ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Й. ФЮЗИ,

Будапештский Проектный институт по градостроительству

(Поступило в печать: 1-го сентября 1967 г.)

1. Введение

Для решения плоской задачи теории упругости автором настоящей статьи был уже раньше разработан метод применения системы функций напряжений, позволяющий производить расчет напряжений производными первого порядка вместо принятых до сих пор производных второго порядка. Таким образом, выполнение численного расчета во многих отношениях является более простым и вместе с тем и более точным (2, 3).

В настоящей статье обобщаются эти функции напряжений для трехмерной задачи. Показывается возможность выражения важнейших уравнений теории упругости новыми функциями напряжений.

2. Примененные обозначения

x, y, z	декартовые прямоугольные координаты;
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	единичные векторы системы прямоугольных координат;
$\sigma_x, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}$	составляющие вектора напряжений в направлениях x, y, z в сечении с нормалью x;
$\sigma_y, \quad \tau_{yx}, \quad \tau_{yz}$	составляющие вектора напряжений в направлениях y, x, z в сечении с нормалью y;
$\sigma_z, \quad \tau_{zx}, \quad \tau_{zy}$	составляющие вектора напряжений в направлениях z, x, y в сечении с нормалью z;
$\mathbf{S}$	тензор напряжений;
$\sigma_0 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$	первый скалярный инвариант тензора напряжений;
$\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \varepsilon_z$	удельные удлинения в направлениях x, y, z;

$\gamma_{xy}, \quad \gamma_{xz}, \quad \gamma_{yz}$	удельные искажения углов в плоскостях xy, xz, yz;
$\mathbf{D}$	тензор деформаций;
$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$	первый инвариант тензора деформаций;
$\mathbf{u}$	вектор перемещения;
u, v, w	составляющие вектора перемещения;
$\sigma=[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]$	6-элементный вектор, образованный из элементов тензора напряжений;
$\varepsilon=[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]$	6-элементный вектор, образованный из элементов тензора деформаций;
$\mathbf{H}$	тензор, выражающий закон упругости;
δ_{ik}	символ Кронеккера;
$\mathbf{I}=[\delta_{ik}]$	единичный тензор;
E	модуль упругости;
m	коэффициент контракции;
G	модуль сдвига;
$\lambda=\dfrac{2mE}{(m-2)(m+1)}$	первая постоянная Ламэ;
$\mu=\dfrac{mE}{2(m+1)}$	вторая постоянная Ламэ;
$\cdot$	знак скалярного умножения;
$\times$	знак векториального умножения;
o	знак диадического умножения;
$\nabla=\mathrm{i}\dfrac{\delta}{\delta_x}+\mathrm{j}\dfrac{\delta}{\delta_y}+\mathrm{k}\dfrac{\delta}{\delta_z}$	дифференциальный оператор, так называемый набла-вектор;
$\operatorname{div}\mathrm{a}=\nabla\cdot\mathrm{a}$	понимание векторной дивергенции;
$\mathbf{rot}\,\mathrm{a}=\nabla\times\mathrm{a}$	понимание векторной ротации;
$\mathbf{grad}\,b=\nabla\cdot b$	понимание градиента;
$\nabla=\dfrac{\delta^2}{\delta_x{}^2}+\dfrac{\delta^2}{\delta_y{}^2}+\dfrac{\delta^2}{\delta_z{}^2}$	оператор Лапласа;
$\mathrm{DIV\,A}$	тензорная дивергенция;
$\mathrm{ROT\,A}$	тензорная ротация.

Вписанные за формулами обозначения «и т. д.», указывают на то, что циклической заменой переменных x, y, z из данной формулы можно получить еще две дальнейших формулы.

3. Краткое изложение достигнутых до сих пор результатов

Основные уравнения теории упругости разделяются на три группы. Первая группа охватывает уравнения равновесия, написанные первым НАВЬЕ в 1821 г. К второй группе относятся зависимости между функциями удельных деформаций и перемещений, написанные КОШИ в 1822 г.

В третью группу уравнений теории упругости входят так называемые физические уравнения, выражающие закон ГУКА в обобщенном виде. Этот закон был установлен ГУКОМ уже в 1660 г., но был им опубликован только в 1676 г. В дальнейшем дается объяснение этих уравнений только в объеме, необходимом для понимания дальнейших изложений, так как они подробно описаны в литературе (6, 14).

Пренебрегая объемными силами, пространственное равновесное состояние можно написать, как известно, в следующем виде:

$$\mathrm{DIV}\,\mathbf{S} = 0. \tag{3,01}$$

Соответствующие три скалярных уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial_x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial_z} = 0 \tag{3,02}$$

и т. д.

Геометрические уравнения выражаются следующей известной зависимостью (7):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla o \mathbf{U} + \mathbf{U} o \nabla)$$

соответствующей следующим шести уравнениям:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3,03}$$

и т. д.

Основной закон упругости при совершенно общей анизотропии имеет вид (8):

$$\sigma = \mathbf{H}\cdot\varepsilon. \tag{3,04}$$

В случае однородной изотропии количество элементов $h_{ij}=h_{ji}$, составляющее обычно 21, сокращается следующим образом:

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{m}{E} & -\frac{m}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{m}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m}{E} & -\frac{m}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{vmatrix} \tag{3,05}$$

Система уравнений пространственной задачи теории упругости, состоящая из приведенных выше 15 скалярных уравнений, дополняется еще так называемым уравнением совместимости, которое можно написать в следующем виде (4, 5):

$$\operatorname{Ink} \mathbf{D} = 0. \tag{3,06}$$

Здесь дифференциальный оператор Ink применялся для сокращения следующего триединого матричного произведения (5, 12):

$$\operatorname{Ink} \mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^*, \tag{3,07}$$

где

$$\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{3,08}$$

$\mathbf{R}^*$ транспонированное значение ее.

Детализируя выражение (3,06), получаем следующие известные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{и т. д.}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \quad \text{и т. д.} \tag{3,09}$$

Исключая некоторые неизвестные, БЕЛЬТРАМИ упростил приведенные уравнения так, что остались только элементы тензора напряжений. Таким образом он получил следующие шесть уравнений:

$$\Delta \sigma_x + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

$$\Delta \tau_{xy} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{3,10}$$

Суммированием уравнений первого типа для первого скалярного инварианта тензора напряжений получается эллиптическое дифференциальное уравнение:

$$\Delta \sigma_0 = 0. \tag{3,11}$$

Для решения этого дифференциального уравнения ЭРИ ввел в 1862 г. функцию напряжений, названную им функцией $\mathbf{F}$, при помощи которой для двухмерной задачи он написал зависимость

$$\sigma_0 = \Delta F, \quad \text{и} \quad \Delta\Delta F = 0. \tag{3,12}$$

Таким образом, проблема сведена к задаче с одной неизвестной.

Вводя две дальнейших функции напряжений, МАКСВЕЛЛ обобщил эту функцию напряжений для трехмерной задачи. Затем МОРЕРА ввел другую систему, состоящую также из трех скалярных функций, и тем самым для решения пространственной задачи теории упругости нашел другую систему функций напряжений (6).

Значительно позже было только выяснено, что эти две системы, состоящие из 3 функций каждая, не являются независимыми друг от друга, а представляют собой дополнительные системы, образуя элементы зеркального тензора (12, 15).

Ибо, уравнение равновесия (3,01) удовлетворяется предположением, по которому тензор напряжений разлагается следующим способом (4, 5):

$$\mathbf{S} = \mathrm{Ink}\,\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^*. \tag{3,13}$$

Параметер-тензор $\mathbf{F}$ имеет вид:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 & F_6 & F_5 \\ F_6 & F_2 & F_4 \\ F_5 & F_4 & F_3 \end{bmatrix} \tag{3,14}$$

Выражая зависимость (3,13) через элементы параметра-тензора $\mathbf{F}$, для отдельных элементов тензора напряжений получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_4}{\partial y\,\partial z};\\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_5}{\partial z\,\partial x};\\
\sigma_z &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_6}{\partial x\,\partial y};\\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 F_4}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 F_5}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 F_6}{\partial z^2}\right);\\
\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial z}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 F_4}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F_5}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_6}{\partial y\,\partial z}\right);\\
\tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\,\partial z}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_5}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F_6}{\partial x\,\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{3,15}$$

Только три из шести функций $F_1 \sim F_6$ независимы друг от друга, а при определенных условиях можно принять, что три равняются нулю (12).

В системе МАКСВЕЛЛА $F_4=F_5=F_6=0$, а остальные F_1, F_2, F_3 представляют собой систему функций напряжений МАКСВЕЛЛА. Как частный случай, в плоской задаче и $F_1=F_2=0$. В этом случае остается только F_3, которая является функцией напряжений ЭРИ.

В системе МОРЕРА $F_1=F_2=F_3=0$, а остальные три функции F_4, F_5, F_6

образуют систему функций напряжений МОРЕРА. Из этой системы нельзя выводить функцию напряжений ЭРИ.

Напряжения в обеих системах выражаются через производные второго порядка. Исключая из выражений (3,15) функции, соответствующие данным системам, получаем зависимости, входящие в соответствующую систему, например,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \qquad \text{в системе МАКСВЕЛЛА}$$

и

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_4}{\partial y \partial z} \qquad \text{в системе МОРЕРА}$$

и т. д.

Уравнения, служащие для определения функций напряжений, являются сложными (4, 5, 10, 12).

4. Введение новых функций напряжений

Уравнение равновесия (3,01) удовлетворяется не только разложением (3,13), а рядом других. При этом кажется даже излишним вводить в качестве параметра для описания напряженного состояния тензорную величину, так как достаточно принимать три функции напряжений, независимые друг от друга (6, 12). Более целесообразным кажется вводить разложение:

$$\mathbb{S} = \mathbf{R} \cdot [\mathfrak{f} \times \mathbf{I}]^*, \tag{4,01}$$

также удовлетворяющее уравнению равновесия (3,01). Тензор-оператор $\mathbf{R}$ был уже определен формулой (3,08), а три компонента вектора $\mathfrak{f}$ представляют собой три необходимых функции напряжений. Если обозначить три компонента вектора через X, Y, Z, то разложив зависимость (4,01) элементы тензора напряжений $\mathfrak{f}$ можно выразить в следующем виде (1):

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[[X, Y, Z] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix}
\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) & \left(-\frac{\partial Y}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial Z}{\partial x}\right) \\
\left(-\frac{\partial X}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) & \left(-\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \\
\left(-\frac{\partial X}{\partial z}\right) & \left(-\frac{\partial Y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)
\end{bmatrix} \qquad (4{,}02)
$$

Иначе говоря, с помощью трех введенных параметров-функций отдельные напряжения выражаются следующим образом:

$$
\sigma_x = \frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z};
$$

$$
\sigma_y = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial z}; \qquad \text{а)}
$$

$$
\sigma_z = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y};
$$

$$
\tau_{xy} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \tau_{yx} = -\frac{\partial X}{\partial y};
$$

$$
\tau_{xz} = -\frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \tau_{zx} = -\frac{\partial X}{\partial z}; \qquad \text{б)}
$$

$$
\tau_{xz} = -\frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial Y}{\partial z}. \qquad (4{,}03)
$$

Подставляя выражения (4,03) в три скалярных уравнения (3,02) уравнения равновесия (3,01), они идентично удовлетворяют им.

Из-за зависимостей равновесия $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и т. д. между тремя функциями напряжений существуют следующие зависимости:

$$
\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y};
$$

$$
\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y};
$$

$$
\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \qquad (4{,}04)
$$

Уравнения (4,04) можно написать в следующем упрощенном виде:

$$
\mathbf{rot}\,\mathbf{f} = 0. \qquad (4{,}05)
$$

5. Выражение важнейших зависимостей теории упругости через введенный параметр-вектор

5.1 Написание основных уравнений теории упругости

Совмещенное уравнение равновесия-совместимости теории упругости было уже приведено в формуле (3,11). Поскольку первый скалярный инвариант тензора напряжений с учетом введенного вектора пишется в форме

$$\sigma_0 = 2\,\mathrm{div}\,\mathbf{f} \tag{5,01}$$

сокращенное уравнение БЕЛЬТРАМИ (3,11) имеет следующий вид:

$$\Delta\,[\mathrm{div}\,\mathbf{f}] = 0. \tag{5,02}$$

Это уравнение совместно с уравнениями (4,04) и (4,05)

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{f} = 0 \tag{5,03}$$

определяет вектор $\mathbf{f}$.

Система скалярных уравнений, соответствующая (5,02) и (5,03), написывается в виде

$$\Delta\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0; \qquad a)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}; \qquad б)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \tag{5,04}$$

Одна из трех зависимостей (5,04 *б*) не является независимой, так как дифференцированием и подстановкой она выводима из двух остальных, следовательно для трех скалярных функций X, Y, Z имеем три независимых уравнения.

5.2 Написание напряжения на поверхности с любой нормалью

Разлагая тензор напряжения на специфический тензор и тензор отклонения, имеем:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{div}\,\mathbf{f} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{div}\,\mathbf{f} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{div}\,\mathbf{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial X}{\partial x} & -\dfrac{\partial X}{\partial y} & -\dfrac{\partial X}{\partial z} \\[2mm] -\dfrac{\partial Y}{\partial x} & -\dfrac{\partial Y}{\partial y} & -\dfrac{\partial Y}{\partial z} \\[2mm] -\dfrac{\partial Z}{\partial x} & -\dfrac{\partial Z}{\partial y} & -\dfrac{\partial Z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{5,05}$$

Из разложения видно, что вектор напряжений $\mathbf{p}_n$ на поверхности с любой нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ можно написать в виде:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \operatorname{div}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{f}, \tag{5,06}$$

где

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5,07}$$

Например, если $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$
и соответственно

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{i}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \mathbf{k}\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \mathbf{i}\,\sigma_x + \mathbf{j}\,\tau_{xy} + \mathbf{k}\,\tau_{xz}. \tag{5,08}$$

Выражение (5,08) соответствует нашим существующим знаниям (1, 6).

5.3 *Написание функций деформаций*

Для написания функций деформаций в геометрические уравнения (3,03) подставляются выражения напряжений (4,03):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{m}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \frac{m}{E}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{5,09}$$

и т. д.

Преобразуя это выражение, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-m}{E}\operatorname{div}\mathbf{f} - \frac{1+m}{E}\frac{\partial X}{\partial x} \tag{5,10}$$

и т. д.

После интегрирования выражений (5,10) получаются составляющие вектора перемещений:

$$u = \frac{1-m}{E}\int \operatorname{div}\mathbf{f}\,\mathrm{d}x - \frac{1+m}{E}f_x + C_x \tag{5,11}$$

и т. д.

При помощи составляющих вектор перемещений пишется в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \frac{1-m}{E}\int \operatorname{div}\mathbf{f}\,\mathbf{dr} - \frac{1+m}{E}\,\mathbf{f} + \mathbf{C}. \tag{5,12}$$

Здесь выражение $\mathbf{dr} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}x + \mathbf{j}\,\mathrm{d}y + \mathbf{k}\,\mathrm{d}z$ и постоянная интегрирования $\mathbf{C}$ определены связью, предусмотренной второй группой геометрических уравнений (3,03).

5.4 *Плоское напряженное состояние*

В случае задачи с двумя переменными разложение тензора напряжений $\mathbb{S}$ производится аналогично выражению (4,01), исключая ординаты в направлении z:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \left[[X, Y, 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial y} & -\frac{\partial Y}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6,01}$$

Следовательно, через вектор $\mathbf{f} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y$ аналогично описывается и плоская задача теории упругости с двумя переменными. В частном случае этот вектор может считаться и комплексным числом; по этому вопросу имеются весьма подробные данные в литературе (2, 3, 7, 8, 9, 11).

6. Выводы

В статье было показано решение пространственной задачи теории упругости с помощью трех функций напряжений, являющихся тремя скалярными ординатами вектора $\mathbf{f}$. В отличие от применяемых до сих пор систем функций напряжений, преимущество представленных функций заключается в том, что из них напряжения вычисляются вместо производных второго порядка, производными первого порядка, а при этом уравнения для определения искомого вектора являются более простыми. Вектор $\mathbf{f}$ удовлетворяет следующим двум уравнениям:

$$\Delta\,[\operatorname{div} \mathbf{f}] = 0,$$

$$\operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{f} = 0.$$

Первое из них выражает одновременно равновесие и совместимость. В случаях ортотропии и анизотропии только оператор Δ принимает другой вид. Так, например, в случае ортотропии:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{E_x}{E_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Второе уравнение выражает только равновесие (двойственность касательных напряжений), следовательно оно оказывается и в таких случаях неизменным.

Первое уравнение соответствует одному скалярному уравнению, а второе — трем скалярным уравнениям. Таким образом, имеются три скалярных уравнения, достаточные для определения трех скалярных ординат:

$$\Delta\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Любое уравнение из трех последних получается из двух остальных путем дифференцирования и интегрирования.

7. Библиография

[1] ФАЗЕКАШ, Ф.: Векторный анализ. Практические занятия по технической математике. Т. I—II—III. Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.

[2] ФЮЗИ, Й.: Новый метод исследования напряжений пристенных балок. Mélyépítéstudományi Szemle, год изд. XVI, № 2 (февр. 1966 г.) pp. 91—95

[3] FÜZY, J.: Analysis of Homogeneous Orthotropic Quadrangular Panels. Acta Technica Academiae Sc. Hungariae. Tomus 59 (1–2) pp. 11–20) (1967)

[4] KRÖNER, E.: Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen Elastizitätstheorie. Z. Phys. Band 139 (1954) S. 175–188

[5] KRÖNER, E.: Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen anisotropen Elastizitätstheorie. Z. Phys. Band 141 (1955) S. 386–398

[6] LOVE, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York. Dover Publications 1944.

[7] MILNE–THOMSON, L.M.: Plane Elastic Systems. Ergebnisse der angewandten Mathematik. Springer Verlag Berlin–Göttingen–Heidelberg (1960)

[8] MILNE–THOMSON, L.M.: Antiplane Elastic Systems. Ergebnisse der angewandten Mathematik. Springer-Verlag. Berlin–Göttingen–Heidelberg (1962)

[9] MUSHELISVILI, N.I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. II. Ed. Kroningen 1963. Noordhoff.

[10] NEUBER, H.: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. ZAMM, B. 14 (1934) Heft 4, S. 203–212

[11] SAWIN, G.N.: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. Verl. Techn. Berlin 1956

[12] SCHAEFER, H.: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. ZAMM B. 33 (1953) No. 10/11 S. 356–362

[13] SCHWANK, F.: Randwertprobleme. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1951).

[14] TIMOSHENKO, S.–GOODIER, S.N.: Theory of Elasticity. Mc.Graw-Hill Book Company New York–Toronto–London (1951)

[15] WEBER, C.: Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums. ZAMM B. 28 (1948) Heft 67/8 S. 193–199