О КРИТЕРИЯХ СПРАВЕДЛИВОСТИ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

О. ХАСПРА,

Научно-исследовательский институт водного хозяйства

(Поступило в печать: 4-го декабря 1964 г.)

В нижеследующем дается единый и простой вывод критерий справедливости уравнения Бернулли, для установившегося потока идеальной жидкости. В литературе [1—5] эти критерии совместно обычно не даются и их вывод часто производится по сложному скалярному пути вместо векторного.

С некоторыми отличиями в обозначениях, вариант — по Громеке — гидродинамического основного уравнения Эйлера для установившегося потока в потенциальном силовом поле идеальной жидкости известно в следующей форме [2—4]:

градиент

$$\left[U+\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}\right]=\bar{v}\times \operatorname{rot}\bar{v}, \tag{1}$$

где

U — потенциал силового поля T, действующего на жидкость, т. е.

$$T = -\text{град } U \tag{2}$$

p — распределение давления,

ϱ — постоянная плотность,

$\bar{v}$ — распределение скорости.

Выражение

$$U+\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}$$

определяет механическую энергию частицы жидкости единичной массы (удельная энергия в некоторой точке, положение которой определяется вектором $\bar{r}$).

Интегрируя по вектору $\bar{r}$ обе стороны уравнения по некоторой кривой (g) между точками 1 и 2 (рис. 1) получаем:

$$\left[U+\frac{p}{\varrho}+\frac{\bar{v}^2}{2}\right]_1^2 = (g)\int_1^2 \bar{v}\operatorname{rot}\bar{v}\,\mathrm{d}\bar{r}\,. \tag{3}$$

На левой стороне выражается разница между удельными энергиями частиц жидкости в точках 1 и 2. Эта разница по теории Бернулли об идеальной жидкости равняется нулю. Таким образом, если уравнение Бернулли может применяться для рассматриваемых точек, то правая сторона уравнения (3) должна равняться нулю:

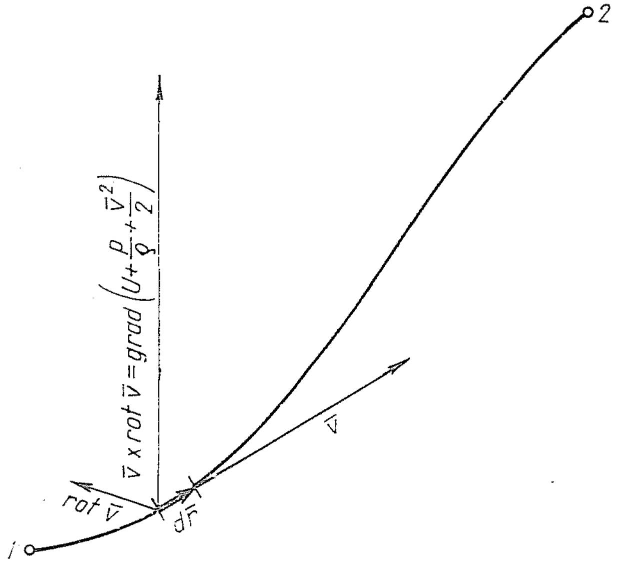

рис. 1

$$(g)\int_1^2 \bar{v}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}\,\mathrm{d}\bar{r} = 0\,. \tag{4}$$

Этот интеграл может равняться нулю по многим способам, однако, является обязательно нулю, если все смешанные произведения, представляющие собой его элементарные составляющие, равны нулю, то есть если по кривой (g) везде

$$\bar{v}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}\,\mathrm{d}\bar{r} = 0\,. \tag{5}$$

Ввиду того, что левая сторона уравнения (3) независима от направления интегрирования, правая сторона должна быть также независимой. Если между точками 1 и 2 удается найти единственную кривую, по которой правая сторона, то есть выражение (4), равно нулю, тогда оно и по любой кривой равняется нулю. Искать такую кривую наиболее целесообразно на основании уравнения (5), потому, что в этом случае доказана справедливость уравнения Бернулли не только для данных двух точек, а для любых двух точек, взятых по кривой. Легко доказать, что из уравнения (4) безусловно вытекает (5), то есть ограничением анализа на уравнение (5) мы не пропустили такие пары точек, между которыми уравнение (4) является справедливым.

Выражение на левой стороне уравнения (5) — как смешанное произведение — равно нулю тогда, если хотя бы один из его векторов равняется нулю, или если хотя бы одна векторная пара параллельна. Уравнение Бернулли справедливо в следующих случаях (и в их комбинациях):

1. Если $\bar{v}=0$, то есть в статическом состоянии между любыми двумя точками. (Этот случай тривиален).
2. Если $\operatorname{rot} \bar{v}=0$, то есть между любыми двумя точками в безвихревом (потенциальном) потоке.
3. Если $d\bar{r}=0$, то есть если рассматриваемые две точки совпадают. Поток может быть любого характера. (Этот случай тривиален).
4. Если $\bar{v} \parallel \operatorname{rot} \bar{v}$, то есть между двумя точками в так называемом вихревом потоке.
5. Если $\bar{v} \parallel d\bar{r}$, то есть рассматриваемые две точки лежат на одной и той же линии тока. Поток, впрочем, может быть любого характера.
6. Если $\operatorname{rot} \bar{v} \parallel d\bar{r}$, то есть, если рассматриваемые две точки лежат на одной и той же вихревой линии. Поток, впрочем, может быть любого характера.

Легко убедиться, что в случае реальной жидкости или неустановившегося потока уравнение Бернулли применяется в тех же шести случаях, но, конечно, дополнено членами потери или инерции.

Отмечаем еще, что по более обыкновенной методике, принятой в гидротехнической литературе, уравнение (3) в поле силы тяжести приобретает вид

$$\left[z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right]_1^2=\frac{1}{g}\int_1^2 \bar{v}\operatorname{rot}\bar{v}\, d\bar{r} \tag{6}$$

где: g — постоянная величина силы тяжести,

γ — постоянный удельный вес жидкости,

z — геодетическая высота рассматриваемых точек, а целая левая сторона выражает изменение энергии частицы воды единочного веса. Это однако не изменяет дальнейший ход рассмотрения.

Резюме

Критерии справедливости уравнения Бернулли для идеальной жидкости наиболее наглядно определяются и перечисляются на основании уравнения (3), полученного путем интегрирования уравнения Громеки (1). Левая сторона этого уравнения выражает изменение удельной энергии, которое по теории Бернулли равняется нулю. То есть правая сторона также равна нулю (4). Если (4) между 1 и 2 равняется нулю, тогда существует путь, по которому (5) также равно нулю. Являясь смешанным произведением, оно в шести основных случаях и в их комбинациях равняется нулю:

1. $\bar{v}=0$, 2. $\operatorname{rot}\bar{v}=0$, 3. $d\bar{r}=0$,

4. $\bar{v} \parallel \operatorname{rot}\bar{v}$, 5. $\bar{v} \parallel d\bar{r}$, 6. $\operatorname{rot}\bar{v} \parallel d\bar{r}$.

То есть в этих случаях уравнение Бернулли справедливо.

Литература

[1] Агроскин—Дмитриев—Пикалов: Гидравлика. Учпедгиз, Будапешт, 1952, стр. 81—84.

[2] Грубер—Блахо: Механика жидкостей. Учпедгиз, Будапешт, 1956, стр. 69—74.

[3] Лойцянский, Л. Г.: Механика жидкостей и газов. Издат. Акад. наук Венгрии, Будапешт, 1956, стр. 143—145.

[4] Немет, Э.: Гидромеханика. Учпедгиз, Будапешт, 1963, стр. 179—186.

[5] Rouse–Hunter: Advanced Mechanics of Fluids, Wiley and Sons, New York, 1963. p. 62.