

ERMITTLUNG DER EIGENSCHWINGZAHLEN VON HOCHHÄUSERN IN SKELETTBAUWEISE UND IN SKELETTBAUWEISE MIT VERSTEIFUNGSWÄNDEN

Von

GY. VÉRTES

Lehrstuhl für Mechanik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 18. Mai, 1966)

1. Einleitung

Hochhäuser in Skelettbauweise verfügen an sich Horizontalkräften gegenüber über eine geringe Tragfähigkeit. Die Tragkraft läßt sich zwar durch Verstärkung von Balken- und Stützenquerschnitten (bei Stahlbetonskelettbauten auch durch zusätzliche Bewehrung) erhöhen, doch ist diese Art der Verstärkung des Bauwerkes bei Bauten, deren Höhe ein Mehrfaches der kleineren Querabmessung darstellt, meistens nicht wirtschaftlich. Bei solchen Bauten wird der Widerstand gegen Horizontalbelastung und zu gleicher Zeit die Horizontalsteifigkeit des Gebäudes am zweckmäßigsten durch senkrechte Versteifungswände erhöht.

Bei der Bemessung derartiger Gebäude müssen oft dynamische Lasten berücksichtigt werden, die gerade zufolge der großen Höhenabmessung und der verhältnismäßig geringen Querabmessung und Steifigkeit für die Baukonstruktion am maßgebendsten sind (Windangriff, Luftdruck, Seismizität usw.). Wie bekannt, ist die Ermittlung der Beanspruchungen durch dynamische Last in engem Zusammenhang mit der Eigenschwingzahl der Konstruktion, da eine Untersuchung über dynamische Lasten auch die Ermittlung der Eigenschwingzahl erfordert. Da es sich dabei um ein kompliziertes Schwingungssystem handelt, das sich auch mit bedeutendem mathematischem Aufwand nicht immer eindeutig lösen läßt, kommt den Näherungsmethoden eine wichtige Rolle zu. Deren Anwendung ist umso begründeter, da Lasten und Werkstoffe eine beträchtliche Zahl von Daten enthalten, die ebenfalls nur mit Näherungswerten angesetzt werden können, und so könnte auch eine davon ausgehende Berechnung lediglich zu annähernden Ergebnissen führen. Ein weiterer Umstand, der für eine näherungsweise Berechnung der Eigenschwingzahlen spricht, besteht darin, daß ein Fehler bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen außer im Zustand der Resonanz und in dessen Nähe die Ergebnisse nicht wesentlich beeinflußt, und daß in der Nähe des Resonanzbereichs in der den Bauvorschrif-

ten entsprechend erforderlichen Verstimmung auch die unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Berechnungen berücksichtigt werden.

2. Ausgangsbedingungen zur Berechnung

Bei den an Versteifungswände gebundenen Skelettbauten in Abb. 1 und 2 läßt sich das Rahmenwerk als eine die Versteifungswand geschoßweise abstützende, elastische Stützenreihe auffassen. Je nach dem Zusammenstoß von Rahmenskelett und Versteifungswand werden zwei Grundfälle unterschieden. Im ersten Falle besteht zwischen Versteifungswand und Rahmenwerk eine Verbindung, die lediglich die Übertragung von Horizontalkräften gestattet

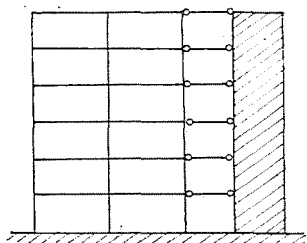


Abb. 1

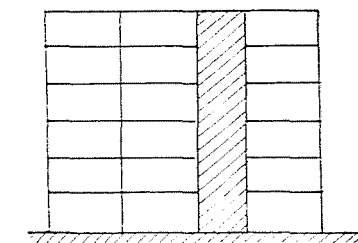


Abb. 2

(Abb.1). Bei der Ausführung in Abb. 2 besteht zwischen Versteifungswand und den sich anschließenden Rahmenbalken eine ecksteife Verbindung, was soviel bedeutet, daß das Rahmenwerk nicht nur Kräfte, sondern auch Momente auf die Wand übertragen kann. Den beiden erwähnten Fällen entsprechend wird im weiteren von Skelettbauten mit gelenkig bzw. ecksteif angeschlossenen Versteifungswänden gesprochen. Es soll hier bereits erwähnt werden, daß Rahmenskelettbauten ohne Versteifungswände als ein Spezialfall der Konstruktion mit gelenkig angeschlossenen Versteifungswänden aufgefaßt werden kann, wo sowohl Masse als auch Biegesteifigkeit der Versteifungswand gleich Null sind.

Zur Bestimmung der einzelnen Beziehungen werden dem ähnliche Themen behandelnden Schrifttum ([9], [10]) entsprechend, neben den für Rahmenwerke üblichen Annahmen (Ecksteife) untenstehende weitere Annahmen getroffen:

1. Es werden verhältnismäßige Rahmen behandelt, bei welchen unter Einwirkung einer beliebigen Seitenkraft lediglich „reine Verschiebung“ und „reine Verdrehung“ vorkommen [3], wobei die Trägerelemente übereinander eine gleiche Steifigkeit aufweisen.

2. Gelenkstützen ausgenommen, liegen die Inflexionspunkte der Stützen

unter Einwirkung von Seitenkräften auf der Hälfte der Stützhöhe zwischen zwei Geschossen.

3. An Versteifungsträger angeschlossene Balken ausgenommen liegen die Inflexionspunkte der Balken unter Einwirkung von Seitenkräften auf der Hälfte der Spannweiten.

4. Bei Horizontalschwingungen werden die Massen der einzelnen Geschosse in der Achse des zum betreffenden Geschöß gehörigen Balkens konzentriert angenommen.

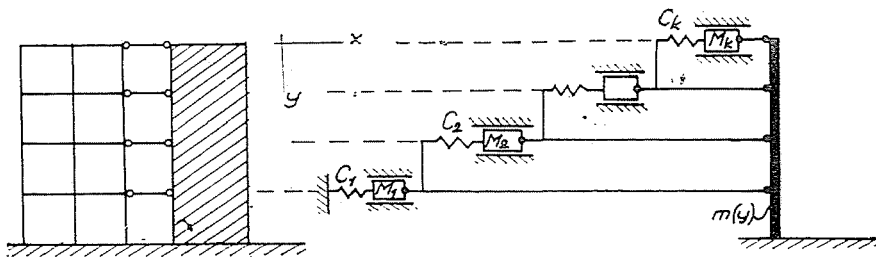
5. Die Versteifungswand ist starr in den Boden eingespannt.

6. Längsverformungen von Rahmenbalken und Stützen sowie die Formänderungsarbeit können vernachlässigt werden.

3. Ermittlung der Eigenschwingzahl von Skelettbauten mit gelenkig angeschlossenen Versteifungswänden

3.1 Das der Berechnung zugrunde gelegte Modell

Das beiderseits mit Gelenkstäben an Versteifungswände stoßende Rahmenwerk läßt sich durch elastische Stützungen ersetzen, die durch horizontale Kraftwirkung die Wand geschößweise abstützen. Die in den einzelnen Abstützpunkten wirkenden Kräfte sind voneinander nicht unabhängig. Das statische und schwingungstheoretische Modell des Systems ist in Abb. 3 dargestellt.



Statisches Modell

Abb. 3
Schwingungstheoretisches Modell

Dabei sind c_1, c_2, \dots, c_n die Federkonstanten der einzelnen Stützungen, während M_1, M_2, \dots, M_n die geschößweise konzentrierten Massen der mitschwingenden Decken mit zugehörigen Balken, Stützen sowie Deckenlasten bedeuten. Bei Horizontalschwingungen schwingen sämtliche Punkte gleicher Höhe des Gebäudes mit, daher ist es gleichgültig, in welchem Punkte die x -Achse entlang

einzelne Massen angesetzt werden; sie lassen sich auch bis an den Versteifungsträger verschieben, wodurch dessen Masse vergrößert wird. Im Sinne einer verallgemeinerten Behandlungsweise sollen Querschnitt, Querschnittsträgheitsmoment und Masse des Versteifungsträgers die y -Achse entlang veränderlich

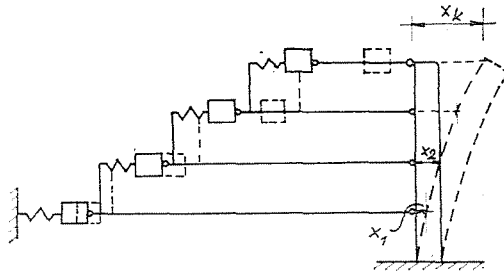


Abb. 4

sein. Wir wollen diese im weiteren durch die Funktionen $F(y)$, $J(y)$ bzw. $m(y)$ bezeichnen.

In Abb. 4 ist das System in während der Schwingung deformierter Form mit gestrichelter Linie dargestellt. Aus der Abbildung ist es ersichtlich, daß in einem mit k bezeichneten Geschoß die Stützfederdehnung $\Delta h = (x_k - x_{k-1})$ ist, wobei x_k bzw. x_{k-1} die Horizontalverschiebungen der Versteifungswand im Geschoß k bzw. im darunter liegenden Geschoß bedeuten.

3.2 Grundgleichung für die Eigenschwingzahl

Die Geschwindigkeit der einzelnen Punkte eines schwingenden Gebäudes wird im Augenblick des größten Ausschlags gleich Null sein, während ihre potentielle Energie den Höchstwert erreicht. Wir erhalten den Höchstwert der potentiellen Energie als Summe der aufgespeicherten Energien in der als freitragenden Vollwandträger betrachteten Versteifungswand und im das Rahmenwerk ersetzenden Federsystem (unter Berücksichtigung bei der Wand der Arbeit der Querkraft) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{pot max}} &= E_{\text{pot Balken}}^{\text{max}} + E_{\text{pot Feder}}^{\text{max}} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^H EJ(y) \left[\frac{d^2 x_0}{dy^2} \right]^2 dy + E_0 \frac{m+1}{m} \int_0^H \frac{J(y)}{F(y)} \left[\frac{d^3 x_0}{dy^3} \right]^2 dy + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta_{\frac{k}{k}}^2 c_k. \quad (1)
 \end{aligned}$$

In der Formel bedeutet $x_0(y)$ die zum maximalen Ausschlag gehörige Funktionsform.

Im Augenblick des Durchgangs durch den Ruhepunkt des Schwingungssystems ist die potentielle Energie gleich Null, während die kinetische Energie (E_m) ihren Höchstwert erreicht. Nach dem Prinzip der Energieerhaltung sind die Maxima der beiden Energien einander gleich, also ist

$$E_{\text{pot}}^{\text{max}} = E_{\text{kin}}^{\text{max}}.$$

Nun soll die kinetische Energie des Systems untersucht werden. Wie bereits erwähnt, können bei waagrechten Schwingungen die mitschwingenden Massen in horizontaler Richtung verschoben werden. Stellen wir uns diese bis zur Versteifungswand verschoben vor, u. zw. derart, daß die bis jetzt geschoßweise in je einem Punkte konzentrierten Massen – wirklichkeitsnäher – die Geschoßhöhe entlang gleichmäßig verteilt seien. So wird die ursprünglich durch $m(y)$ bezeichnete spezifische Masse der Versteifungswand durch die entsprechend umgerechnete Masse des Rahmenteils vergrößert. Letztere soll durch $m_k(y)$ und die Summe der beiden Massen durch $m(y) + m_k(y) = \mu(y)$ bezeichnet werden. Somit beträgt die kinetische Energie einer Trägereits der Länge dy :

$$dE_{\text{kin}} = \frac{v^2}{2} dm = \frac{v^2 \mu(y) dy}{2}.$$

Unter der Voraussetzung von harmonischen Schwingungen läßt sich die Bewegung des Trägers durch die Funktion $x = x_0(y) \sin \omega t$ kennzeichnen, während seine Geschwindigkeit

$$v = x_0(y) \omega \cos \omega t$$

beträgt; somit ist

$$v^{\text{max}} = x_0(y) \omega,$$

und da

$$dE_m = \frac{v^2 \mu(y) dy}{2}.$$

gilt

$$E_m^{\text{max}} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^H x_0^2 \mu(y) dy. \quad (2)$$

Aus der Gleichheit der beiden Energiemaxima erhalten wir für die Eigenkreisfrequenz des Systems die Formel

$$\omega^2 = \frac{\int_0^H EJ(y) \left[\frac{d^2 x_0}{dy^2} \right]^2 dy + 2E_0 \frac{(m+1)}{2m} \int_0^H \left[I(y) \right]^2 \left[\frac{d^3 x_0}{dy^3} \right]^2 dy + \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 c_k}{\int_0^H x_0^2 \mu(y) dy}. \quad (3)$$

In dieser Beziehung sind die Schwingungsform $x_0(y)$ und die Federkonstanten der elastischen Abstützungen einstweilen unbekannt. Im weiteren soll deren Ermittlung bzw. ihre Berücksichtigung in der Formel eingehend behandelt werden.

3.3 Der Rahmenskelettbau als ein Spezialfall der Skelettkonstruktion mit gelenkig angeschlossenen Versteifungswänden und die Berechnung seiner Eigenschwingzahl anhand der obigen Betrachtungen

Ähnlich wie bei einer Skelettkonstruktion mit Versteifungswänden und Gelenkverbindungen läßt sich auch die Eigenfrequenz für ein Rahmenskelett ohne Versteifungswände ermitteln, u. zw. unter der Voraussetzung, daß Masse und Steifigkeit der Versteifungswand gleich Null gesetzt werden. Damit ist Formel (3) auch unmittelbar zur Errechnung der Eigenkreisfrequenz geeignet, doch wird zur Erleichterung der Berechnung die Masse des Rahmenskeletts nicht die Gebäudehöhe entlang gleichmäßig verteilt angenommen, sondern die Massen der einzelnen Geschosse werden in den betreffenden Geschossen konzentriert. Unter Voraussetzung einer harmonischen Schwingbewegung läßt sich die Bewegung eines Zwischengeschosses k durch

$$x_k = x_{0,k} \sin \omega t,$$

seine Geschwindigkeit durch

$$v_k = x_{0,k} \omega \cos \omega t,$$

schließlich seine maximale kinetische Energie durch

$$E_{k, \text{kin}}^{\max} = \frac{M_k v_k^2}{2} = \frac{M_k}{2} x_{0,k}^2 \omega^2$$

kennzeichnen. Dabei bedeutet M_k die in diesem Geschöß konzentrierte Masse des Geschosses k .

Für den Höchstwert der potentiellen Energie im durch k bezeichneten Geschöß gilt:

$$E_{k, \text{pot}}^{\max} = \frac{1}{2} \Delta_k^2 C_k,$$

wo $\Delta_k = x_{0,k} - x_{0,k-1}$ ist.

Da sämtliche Decken „mitschwingen“, d.h. gleichzeitig ihre Maximalamplitude erreichen und gleichzeitig durch den der Ruhelage entsprechenden Punkt durchgehen, erhalten wir die Höchstwerte der kinetischen bzw. potentiellen Energie für das gesamte Gebäude durch Summierung der entsprechenden

Werte in den einzelnen Geschossen. So gilt aus der Gleichheit der beiden Energie-Höchstwerte für die Eigen-Kreisfrequenz der Konstruktion

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_{0,k} - x_{0,k-1})^2 c_k}{\sum_{k=1}^n M_k x_{0,k}^2}}. \quad (3a)$$

3.4 Bestimmung der Federkonstanten

Bei den bisherigen Erwägungen wurde das Rahmenwerk als elastische Stützung zur Abstützung der Versteifungswand angesehen, für die im weiteren die auch in unseren Formeln vorkommenden sog. Federkonstanten ermittelt werden. Wie bekannt, ist die Federkonstante einer elastischen Stützung gleich dem Zahlenwert der Kraft, die im Abstützungspunkt unter der Wirkung einer Einheitsverschiebung in Richtung der Stützkraft anfällt. Im vorliegenden Falle ist auch zu beachten, daß sich auch die Stützungen selbst verschieben, und Federkräfte daher lediglich aus der relativen Verschiebung der Stützungen entstehen. Nach unseren Annahmen ist die relative Verschiebung des Geschosses k gegenüber dem darunter liegenden Geschöß proportional der Querkraft in Geschöß k . Somit ist die Federkonstante c_k der Abstützung in Geschöß k der Quotient aus der Querkraft in der Geschößebene und der Verschiebung des behandelten Geschosses dem darunter befindlichen Geschöß gegenüber:

$$c_k = \frac{R_k}{\Delta_k}$$

und

$$R_k = \sum_{i=k}^n P_i.$$

Dabei bedeuten n die Geschößzahl des Gebäudes, k die Laufzahl des betreffenden Geschosses und P_i die Seitenkräfte im jeweiligen Geschöß. Den bei der Bestimmung der Verschiebung Δ_k auch im Schrifttum ([9], [10]) enthaltenen und in den obigen Ausführungen behandelten Näherungen entsprechend ist es leicht einzusehen, daß durch horizontale Last eine elastische Formänderung der Rahmenstiele erfolgt, bei welcher die elastischen Linien in halber Höhe der einzelnen Geschosse Inflexionspunkte haben; in diesen Punkten ist also das Moment gleich Null, was gleichzeitig bedeutet, daß die Resultierende der Horizontalkräfte je Geschöß durch diesen Punkt durchgeht. Somit ist an den oberen und unteren Enden einer Stützenreihe in Geschöß k ein Moment $R_k \frac{h_k}{2}$

wirksam. Nach den Abb. 5 und 6 kann der Zusammenhang zwischen Moment und den Formänderungen von Stützen- oder Balkenenden folgendermassen geschrieben werden:

$$-R_k h_k = 6E \sum K_{0,k} (\Phi_k + \Phi_{k-1}) - 12 E \psi_k \sum K_{0,k} = -M_k, \quad (4)$$

wo M_k die Momentensumme für beide Enden der Stützen in Geschöß k ,

$$K_{0,k} = \frac{J_{0,k}}{h_k},$$

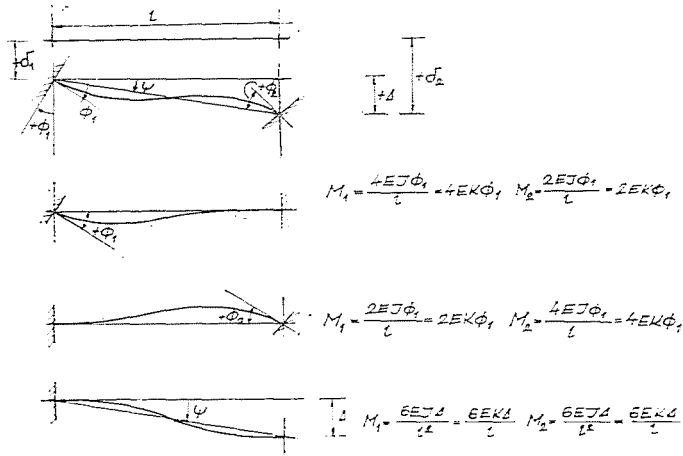


Abb. 5

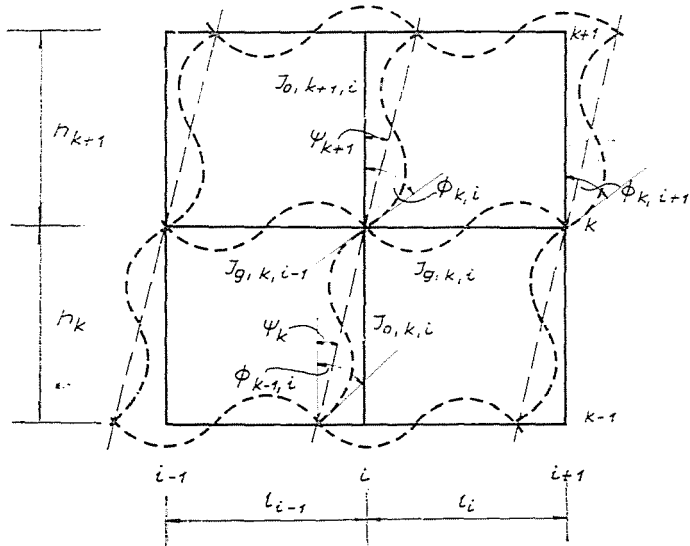


Abb. 6

$J_{0, k}$ das Trägheitsmoment im Querschnitt einer Stütze in Geschoß k auf die zur Biegeebene senkrechte Schwerpunktsachse,

Φ_k die Verdrehung eines Knotenpunktes in Geschoß k ,

Φ_{k-1} die Verdrehung eines Knotenpunktes in Geschoß $(k-1)$,

$\Psi_k = \frac{\Delta_k}{h_k}$ ist.

Da es sich um „reine Verdrehung“ handelt und die achsialen Formänderungen von Stützen und Balken gleich Null gesetzt wurden, sind ψ und Φ für sämtliche Stützen eines jeweiligen Geschosses gleich.

Ähnlich wie in Gleichung (4) erhalten wir für das Geschoß $(k+1)$

$$-M_{k+1} = 6E(\Phi_{k+1} + \Phi_k) \sum K_{0, k+1} - 12E \psi_{k-1} \sum K_{0, k+1}. \quad (5)$$

Durch Zusammenziehung von (4) und (5) und, unserem Ansatz gemäß, mit $K_{0, k} = K_{0, k+1}$ ergibt sich

$$-(M_k + M_{k+1}) = 6E(\Phi_{k-1} + 2\Phi_k + \Phi_{k+1}) \sum K_{0, k} - 12E(\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0, k}.$$

Betrachten wir nun einen Knotenpunkt i im Geschoß k . Mit den Kurzbezeichnungen in Abb. 6 können für die Momente in den im Knotenpunkt zusammenstoßenden Stützen- bzw. Balkenenden und für die Verschiebungen folgende Beziehungen angeschrieben werden:

Für Balkenenden:

$$M_{i, i-1} = 2K_{gk, i-1}(2E\Phi_{k, i} + E\Phi_{k, i-1}).$$

bzw.

$$M_{i, i+1} = 2K_{gk, i}(2E\Phi_{k, i} + E\Phi_{k, i+1}).$$

Für Stützenenden:

$$M_{ki, (k-1)i} = 2K_{0k, i}(2E\Phi_{k, i} + E\Phi_{k-1, i} - 3E\psi_k)$$

bzw.

$$M_{ki, (k+1)i} = 2K_{0(k+1), i}(2E\Phi_{k, i} + E\Phi_{k+1, i} - 3E\psi_{k+1}).$$

In diesen Formeln sind

$$K_{gk, i-1} = \frac{J_{gk, i-1}}{l_{i-1}},$$

$$K_{gk, i} = \frac{J_{gk, i}}{h},$$

$$K_{0k, i} = \frac{J_{0k, i}}{h_k},$$

$$K_{0(k+1), i} = \frac{J_{0(k+1), i}}{h_{k+1}}.$$

Da auf den Knotenpunkt kein äußeres Moment wirkt, muß der Gleichgewichtsbedingung entsprechend die Momentensumme auf die im Knotenpunkt zusammenstoßenden Stabenden gleich Null sein. Somit kann unter Berücksichtigung von $K_{0k, i} = K_{(k+1), i}$ sowie $\Phi_{k, k-1} = \Phi_{k, i+1} = \Phi_{k, 1} = \Phi_k$ geschrieben werden:

$$\sum M_i^{(i, k)} = 4E\Phi_k \sum K_{i, k} + 2E\Phi_k K_{gk, i-1} + 2E\Phi_k K_{gk, i} + 4E\Phi_k K_{0, k} - 6E(\psi_k + \psi_{k+1})K_{0, k}. \quad (6)$$

$\Sigma K_{i, k}$ bedeutet die Summe der Steifigkeitszahlen der im Knotenpunkt i, k zusammenstoßenden Stützen und Balken.

Nach Summierung in sämtlichen Knotenpunkten von Geschoß k erhält man Gleichungen, die ähnlich wie (6) geschrieben werden können:

$$8E\Phi_k \sum K_{g, k} + 8E\Phi_k \sum K_{0, k} + 4E\Phi_k \sum K_{g, k} + 4E\Phi_k \sum K_{0, k} - 6E(\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0, k} = 0 \quad (7)$$

oder zusammengezogen

$$12E\Phi_k \sum K_{g, k} + 12E\Phi_k \sum K_{0, k} - 6E(\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0, k} = 0, \quad (8)$$

wobei $\Sigma K_{g, k}$ die Summe der Steifigkeitszahlen sämtlicher Balken in Geschoß k und $\Sigma K_{0, k}$ jene der Steifigkeitszahlen sämtlicher Stützen in demselben Geschoß bedeuten.

Wird der Quotient $z = \frac{\sum K_{g, k}}{K_{0, k}}$ eingeführt, so gilt:

$$(1 + z)12\Phi_k \sum K_{0, k} - 6E(\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0, k} = 0. \quad (9)$$

Um die Zahl der Unbekannten herabzusetzen, werden weitere Näherungen eingeführt. Zwar ist die Schwingungsform noch unbekannt, ist es — da es sich um Grundschwingungen handelt — einzusehen, daß die Knotenpunktverdrehungen Φ und ψ im jeweiligen Geschoß immer zwischen die Verdrehungswerte der beiden Nachbargeschosse fallen, und da geringe Formänderungen vorliegen, können die Verdrehungen in einem jeweiligen Geschoß mit guter Annäherung dem arithmetischen Mittel der Verdrehungen in den beiden Nachbargeschossen gleich gesetzt werden. Für die Berechtigung einer solchen Annahme spricht auch der Umstand, daß sie eine geringere Bindung enthält, als die auf ähnlicher Grundlage durchgeführten Berechnungsverfahren von Rahmen ([10]). So gelten

$$\Phi_k \cong \frac{\Phi_{k+1} + \Phi_{k-1}}{2}$$

und

$$\psi_k = \frac{\psi_{k+1} + \psi_{k-1}}{2}.$$

Somit kann (7) in untenstehender Form geschrieben werden:

$$-(M_k + M_{k+1}) = 12E(\Phi_{k+1} + \Phi_{k-1}) \sum K_{0,k} - 12E(\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0,k}$$

oder

$$-(M_k + M_{k+1}) = 24E\Phi_k \sum K_{0,k} - 12E(\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0,k}. \quad (10)$$

Wird Gleichung (10) mit $-\frac{1+\alpha}{2}$ multipliziert, so haben wir nach Zusammenziehung mit (9) die Gleichung:

$$M_k + M_{k+1} = \frac{12\alpha E}{1+\alpha} (\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0,k}. \quad (11)$$

Auf ganz ähnliche Weise schreiben wir für die Geschosse k und $(k-1)$

$$M_{k-1} + M_k = \frac{12\alpha E}{1+\alpha} (\psi_{k-1} + \psi_k) \sum K_{0,k}. \quad (12)$$

Nach Zusammenziehen von (11) und (12) ergibt sich

$$M_{k-1} + 2M_k + M_{k+1} = \frac{12\alpha E}{1+\alpha} (\psi_{k-1} + 2\psi_k + \psi_{k+1}) \sum K_{0,k}.$$

Schließlich gilt unter Berücksichtigung von $(\psi_{k+1} + \psi_{k-1}) = 2\psi_k$

$$\psi_k = \frac{1+\alpha}{48\alpha E \sum K_{0,k}} (M_{k-1} + 2M_k + M_{k+1}). \quad (13)$$

Nun sollen in jedem Geschöß Seitenkräfte P gleicher Größe und gleicher Pfeilrichtung wirken. Nach den bisherigen Betrachtungen lassen sich die Momente geschößweise, unter Berücksichtigung einer Geschößzahl n , aus folgenden Formeln berechnen:

$$M_{k+1} = (n-k)Ph_{k+1},$$

$$M_k = (n-k+1)Ph_k,$$

$$M_{k-1} = (n-k+2)Ph_{k-1}.$$

(In diesen Formeln bedeutet h die jeweilige Geschößhöhe.)

Werden aus den Beziehungen für die Geschößmomente M_{k+1} und M_{k-1} ausgedrückt, dann haben wir

$$M_{k+1} = M_k \left[\frac{n-k}{n-k+1} \right] \frac{h_{k+1}}{h_k},$$

$$M_{k-1} = M_k \left[\frac{n-k+2}{n-k+1} \right] \frac{h_{k-1}}{h_k}.$$

Somit gilt

$$M_{k-1} + 2M_k + M_{k+1} = \frac{M_k(n-k)h_{k+1} + 2M_k(n-k+1)h_k + M_k(n-k+2)h_{k-1}}{(n-k+1)h_k}$$

Bei gleichen Geschoßhöhen ($h_{k-1} = h_k = h_{k+1}$) haben wir

$$M_{k-1} + 2M_k + M_{k+1} = \frac{M_k(4n-4k+4)h}{(n-k+1)h} = 4M_k$$

und nach Einführung der in Geschoß k wirkenden Resultierenden

$$R_k = \sum_{i=k}^{i=n} P_i$$

ergibt sich $4M_k = 4R_k h$.

Nach obenstehenden Feststellungen läßt sich Gleichung (13) in folgender Form schreiben:

$$\psi_k = 4R_k h \frac{1+z}{48zE \sum K_{0,k}}$$

Da $\psi = \Delta/h$ und die Federkonstante $c_k = \frac{R_k}{\Delta}$ ist, gilt

$$c_k = \frac{R_k}{\psi_k h} = \frac{12zE \sum K_{0,k}}{(1+z)h^2} \quad (14)$$

Sollten die Stützhöhen in den verschiedenen Geschossen unterschiedlich sein, so kann die Federkonstante auf ganz ähnliche Weise aus Gleichung (13) ermittelt werden.

Eine gewisse Abweichung dem oben beschriebenen Verfahren gegenüber ist bei der Berechnung der Federkonstante für das erste Obergeschoß zu verzeichnen, da wegen der starren Einspannung die Knotenpunktverdrehungen im Erdgeschoß gleich Null sind. In diesem Falle bedient man sich folgender Ausgangsgleichungen:

$$-M_1 = 6E\Phi_1 \sum K_0 - 12E\psi_1 \sum K_0 \quad (a)$$

$$-M_2 = 6E\Phi_1 \sum K_0 + 6E\psi_2 \sum K_0 - 12E\psi_1 \sum K_0 \quad (b)$$

$$0 = 8E\psi_1 \sum K_0 + 12E\Phi_1 \sum K_g + 2E\Phi_2 \sum K_0 - 6E\psi_1 \sum K_k - 6E\psi_2 \sum K_0 \quad (c)$$

Wegen der geringen Formänderungen ist es zweckmäßiger, eine Annäherung $\psi_1 \approx \psi_2$ anzunehmen. Werden sodann aus den Gleichungen (a) und (b) ψ_1 und Φ_1 eliminiert, so erhält man

$$\Phi_2 = \frac{M_1 - M_2}{6E \sum K_0}$$

Nach Einsetzen von Φ_2 in Gleichung (c) und unter Berücksichtigung von $\Sigma K_z = \alpha \Sigma K_0$, gilt

$$0 = 8E\Phi_1 \sum K_0 + 12E\Phi_{1z} \sum K_0 + \frac{M_1 - M_2}{3} - 12E\psi_1 \sum K_0$$

oder

$$0 = 4E\Phi_1 \sum K_0(2 + 3\alpha) + \frac{M_1 - M_2}{3} - 12E\psi_1 \sum K_0. \quad (d)$$

ferner

$$M_2 - M_1 = 12E\Phi \sum K_0(2 + 3\alpha) - 36E\psi_1 \sum K_0.$$

Wird Gleichung (a) mit $2(2 + 3\alpha)$ multipliziert und von (d) in Abzug gebracht, so gilt

$$3M_1(1 + 2\alpha) + M_2 = 12(1 + 6\alpha)E\psi_1 \sum K_0$$

und daraus

$$\psi_1 = \frac{M_1(1 + 2\alpha) + M_2}{4E(1 + 6\alpha) \sum K_0}.$$

Ähnlich wie in (14) ist die Federkonstante für das erste Obergeschoß

$$c_1 = \frac{R_1}{\psi_1 h_1}$$

Bei gleichen Geschosshöhen ist

$$M_1 = kPh \quad \text{und} \quad M_2 = (k-1)Ph$$

und somit

$$c_1 = \frac{4En(1 + 6\alpha) \sum K_0}{h^2[n(1 + 2\alpha) + n - 1]}. \quad (15)$$

3.5 Annahme der Schwingungsform

In den im vorhergehenden für die Eigenkreisfrequenz festgelegten Beziehungen kommt die Funktion $x_0(y)$, d.h. die Schwingungsform vor. Nach dem Verfahren von Rayleigh erhält man für die Eigenschwingzahl einen sehr guten Näherungswert, wenn man die bisher unbekannte Schwingungsform $x_0(y)$ durch eine Funktion ersetzt, die die Randbedingungen der Balkenformänderungen befriedigt und durch deren Kurve die voraussichtliche Schwingungsform formgerecht angenähert wird. Die in Verbindung mit verschiedenen Konstruktionen analysierten Beispiele haben andererseits gezeigt, daß sich die Eigenschwingzahl mit guter Annäherung ermitteln läßt, wenn man als Schwingungsform die durch das Eigengewicht deformierte Form eines Trägers ansetzt. Wird z.B. für einen eingespannten Träger die Funktion durch eine Parabel vierter Ord-

nung ersetzt, so erhält man für die Eigenkreisfrequenz einen Wert, der nur um 0,4% vom genauen Ergebnis abweicht [12].

Auf dieser Grundlage soll zunächst die Näherungsfunktion für die Schwingungsform eines Rahmenwerkes ohne Versteifungswände untersucht werden. Wie bereits erwähnt, erhält man diese im vorliegenden Falle, indem man auf das Rahmenwerk eine gleichmäßig verteilte Horizontallast wirken läßt und die für die Horizontalverschiebungen der einzelnen Punkte des Systems charak-

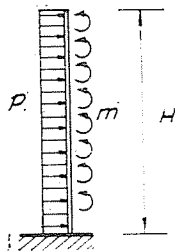


Abb. 7

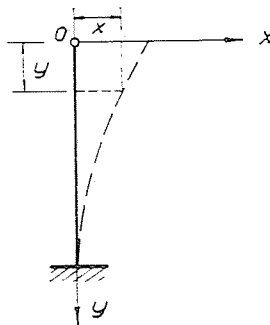


Abb. 8

teristische Funktion bestimmt. Dazu werden statt des Rahmenwerkes die Formänderungen eines sog. Ersatzbalkens untersucht. Das Problem des Ersatzbalkens wird in [4] behandelt und – wie es dort ausführlich dargelegt ist – kann ein Stockwerkrahmenskelett mit gleichen Geschoßhöhen, falls die übereinander angeordneten Balkenelemente von gleicher Steifigkeit sind, bei Vorhandensein eines gleichmäßig verteilten, horizontalen Kräftesystems durch einen eingespannten Balken, wie in Abb. 7, ersetzt werden, auf den ein kontinuierlich verteiltes Kräftepaarsystem unbekannter Intensität wirkt. Durch das Kräftepaarsystem wird die Wirkung der Randbalken ersetzt. Werden die Deformationen dieses Ersatzbalkens untersucht, so läßt sich das Moment im vom Koordinatenursprung in einer Entfernung xy liegenden Querschnitt anhand der Kurzbezeichnungen in Abb. 8 und des angenommenen Koordinatensystems nach [4] in folgender Form schreiben:

$$M = \frac{p}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha H - \text{sh } \alpha H}{\text{ch } \alpha H} \text{sh } \alpha y + \text{ch } \alpha y - 1 \right) \quad (16)$$

mit

$$\alpha = \left(\frac{k}{EJ} \right)^{1/2},$$

$$k = \sum \frac{S}{h} \text{ (auf ein Geschoß bezogen);}$$

ΣS , die Summe der Balkensteifigkeitsverhältniszahlen, bezogen auf sämtliche Knotenpunkte eines Geschosses, ist

$$\begin{aligned} \Sigma S &= S_{1,2} + S_{2,1} + S_{2,3} + S_{3,2} + \dots + S_{m-1,m} + S_{m,m-1}. \\ S_{1,2} &= S_{2,1} = \frac{6EJ_{1,2}}{l_{1,2}}. \end{aligned}$$

$J = \sum_{i=1}^m J_i$ ist die Summe der Querschnitts-Trägheitsmomente der Stützen in einem Geschoß.

Wir erhalten die Gleichung der elastischen Linie für den Ersatzbalken durch zweimalige Integration des Ausdruckes (16). Nach einmaliger Integration erhält man

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int M dy = \frac{1}{EJ\alpha^2} \left(\frac{\alpha H - \text{sh } \alpha H}{\text{ch } \alpha H} \frac{1}{\alpha} \text{ch } \alpha y + \frac{1}{\alpha} \text{sh } \alpha y - y \right) + C_1.$$

Für die Konstante C_1 erhalten wir aus den Randbedingungen (in $y=H$, $\varphi=0$) Null. Nach nochmaliger Integration ergibt sich

$$\eta = \int \varphi dy = \frac{1}{EJ\alpha^2} \left(\frac{\alpha H - \text{sh } \alpha H}{\text{ch } \alpha H} \frac{1}{\alpha^2} \text{sh } \alpha y + \frac{1}{\alpha^2} \text{ch } \alpha y - \frac{y^2}{2} \right) + C_2.$$

Auch die Ermittlung der Konstante C_2 erfolgt anhand der Einspannung ($y=H$), da hier $\eta=0$ ist. Somit ist

$$C_2 = \frac{1}{EJ\alpha^2} \left[\frac{H^2}{2} - \left(\frac{\alpha H \text{ sh } \alpha H}{\text{ch } \alpha H} - \frac{\text{sh}^2 \alpha H}{\text{ch } \alpha H} \right) \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \text{ch } \alpha H \right].$$

Die Gleichung der elastischen Linie des Rahmenskeletts ergibt sich also zu

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{EJ\alpha^4} & \left(\frac{\alpha H - \text{sh } \alpha H}{\text{ch } \alpha H} \text{sh } \alpha y + \text{ch } \alpha y - \frac{\alpha^2 y^2}{2} + \frac{\alpha^2 H^2}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha H \text{ ch } \alpha H - \text{sh } \alpha^2 H}{\text{ch } \alpha H} - \text{ch } \alpha H \right). \end{aligned} \quad (17)$$

und die Gleichung der angenäherten Schwingungsform zu

$$x_0 = \frac{\alpha H - \text{sh } \alpha H}{\text{ch } \alpha H} \text{sh } \alpha y + \text{ch } \alpha y - \frac{\alpha y^2}{2} + \frac{\alpha H^2}{2} - \frac{\alpha H \text{ sh } \alpha H - \text{sh}^2 \alpha H}{\text{ch } \alpha H} - \text{ch } \alpha H. \quad (18)$$

Bei Skelettbauten mit gelenkig angeschlossenen Versteifungswänden kann die Versteifungswand als ein eingespannter Träger aufgefaßt werden, der geschoßweise durch Federn mit gleicher oder annäherndgleicher Federkonstante abgestützt ist. Somit läßt sich die Versteifungswand durch einen elastisch gebetteten Kragbalken ersetzen, für den die Bettungsziffer aus den Federkonstanten leicht zu ermitteln ist. Die Aufstellung der Gleichung für die elas-

tische Linie eines elastisch gebetteten, eingespannten Balkens unter gleichmäßig verteilter Last stellt eine bereits gelöste Aufgabe dar, die unter anderem auch in [6] nachgelesen werden kann. Die Berechnungen zeigten, daß man keinen allzu groben Fehler begeht, indem man statt der durch genaue Berechnungen erzielten, ziemlich umständlichen Gleichung, die bei der Schwingung deformierte Form durch eine Parabel vierter Ordnung ersetzt.

4. Ermittlung der Eigenschwingzahl von Skelettbauten mit ecksteif angeschlossnen Versteifungswänden

In der überwiegenden Mehrheit der Fälle ist die Verbindung von Rahmenskelett und Versteifungswand kein Gelenkanschuß, sondern er ist ecksteif ausgebildet (Abb. 2). In dieser Form ist das schwingende Rahmenwerk nicht nur zur geschoßweisen Übertragung von Kräften in Balkenrichtung geeignet, sondern es kann auch eine in der Regel an der Einspannungsstelle auftretende Schrägkraft und ein Moment übertragen, die dem Ausschlag der Versteifungswand bzw. der Querschnittsverdrehung proportional sind. Das schematisch dargestellte statische und schwingungstheoretische Modell einer derartigen Konstruktion ist in Abb. 9 zu sehen.

In der Abbildung ist das beim Zusammenstoß von Rahmenbalken und

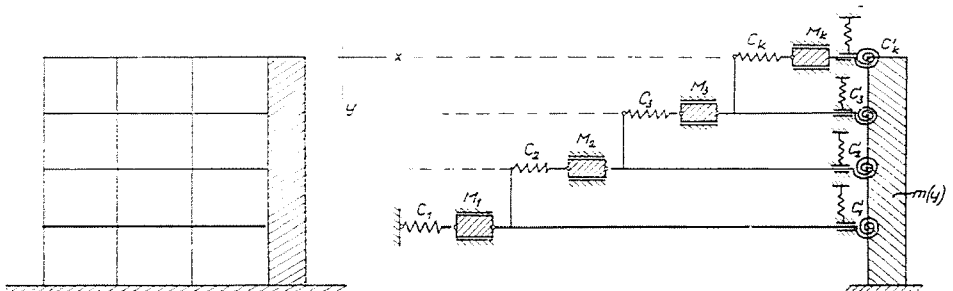


Abb. 9

Statisches Modell

Schwingungstheoretisches Modell

Versteifungswand übertragene Kräftepaar durch eine besondere Spiralfeder dargestellt, deren Federkonstanten durch c_1, c_2, \dots, c_n bezeichnet wurden. Besteht zwischen der Schwingungsamplitude sowie den auf die Versteifungswand übertragenen Kräften und Momenten ein linearer Zusammenhang, so sind diese dem Ausschlag direkt proportional; mit anderen Worten: es handelt sich um lineare Schwingungen. Wir wollen ähnlich wie in Abschnitt 3 vorgehen, und auch hier das Prinzip der Energieerhaltung als Ausgang wählen. Es werden

massenlose Federn vorausgesetzt, was ja selbstverständlich ist, da in der Wirklichkeit keine besonderen Federn vorliegen, sondern die Federwirkung durch die Elastizität des Systems an sich erfolgt. Somit ist die maximale kinetische Energie des Gesamtsystems nach den Ausführungen in Abschnitt 3 wie folgt:

$$E_{\text{in}}^{\text{max}} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^H x_0^2 \mu(y) dy \tag{19}$$

(Für die Kurzbezeichnungen siehe Abschnitt 3.)

Die potentielle Energie des Systems läßt sich auch hier als Summe der in der als eingespannten Balken betrachteten Wand sowie in den zweierlei Federn aufgespeicherten Energien anschreiben:

$$E_h = E_{\text{h Balken}} + E_{\text{Feder I}} + E_{\text{Feder II}}$$

Da sämtliche Elemente den maximalen Ausschlag gleichzeitig erreichen, werden sie auch das Maximum der kinetischen Energie gleichzeitig erreichen, und so gilt, daß

$$E_{\text{pot max}} = E_{\text{pot Balken max}} + E_{\text{pot Feder I max}} + E_{\text{pot Feder II max}}$$

Die in der Formel als Zeiger stehenden Bezeichnungen Feder I und Feder II beziehen sich auf die die Kraft bzw. das Moment übertragenden Federn.

Betrachten wir nun eingehender die einzelnen Glieder. Unter der Voraussetzung einer veränderlichen Querschnittsfläche sowie eines veränderlichen Trägheitsmoments, ferner die Arbeit der Querkraft eingerechnet, ist die maximale potentielle Energie des Balkens wie folgt:

$$E_{\text{pot Balken max}} = \frac{1}{2} \int_0^H EJ(y) \left[\frac{d^2 x_0}{dy^2} \right]^2 dy + E_Q \frac{m+1}{m} \int_0^H \frac{J(y)}{F(y)} \left[\frac{d^3 x_0}{dy^3} \right]^2 dy. \tag{20}$$

Die Arbeit der, den Versteifungsbalken abstützenden fiktiven Federn und damit der Höchstwert der in ihnen aufgespeicherten potentiellen Energie wird aufgrund folgender Überlegungen ermittelt. In Abb. 10a sind die Federn dargestellt, die in einem jeweiligen Geschoß die Wirkung des sich an die

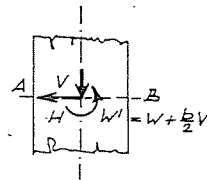
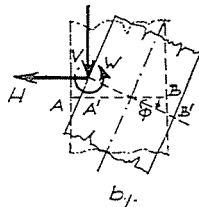
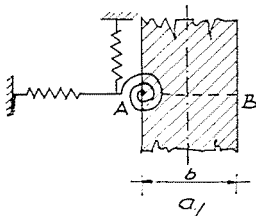


Abb. 10

Abb. 11

Versteifungswand anschließenden Balkens ersetzen. Durch Deformation wird der Querschnitt $A-B$ der Versteifungswand die Lage $A'-B'$ einnehmen; damit ändert sich die Länge der Stützfeder, was in Punkt A die Übertragung auf die Wand einer Horizontal- (H) und einer Vertikalkraft (V) sowie eines Moments (W) zur Folge hat, wie das aus Abb. 10b ersichtlich ist.

Wird das so erhaltene Kräftesystem auf den Querschnittsschwerpunkt reduziert, so erhalten wir die Kräfte und Momente in Abb. 11, aus denen die Arbeit der Stützwirkung errechnet werden soll. Mit der üblichen Annäherung, wonach die Arbeit der Normalkraft (V) der Arbeit der anderen Kraft und des Moments gegenüber vernachlässigt werden kann, und anhand der Überlegungen in Abschnitt 3 kann die in der horizontalen Stützfeder im Laufe der Deformation aufgespeicherte potentielle Energie aufgeschrieben werden, mit dem Höchstwert

$$E_{\text{pot Feder I max}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 c_k \quad (21)$$

(Die ausführliche Bedeutung der Größen in (20) und (21) ist in Abschnitt 3 zu finden.)

Das auf die Versteifungswand übertragene Moment ist der Verdrehung des zum Anschlußpunkt der Rahmenbalkenachse gehörigen Versteifungswandquerschnittes direkt proportional.

$$W = c' \Phi$$

c' bedeutet hierin die Maßzahl des durch Einheitsverdrehung auftretenden Moments und wird im weiteren als Torsionsfederkonstante bezeichnet. Somit ergibt sich die aus der Arbeit des durch die Querschnittsverdrehung auftretenden Moments herrührende maximale potentielle Energie zu

$$E_{\text{pot Feder II max}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n W_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k^2 c'_k \quad (22)$$

In der Formel bedeutet φ_k die Verdrehung des Geschosses k im Augenblick des größten Ausschlags, was dem Wert der ersten Derivierten der der größten Amplitude zugehörigen Funktion in der betreffenden Geschoßhöhe entspricht.

Nach Gleichsetzung der maximalen potentiellen und kinetischen Energien läßt sich anhand der erhaltenen Gleichung die Eigenkreisfrequenz der Konstruktion aus folgender Beziehung ermitteln:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^H EJ(y) \left[\frac{d^2 x_0}{dy^2} \right]^2 dy + 2E_0 \frac{(m+1)}{m} \int_0^H [i(y)]^2 \left[\frac{d^3 x_0}{dy^3} \right]^2 dy + \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 c_k + \sum_{k=1}^n \varphi_k^2 c'_k}{\int_0^H x_0^2 \mu(y) dy} \quad (23)$$

In der Gleichung bedeutet x_0 auch in diesem Falle die zum größten Ausschlag der Versteifungswand gehörige Funktionsform, die nach dem Verfahren von Rayleigh durch eine die Formänderungsbedingungen befriedigende Näherungsfunktion ersetzt werden kann. Die für die Schwingungsform der in Punkt 3.5 behandelten Skelettkonstruktion erhaltene Näherungsformel (18) läßt sich offenbar auch auf Skelettbauten mit ecksteif angeschlossenen Versteifungswänden anwenden, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß in der Summe $J = \sum_{i=1}^m J_i$ auch das Querschnittsträgheitsmoment der Versteifungswand vorkommt.

Die für die durch Horizontalverschiebung erzeugte Kraft charakteristische Federkonstante (c_k) läßt sich auch aus dem im vorstehenden hergeleiteten Formeln (14) und (15) errechnen. Somit unterscheidet sich Gleichung (23) für die Eigenkreisfrequenz, unter Berücksichtigung der vorhergehenden Ergebnisse, von (3) lediglich darin, daß sie noch ein letztes Glied mit dem unbekanntem Torsionsfederkonstante (c_t) enthält. Die für verschiedene Varianten unter Anwendung von Näherungsverfahren ermittelten Federkonstanten werden anhand von [1, 2] im folgenden dargelegt, ohne auf die Herleitung näher einzugehen.

Für den allgemeinsten Fall, wenn Rahmenskelett und Versteifungswand in der in Abb. 12 angedeuteten Form miteinander zusammenstoßen, gilt

$$c_k = 6EK_{AC} \left[\left(1 + \frac{b}{2a}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right) - \left(1 + \frac{3b}{2a}\right) \frac{K_{AC} \left(1 + \frac{b}{2a}\right) + K_{AF}}{2 \sum K} \right]. \quad (24)$$

wo $K_{AC} = J_{AC}/a$, $K_{AF} = J_{AF}/l_{AF}$ und $\sum K = K_{AC} + K_{AB} + K_{AD} + K_{AF}$ ist (Summe aus den Steifigkeitszahlen der Balken und Stützen im Knotenpunkt A). Andere Kurzbezeichnungen sind aus Abb. 12 zu entnehmen.

Praktisch kommt noch die Konstruktion in Abb. 13 vor; ein Knotenpunkt wurde in während der Schwingung deformierter Form dargestellt. Hier ist

$$c_k = 6EK_{AC} \left(1 + \frac{b}{2a}\right) \left[1 + \frac{b}{a} - \left(1 + \frac{3b}{2a}\right) \frac{K_{AC}}{\sum K}\right]. \quad (25)$$

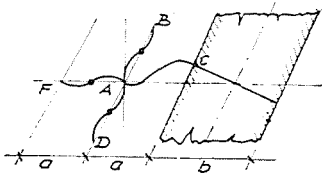


Abb. 12

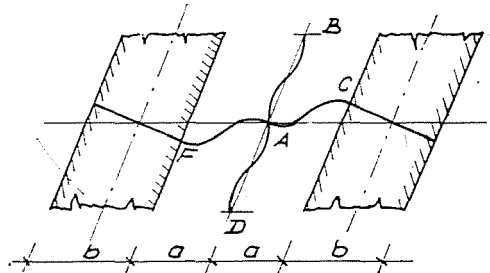


Abb. 13

Der Vollständigkeit halber soll auch der Fall gezeigt werden, wo zwei Versteifungswände geschoßweise durch einen Balken verbunden sind (Abb. 14). In diesem Falle ist die Stützfederkonstante (c_z) gleich Null, und beim Ausschlag

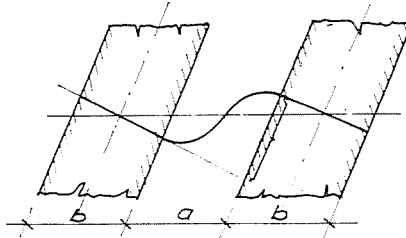


Abb. 14

werden lediglich ein Moment bzw. eine Normalkraft auf die Versteifungswand übertragen. In diesem Falle ist

$$c_z = 6EK \frac{(a+b)^2}{a^2}. \quad (26)$$

5. Ermittlung der Eigenschwingzahl von Skelettbauten mit zur Rahmenebene parallelen Versteifungswänden

Bisher wurden solche Fälle behandelt, wo sich die Versteifungswand in der Ebene des Rahmenwerkes befand. Eine wirtschaftliche und oft angewandte Ausführung besteht darin, die Versteifungswände außerhalb der Rahmenebene, zu dieser parallel anzuordnen, weil dies die Versteifung von mehr als zwei

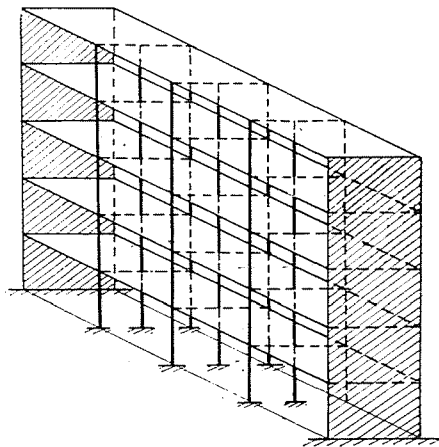


Abb. 15

einander paralleler Rahmen durch zwei Versteifungswände ermöglicht. Die axonometrische Darstellung dieser Ausführungsform ist in Abb. 15 gezeigt. Hier sind drei zweifeldrige fünfgeschossige Stockwerkrahmen durch Stirnwände versteift. Ausgangs wird vorausgesetzt, daß Versteifungswände und Rahmenstiele in den Boden starr eingespannt sind. Die Stützwirkung der beiden Stirnwände wird durch die Zwischengeschosse den Rahmen übermittelt. Eine solche Decke kann als eine in ihrer Ebene starre Scheibe betrachtet werden.

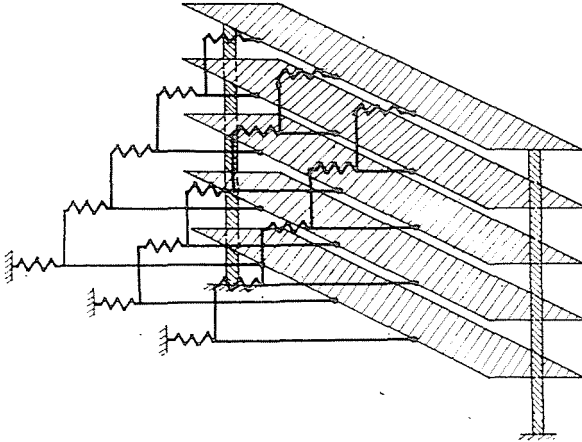


Abb. 16

Das bedeutet, daß während der Schwingung die Formänderungen in horizontaler Ebene der Decken vernachlässigt werden können. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Biegesteifigkeit der Decke in zur Rahmenebene senkrechter Richtung gleich Null ist, so daß in der Rahmenebene lediglich die Rahmenbalken und Rahmenstiele auf Biegung beansprucht werden können, zu deren Biegesteifigkeit die Decken nicht beitragen.

Somit sind die einzelnen Decken durch die Rahmen in Richtung der Schnittlinie von Decke und Rahmenebenen elastisch abgestützt, während sie sich an den Rändern an die Versteifungswände anschließen, die als freitragende elastische Balken aufgefaßt werden können. Abb. 16 zeigt das entsprechende schwingungstheoretische Modell der Konstruktion.

Zur Ermittlung der Eigenschwingzahl wird auch hier den im vorigen Abschnitt angewandten Grundsätzen entsprechend verfahren. Aus dem schwingungstheoretischen Modell ist zu ersehen, daß die Abweichung vom in Abschnitt 3 erörterten Skelettbau mit gelenkig angeschlossenen Versteifungswänden lediglich darin besteht, daß die Stützfeder der Versteifungswand „stärker“ sind. In der Berechnung kommt dies insofern zur Geltung, daß die Federkon-

stanten mit dem Quotienten aus Rahmenanzahl und Zahl der Versteifungswände zu multiplizieren sind.

Aufgrund dieser Ausführungen wird die Eigenkreisfrequenz von Skelettbauten mit zur Rahmenebene parallelen Versteifungswänden unter Berücksichtigung von Formel (3) aus folgender Gleichung errechnet:

$$\omega^2 = \frac{r \int_0^H EJ(y) \left[\frac{d^2 x_0}{dy^2} \right]^2 dy + 2rE \frac{m+1}{m} \int_0^H \left[i(y) \right]^2 \left[\frac{d^3 x_0}{dy^3} \right]^2 dy + \frac{s}{r} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 c_k}{\int_0^H x_0^2 m(y) dy} \quad (27)$$

Dabei bedeuten r die Anzahl der Versteifungswände, s die Anzahl der Rahmen und $m(y)$ die auf die Achse des Versteifungsbalkens reduzierte Masse des gesamten Gebäudes je Längeneinheit. Die sonstigen Kurzbezeichnungen sind dieselben wie in Abschnitt 3.

6. Zahlenbeispiel

In Abb. 17 ist ein Querschnitt durch ein sechsstöckiges Bürohaus dargestellt, und nun soll die Eigenschwingzahl der waagerechten Querschwingungen dieses Gebäudes ermittelt werden. Das Rahmenskelett aus Fertigteilen weist in fertigem Zustand ecksteife Knotenpunkte auf. Decken und Stirnwände bestehen aus vorgefertigten Großplatten, die im Kräftespiel der Rahmen nicht beteiligt sind. Unter der Wirkung des anstoßenden eingeschossigen Gebäudetракtes wird in der Höhe des ersten Geschosses eine horizontale Abstützung vorausgesetzt, die keine seitliche Verschiebung zuläßt. Bei der Berechnung von Deckenträgern und Stützen wurden folgende Trägheitsmomente berücksichtigt:

Stütze (siehe Schnitt $A-A$ in Abb. 17)

$$J_0 = \frac{35 \cdot 50^3}{12} = 364\,000 \text{ cm}^4;$$

Balken, unter Berücksichtigung der anstoßenden Randbalken

$$J_g = \frac{50 \cdot 35^3}{12} = 179\,500 \text{ cm}^4.$$

Elastizitätsmodul für Beton $B.280$: $E_{\text{din}} = 340\,000 \text{ kp/cm}^2$.

Die Abstützung in den Endpunkten der freitragenden Balken wird dadurch berücksichtigt, daß durch Reaktion lediglich aufwärts gerichtete Kräfte übertragen werden können (Ziegelwände vertragen nur Druckkräfte). Das

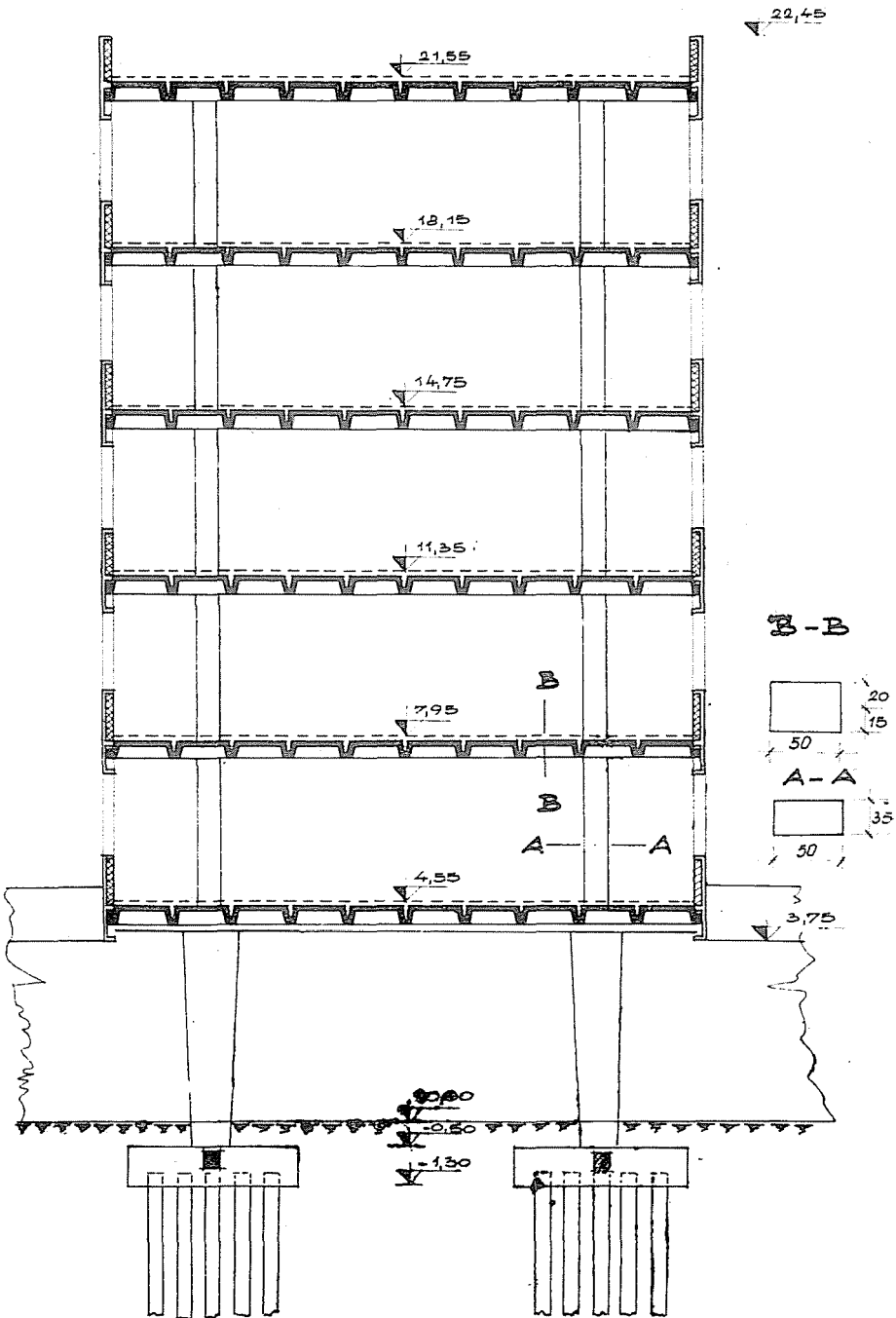


Abb. 17

bedeutet, daß bei Schwingbewegung — da sich die beiden Kragbalkenenden lotrecht in entgegengesetzte Richtung zu verschieben trachten — nur eine Stütze arbeitet. Daher wird im weiteren die Wirkung lediglich einer arbeitenden Kragstütze berücksichtigt. Das Modell für die Eigenschwingungsberechnung des Systems ist in Abb. 18 dargestellt.

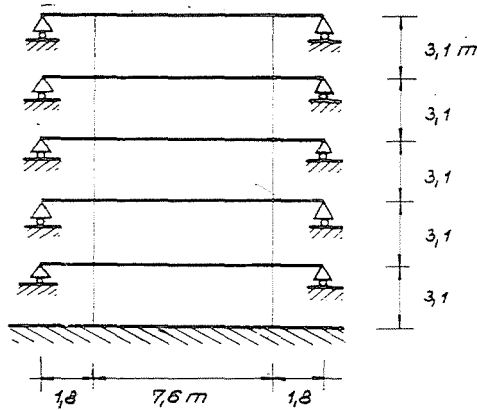


Abb. 18

Die beim Schwingen ausschlagende Form des Gebäudes $[x_0(y)]$ wird anhand von Formel (18) auf folgende Weise errechnet:

$$J = J_1 + J_2 = 0,00728 \text{ m}^4,$$

$$\sum S = 0,00673 E \text{ m}^3,$$

$$k = \sum \frac{S}{h} = \frac{0,00673 E}{3,4} = 0,00217 E \text{ m}^2,$$

$$\alpha = \left(\frac{0,00217 E}{0,00728} \right)^{1/2} = 0,547 \text{ m}^{-1} \quad H=17.$$

Werte der Funktion in den den einzelnen Geschossen entsprechenden Punkten:

$x_0(y)$ in 0	$x_{0,5} = 0,51$	$x_{0,5}^2 = 0,261$
$x_0(y)$ in $0,2H$	$x_{0,4} = 0,37$	$x_{0,4}^2 = 0,137$
$x_0(y)$ in $0,4H$	$x_{0,3} = 0,25$	$x_{0,3}^2 = 0,063$
$x_0(y)$ in $0,6H$	$x_{0,2} = 0,13$	$x_{0,2}^2 = 0,017$
$x_0(y)$ in $0,8H$	$x_{0,1} = 0,04$	$x_{0,1}^2 = 0,0016$
$x_0(y)$ in H	$x_{0,0} = 0,0$	$x_{0,0}^2 = 0,000$
		$\sum = 0,4796$

$$\begin{array}{ll}
 x_{0,5} - x_{0,4} = 0,14 & (x_{0,5} - x_{0,4})^2 = 0,0196 \\
 x_{0,4} - x_{0,3} = 0,12 & (x_{0,4} - x_{0,3})^2 = 0,0144 \\
 x_{0,3} - x_{0,2} = 0,12 & (x_{0,3} - x_{0,2})^2 = 0,0144 \\
 x_{0,2} - x_{0,1} = 0,09 & (x_{0,2} - x_{0,1})^2 = 0,0081 \\
 x_{0,1} - x_{0,0} = 0,04 & (x_{0,1} - x_{0,0})^2 = 0,0016 \\
 & \hline
 & = 0,0581
 \end{array}$$

Bestimmung der Federkonstanten

$$K_0 = \frac{J_0}{h} = \frac{364000}{310} = 1170 \text{ cm} \quad \sum K_u = 2340 \text{ cm}^3$$

$$K_{st} = \frac{J_{st}}{l_2} = \frac{179500}{760} = 228 \text{ cm}^3$$

$$K_{w2} = \frac{3 J_{w2}}{4 l_2} = \frac{3}{4} \frac{179500}{180} = 995 \text{ cm}^3 \quad \sum K_z = 1223 \text{ cm}^3$$

$$\alpha = \frac{\sum K_z}{\sum K_0} = \frac{1223}{2340} = 0,524$$

Nach Formel (14) ist in jedem Geschöß

$$c_k = \frac{12\alpha E \sum K_0}{(1+\alpha)h^2} = \frac{12 \cdot 0,524 \cdot 340 \cdot 2340}{1,524 \cdot 310^2} = 33,8 \text{ Mp/cm.}$$

Berechnung der Massen je Geschöß:

Großplatte T_5	8 Stk	8 · 1,5	= 14,40 Mp
Großplatte T_7	2 Stk	2 · 2,1	= 4,20 Mp
Wandplatte	2 Stk	2 · 3,6	= 7,20 Mp
Deckenträger	0,145 · 2,5 · 12		= 4,35 Mp
Stütze	0,175 · 2,5 · 6,4		= 2,80 Mp
Deckenbelag	12 · 6,5 · 0,03		= 2,43 Mp
Trennwand	3 · 13,0 · 1,8 · 0,8 + 18 · 3 · 1,8 · 0,8,		= 9,08 Mp
Sonstige Einrichtungen			= 2,00 Mp
			<hr/>
			46,46 Mp

Die konzentrierte Masse je Geschöß beträgt:

$$M_k = \frac{46,46}{981} = 0,0472 \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2.$$

Horizontale Kreisfrequenz des Gebäudes nach (3a):

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_{0,k} - x_{0,k-1})^2 c_k}{\sum_{k=1}^n M_k x_{0,k}^2}} = \sqrt{\frac{0,0581 \cdot 33,8}{0,0472 \cdot 0,4796}} = 9,35^{-1}.$$

Horizontale Eigenschwingzahl des Gebäudes:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,3}{6,28} = 1,49 \text{ Hz}$$

Schwingungsmessungen an Gebäuden haben gezeigt, daß durch eine periodische Erregerkraft zwischen 1,5 und 2 Hz starke Schwingungen verursacht wurden, die Eigenschwingzahl des Gebäudes liegt also zwischen diesen Werten. Unter Berücksichtigung der Trennwände und anderer Versteifungen kann das erzielte Ergebnis als richtig bezeichnet werden.

Zusammenfassung

Im Beitrag werden Methoden zur Ermittlung der Eigenfrequenzen der Horizontal-schwingungen von Hochhäusern in Rahmenkonstruktion sowie von gegen Horizontal-kräfte durch Wände versteiften Gebäuden behandelt, die für praktische Berechnungen entsprechende annähernde Ergebnisse liefern und die Durchführung der Rechenarbeit mit den Mitteln von Entwurfsbüros ermöglichen.

Schrifttum

- [1] BANDEL, H.: Frames Combined with Shear Trusses under Lateral Loads. Proceedings ASCE V. 88, St. 6. Dez. 1962.
- [2] CARDAN, B.: Concrete Shear Walls Combined with Rigid Frames in Multistory Buildings. ACI Journal, Proceedings V. 58. No. 3, Sept. 1961.
- [3] CSONKA, P.: Eljárás elmozduló sarkú derékszögű keretek számítására (Verfahren zur Berechnung von Rechteckrahmen mit verschieblichen Ecken). Tudományos Könyvkiadó, 1950.
- [4] CSONKA, P.: Beitrag zur Berechnung waagrecht belasteter Stockwerkrahmen. Die Bautechnik, Heft 7. 1962.
- [5] GOULD, Ph.: Interaction of Shear Wall Frame Systems in Multistory Buildings. ACI Journal, Proceedings V. 1962.
- [6] HAYASHI, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin, 1921.
- [7] KAHN, F. R.—SBARAMIS, J. A.: Interaction of Shear Wall with Frames in Concrete Structures under Lateral Loads. Proceedings of ASCE V. 90. St. 3. Jun. 1964.
- [8] NICKERSON, T. F.: Analysis of Multistory Building Frames. Proceedings of ASCE V. 83. St. 3. May 1957.
- [9] PALOTÁS, L.: Keretek elmélete és számítása (Theorie und Berechnung von Rahmen). Közlekedési Kiadó, 1951.
- [10] PARCEL, R. B.—MOORMAN, R.: Analysis of Statically Indeterminate Structures. London, 1959.
- [11] TIMOSHENKO, S. P. YOUNG, D. H.: Vibration Problems in Engineering. New York, 1955.
- [12] VÉRTES, Gy.: Rezgésstan (Schwingungslehre). Lehrstoffheft für Fachingenieurausbildung, MTI, 1965.