sigma_{KH}}{\sigma_H - \sigma_{KH}} \quad (23)$$

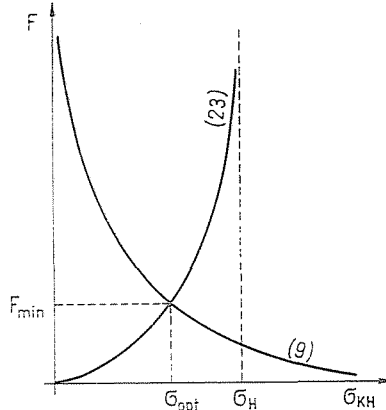


Abb. 3

Formel (23) zeigt, daß mit der Zunahme von  $\sigma_{KH}$ ,  $F \rightarrow \infty$ . Dabei ist aus Formel (9) nach Einsetzen von  $K_a = M/\sigma_a$  zu entnehmen, daß mit zunehmendem  $\sigma_a$  die Querschnittsfläche abnimmt.

Abb. 3 zeigt die graphische Darstellung der zwei Funktionen unter Berücksichtigung von Formel (2) und des Umstandes, daß  $\sigma_{KH} = \sigma_f$ , d. h.  $\sigma_o = \sigma_{KH}/\alpha$ . Der Schnittpunkt der beiden Kurven ergibt  $\sigma_{opt}$ , die als Grenzspannung zur kleinsten Querschnittsfläche führt. (9) und (23) gleichgesetzt, ergibt sich also nach Einsetzen von  $K_a = M\alpha/\sigma_{KH}$ :

$$D^* = \frac{\sigma_{KH}^{5/3}}{\sigma_1} \frac{\sigma_0 - \sigma_{KH}}{\sigma_H - \sigma_{KH}} = \sqrt[3]{\frac{9}{8} \frac{M^2}{(\alpha + 1)^2 \alpha \varepsilon} \frac{\psi}{12a^2}} \quad (24)$$

Die linke Seite der Formel (24) ist nur von  $\sigma_{KH}$  abhängig, auf der rechten Seite befinden sich die sonstigen, von Profilform und Belastung abhängigen Faktoren.

Die Formel läßt sich aufgrund folgenden Gedankenganges weiter reduzieren: ein asymmetrisches I-Profil ist wirtschaftlich, wenn in der Untergurt-Randfaser gerade die Grenzspannung  $\sigma_H$  und gleichzeitig im Obergurt lediglich die Knickgrenzspannung  $\sigma_{KH}$  entsteht. In diesem Falle ist jedoch

$$\sigma_{KH} = \alpha \sigma_H \quad (25)$$

(25) in Formel (24) eingesetzt, erhält man:

$$D^* = \frac{\sigma_H^{5/3}}{\sigma_1} \frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_H}{\sigma_H (1 - \alpha)} \sqrt{(\alpha + 1)^2 a^2} = \frac{\psi}{12a^2} \cdot \frac{9}{8} \sqrt{\frac{M^2}{\varepsilon}} \quad (26)$$

Bei einem Stahl A. 36.24.12 ergeben sich die Funktionswerte\*  $D = f(\alpha)$  der Tabelle in Abb. 4.

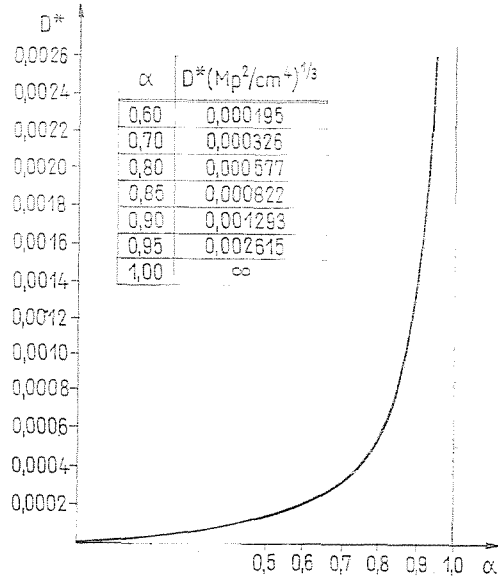


Abb. 4

Als Unbekannte stehen nur auf der linken Seite von Formel (26) die Verhältniszahl  $\alpha$ , auf der rechten Seite die Verhältniszahl  $\varepsilon$ . Die Aufgabe besteht nun darin, unter Berücksichtigung der Bindungen in bezug auf  $\varepsilon$  den Optimalwert für  $\alpha$  zu suchen.

Verlauf der Berechnung:

Zuerst wird ein wahrscheinlicher  $\alpha$ -Wert gewählt. (Nach praktischen Erfahrungen empfiehlt es sich  $\alpha$  zwischen 0,70 und 0,95 zu wählen.)

Mit Hilfe dieses  $\alpha$ -Wertes werden dann — selbstverständlich in Kenntnis der Belastungs-, geometrischen und vom Baustoff abhängigen Daten — die Grenzbedingungen für  $\varepsilon$  berechnet. Wird die Verhältniszahl  $\varepsilon$  annähernd in der Mitte des erhaltenen Intervalls angenommen, erhält man mit Hilfe der Formel (26) ein neues  $\alpha$ . Sodann wird die Berechnung der Grenzbedingungen für  $\varepsilon$  wiederholt. Dieser Versuch wird im allgemeinen ergebnisvoll sein, weil es leicht möglich ist, daß das neue Intervall das vorige  $\varepsilon$  enthält, würde es jedoch außerhalb des Intervalls fallen, so wird der nächste Versuch gewiß zu einem Ergebnis führen.



### Zusammenfassung

Zur Bestimmung des Optimalquerschnitts von asymmetrischen, geschweißten I-Profilen auf zwei Stützen werden bei ständigem Trägheitsmoment, senkrechten Lasten und gerader Biegung handliche Formeln für die Ingenieurpraxis abgeleitet. Die Formeln ergeben durch Ableitung der Verhältniszahlen  $\varepsilon = h/v$  bzw.  $\alpha = \frac{y_f}{y_a}$  Grenzbedingungen für Biegung, Schubbeanspruchung des Steges, Beulung des Stegbleches, Formänderung des Trägers und Kippen des Obergurtes, aus denen sich in der Regel nach der ersten, doch höchstens nach der zweiten Wiederholung der Berechnung die gesuchten optimalen Querschnittsdaten ermitteln lassen.

### Schrifttum

1. KORÁNYI, I.: Stahlkonstruktionen\*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
2. PALOTÁS, L.: Ingenieurhandbuch.\* Budapest, 1955.
3. MSZ 15024. Ungarische Norm für Stahl- und Eisenkonstruktionen.\*
4. MAYER, S.: Wirtschaftliche Querschnittsabmessungen von I-, [-, und Kastenprofilen unter Berücksichtigung der Beulsicherheit. Informationsblatt des Instituts für Fördertechnik Leipzig, Heft 1/1964.
5. WALTER, G.: Optimalbemessung von Biegeträgern aus Stahl. Informationsblatt des Instituts für Fördertechnik Leipzig, Heft 1/1964.
6. HUNYADI, F.: Kippen von Stahlträgern mit ständigem Querschnitt.\* Mélyép. Tud. Szemle, 1958. S. 394.
7. CSELLÁR—HALÁSZ—RÉTI: Dünnwandige Stahlkonstruktionen.\* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
8. MITTELSTAEDT, K.: Zur wirtschaftlichen Bemessung von Vollwandträgern bei Berücksichtigung des Beulnachweises für das ausgesteifte Stegblech. Der Stahlbau, 3(1967) S. 37.
9. NAGY, S.: Bestimmung des Optimalquerschnitts für geschweisste I-Profile.\* Mélyép. Tud. Szemle, 1969. S. 331.
10. Richtlinien für den Bau von Eisenbahnbrücken der Ungarischen Staatsbahnen\* (1951).

Oberassistent SÁNDOR NAGY, Budapest XI., Műegyetem rakpart 3. Ungarn.

\* In ungarischer Sprache.