

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

В. А. Трубин

Кафедра физика твердого тела,
Будапештский университет им. Этвеша Лоранда, Н—1445, Будапешт

Поступило 17 февраля 1988
Представлено проф. д-ром Р. Тушак

Abstract

In the analysis of measured spectra in physical experiments, smearing effects due to instrument resolution are present. The initial data incorrect-resolved problems obtained by measurements, contain statistical errors. A regularized Kalman filter has been produced from the Bayes estimation theory. A regularized Kalman filter takes converges to a stable output is suggested.

Регуляризованный фильтр Калмана относится к специализированным средствам вычислительной техники и предназначен для получения оценок сложных технических систем для решения задач восстановления сигналов и может быть использован в информационно-измерительных системах для рентгенодифракционных исследований.

Известен фильтр Калмана [1], содержащий вычислитель коэффициента усиления $K(t)$ и произведения $K(t)\varepsilon(t)$, два вычислителя матричного произведения, интегратор, на выходе которого получается искомая оценка $\hat{x}(t)$, вычитатель и сумматор.

Недостаток этого фильтра — расходимость, которая проявляется из-за не точности задания процесса моделирующего сообщения и наблюдения, отсутствия полной информации о реальной физической задаче и т.д. При этом коэффициент усиления фильтра $K(t)$ асимптотически стремится к нулю. Фильтр не работает и тогда, когда на его вход поступает многомерный сигнал, не имеющий шума хотя бы в одной составляющей.

Вследствие этого для фильтрации таких сигналов фильтр Калмана применять нельзя.

Известен также фильтр Калмана [2]. Недостатком устройства является низкая точность и возможность потери устойчивости из-за ошибок округления и не учета фоновой составляющей входного сигнала.

Целью разработанного фильтра является повышение точности и устойчивости (сходимости) регуляризованного фильтра Калмана.

Поставленная цель достигается тем, что в регуляризованный фильтр Калмана [2] дополнительно введен источник опорного сигнала, повторитель с зоной нечувствительности, функциональный преобразователь.

На чертеже (Рис. 1) приведена структурная схема регуляризованного фильтра Калмана.

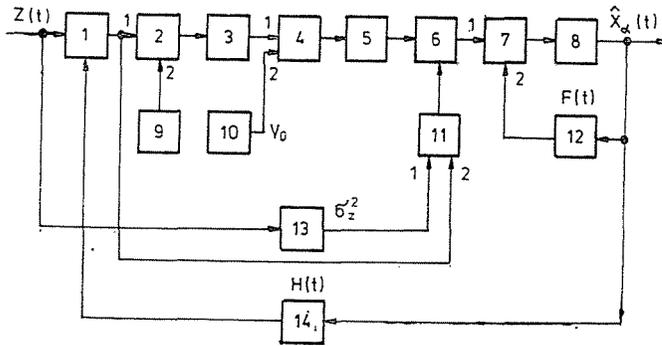


Рис. 1. Структурная схема регуляризованного фильтра Калмана

Устройство содержит: вычитатель 1, первый сумматор 2, усилитель 3, повторитель с зоной нечувствительности 4, функциональный преобразователь 5, коммутатор 6, второй сумматор 7, интегратор 8, генератор 9 стационарного случайного процесса, источник опорного сигнала 10, блок сравнения 11, первый матричный множитель 12, блок определения дисперсии шума входного сигнала 13, второй матричный множитель 14.

Регуляризованный фильтр Калмана работает следующим образом. На второй вход вычитателя 1 поступает многомерный положительный сигнал $z(t)$, на первый вход сигнал $H(t)\hat{x}_\alpha(t)$ с выхода второго матричного множителя 14. На выходе вычитателя 1 образуется невязка $E(t)=[z(t)-H(t)\hat{x}_\alpha(t)]$. К невязке добавляется случайный процесс $\eta(t)$ от генератора 9 стационарного случайного процесса. В усилителе 3 происходит усиление сигнала с коэффициентом усиления $K_x(t)$. С выхода усилителя 3 сигнал с коэффициентом усиления $K_x(t)$ поступает на вход повторителя с зоной нечувствительности 4, на выходе которого получается сигнал, коэффициент усиления которого определяется по формуле:

$$K_x(t) = V_x(t)H^T(t)[\psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1} \quad (1)$$

Повторитель 4 с зоной нечувствительности выдает сигнал на выходе только в том случае, когда выполняется условие:

$$U_{\text{вых}} = \begin{cases} U_{\text{вх}}, & \text{при } U_{\text{вх}} > U_0 \\ 0, & \text{при } U_{\text{вх}} < U_0 \end{cases} \quad (2)$$

На чертеже (Рис. 2) приведена структурная схема повторителя с зоной нечувствительности. На второй вход повторителя 4 с зоной нечувствительности поступает сигнал U_0 от источника опорного сигнала. После выполнения условия

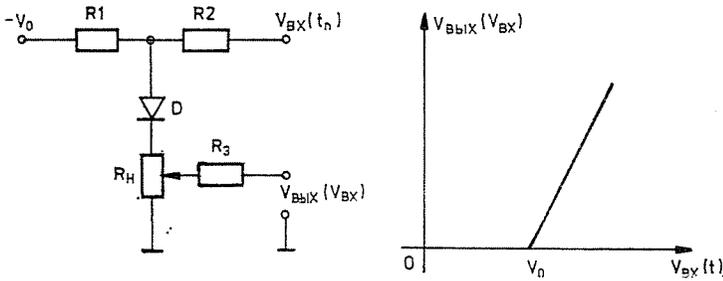


Рис. 2. Структурная схема повторителя с зоной нечувствительности

(2) осуществляется отсечение фоновой составляющей, которая присутствует во входном сигнале, т. е. происходит ограничение коэффициента усиления усилителя 3 снизу. С выхода повторителя 4 с зоной нечувствительности сигнал поступает на функциональный преобразователь 5, на выходе которого получается сигнал, коэффициент которого определяется по формуле

$$K_{\alpha 1}(t) = K_{\alpha}(t) \exp Ct \quad \text{где} \quad 0 < C < 10 \quad (3)$$

В качестве функционального преобразователя экспоненты можно выбрать функциональный преобразователь информации с экспоненциальной разверткой, широко описанный в литературе [3].

За счет введения функционального преобразователя 5 происходит ограничение фильтра вследствие искусственного старения ошибок измерения.

Входной сигнал $z(t)$ поступает на вход блока определения дисперсии 13. С выхода блока определения дисперсии 13 сигнал, пропорциональный величине дисперсии шума входного сигнала σ_z^2 поступает на первый вход блока сравнения 11, на второй вход блока сравнения 11 поступает сигнал, пропорциональный невязке $E(t)$. Если в процессе решения абсолютная величина невязки решаемого уравнения $E(t)$ на выходе вычитателя 1 оказывается больше σ_z^2 , то с выхода блока сравнения 11 сигнал поступает на замыкание коммутатора б, выход функционального преобразователя 5 соединяется с первым входом второго сумматора 7. При этом рассогласование между $z(t)$ и $\hat{x}_{\alpha}(t)H(t)$ обрабатывается с малой постоянной времени и величина невязки на выходе первого сумматора 2 уменьшается. Как только невязка становится меньше σ_z^2 , блок сравнения 11 посылает сигнал на размыкание цепи на управляющий вход коммутатора б, при этом первый вход второго сумматора 7 замыкается на землю. Таким образом, в процессе решения задачи фильтрации, коммутатор б то соединяет первый вход второго сумматора 7 с выходом функционального преобразователя 5 (если невязка больше σ_z^2), то замыкает его на землю (если невязка меньше σ_z^2). При этом весь участок решения разбивается на ряд интервалов в общем случае неравной длительности с постоянным значением решения в виде кусочно-постоянной функции времени. Когда первый вход второго

сумматора 7 соединяется с выходом функционального преобразователя 5 (если невязка больше σ_z^2), то на него поступает сигнал $K_{z1}(t)E_z(t)$ с отсеченным фоном и ограничением памяти поступает на первый вход второго сумматора 7, на второй вход которого подается сигнал предсказания $F(t)\hat{x}_z(t)$ от первого множителя 12, где $F(t)$ — матрица, реализуемая первым матричным множителем, $\hat{x}_z(t)$ — выходной сигнал устройства. С выхода второго сумматора 7 сигнал $[F(t)\hat{x}_z(t) + K_{z1}(t)E_z(t)]$ поступает на интегратор 9, на выходе которого образуется искомая оценка в соответствии с уравнением

$$\begin{aligned} \hat{x}_z(t) &= \int_{t_1}^{t_0} [F(t)\hat{x}_z(t) + K_{z1}(t)E_z(t)] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_0} \{[F(t)\hat{x}_z(t) + V_{\tilde{x}}(t)H^T(t)][\psi_v + \alpha E + U_0]^{-1}[E(t) + \eta(t)]\} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

В частном случае $t_1=0$ и входной сигнал $z(t)$ является положительным, а сам процесс фильтрации ограничен во времени величиной t_0 .

В устройстве для повышения точности, устойчивости, расходимости фильтра Калмана применен метод ограничения усиления фильтра и метод ограничения памяти с использованием искусственного старения ошибок измерения.

Основной алгоритм работы устройства выглядит следующим образом:

1. Модель сообщения

$$\dot{\tilde{x}}_z(t) = F(t)x_z(t) + G(t)w(t) \quad (5)$$

2. Модель наблюдения

$$z(t) = H(t)x_z(t) + v(t) \quad (6)$$

$$r(t) = H(t)x_z(t)$$

3. Алгоритм фильтрации

$$\dot{\hat{x}}_z(t) = F(t)\hat{x}_z(t) + K_{z1}(t)[z(t) - H(t)\hat{x}_z(t)]. \quad (7)$$

4. Вычисление коэффициента усиления

$$\begin{aligned} K_{z1}(t) &= V_{\tilde{x}}(t)H^T(t)[\psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1} \exp ct \\ E_z(t) &= E(t) + \eta(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$U_0 = \text{const}$ — опорный сигнал

$\tau = \text{const}$ — время экспозиции в точке

α — параметр регуляризации.

5. Вычисление дисперсии ошибки

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{x}}(t) &= F(t)V_{\tilde{x}}(t) + V_{\tilde{x}}(t)F^T(t) - V_{\tilde{x}}(t)H^T(t) \times \\ &\times [\psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1}H(t)V_{\tilde{x}}(t) + G(t)\psi_w(t)G^T(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Параметр α определяется из условия невязки

$$\|z(t) - H(t)\hat{x}_z(t)\|_{L_2}^2 = \sigma_z^2 \quad (10)$$

Отклонение фактической модели от расчетной вызывает увеличение σ_z^2 , что несколько компенсирует дополнительную ошибку фильтрации. Однако $[z(t) - H(t)\hat{x}_z(t)]$ воздействует на оценку $\hat{x}_z(t)$ с весом равным усилению фильтра $K_{z1}(t)$, которое в процессе фильтрации быстро стремится к нулю. Поэтому оценка $\hat{x}_z(t)$ все «слабее» зависит от результатов, поступающих наблюдений и растущая невязка наблюдений при жестко выбранном параметре регуляризации на неё не влияет. Поэтому тот метод повышения стабильности фильтра, который мы принимаем в устройстве связан с ограничением усиления фильтра снизу, то есть с отсечением фона, который всегда присутствует во входном сигнале. Элементы матрицы $K_{z1}(t)$ мы ограничиваем снизу за счет введения повторителя с зоной нечувствительности и источника опорного сигнала.

Ограничение памяти в фильтрах Калмана необходимо в двух случаях:

1. Для устранения расходимости решения, возникающего при несовпадении гипотезы о полезном сигнале с полезным сигналом (в частности, когда степень полинома, принятого в качестве гипотезы, ниже степени полинома, описывающего полезный сигнал).

2. Для устранения неустойчивости, которая возникает из-за вырождения корреляционных матриц ошибок оценок при длительной работе алгоритма.

Для ограничения памяти фильтра Калмана предлагается следующий способ — введение искусственного старения ошибок измерений за счет введения функционального преобразователя, где происходит преобразование вида (3).

Алгоритмы многомерных фильтров обладают двумя особенностями:

1. Элементы весовых матриц с течением времени уменьшаются и могут стать соизмеримыми с ошибками счета.

2. Алгоритмы содержат обратные матрицы $[\Psi_v(t)]^{-1}$. Это приводит не только к значительному отклонению машинного решения: разностные уравнения, описывающие фильтры с растущей памятью устойчивы при вырождении этих матриц, а в случае плохой обусловленности обратных матриц задача оказывается некорректной.

Матрица $K(t)$ известна приближенно, т.к. она измеряется и вычисляется в процессе работы алгоритма, а следовательно, содержит ошибки счета.

Неточность этой матрицы порождает ошибки в решении, т.к. изменения в элементах матрицы $[\Psi_v(t)]^{-1}$ влечет за собой изменение в элементах обратной матрицы. Эти ошибки будут сколь угодно велики, в случае, если матрица $\Psi_v(t)$ плохо обусловлена, а следовательно, задача будет мало устойчива (некорректна), так как её решение сильно изменяется при малых изменениях элементов матрицы. Матрица $K_{z1}(t)$ для первого условия становится произвольной и диагональные элементы могут оказаться отрицательными, вследствие

чего уравнение фильтрации (7) теряет устойчивость. Этот момент наступает тем быстрее, чем меньше разрядность специализированного вычислительного устройства, чем больше частота счета, чем более сложный алгоритм и чем больше точность неискаженной информации. Неустойчивость такого рода присуща как многомерным, так и одномерным фильтрам.

Для устранения этого эффекта в устройстве введен повторитель с зоной нечувствительности δ , позволяющий ограничивать память фильтра за счет введения диффузного члена U_0 в корреляционную матрицу $K_x(t)$.

Следует отметить, что генератор θ является генератором стационарного случайного процесса $\eta_x(t)$ с математическим ожиданием $M=0$ и дисперсией $D=1$.

Основные обозначения в формулах (1) ÷ (8):

$Z(t)$ — M — мерный вектор наблюдения, координаты которого являются линейной комбинацией вектора состояния

$X(t)$ динамической системы $ДС$ и аддитивного вектора шумов $V(t)$;

$H(t)$ — матрица коэффициентов размерности $(M \times N)$;

$V(t)$ — M — мерный вектор шумов измерений исключающий результат наблюдения за поведением $ДС$ в пространстве состояний;

$X(t)$ — N -мерный вектор состояния динамической системы $ДС$, представляющий собой совокупность переменных состояний $x_i(t)$;

$W(t)$ — μ — мерный вектор белого шума (шум состояния) $F(t)$ и $G(t)$ — матрицы коэффициентов, определяющие динамику системы и входной сигнал размерности $(N \times N)$ и $(N \times M)$ соответственно.

Векторные процессы $W(t)$ и $V(t)$ представляют собой гауссовские белые шумы с равными нулю средними значениями и известными ковариационными (корреляционными) матрицами:

$$\begin{cases} M\{\vec{w}(t)\} = 0; M\{w(t)w'(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau) \\ M\{\vec{v}(t)\} = 0; M\{\vec{v}(t)\vec{v}'(\tau)\} = \vec{R}(t)\delta(t-\tau) \end{cases} \quad (11)$$

где $\vec{Q}(t)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица интенсивности белого шума $\vec{V}(t)$. В соответствии с общей постановкой задачи фильтрации Калмана матрица интенсивности шумов измерения $R(t)$ должна быть неособенной и, следовательно, должна существовать обратная матрица $R^{-1}(t)$. Векторные процессы $W(t)$ и $V(t)$ являются независимыми гауссовскими случайными процессами:

$$M\{\vec{w}(t)\vec{v}'(\tau)\} = 0 \quad (12)$$

Положительная определенность матрицы $R(t)$ означает, что ни одна из составляющих случайного вектора состояния не может быть точно измерена. Аналогично неотрицательность определенности матрица $Q(t)$ означает, что $ДС$ может быть свободной $\vec{G}(t)=0$ или находится под воздействием векторного процесса $W(t)$.

Для подтверждения существования и сходимости алгоритма реализованного в данном устройстве, докажем следующее положение.

Для линейной оценки $\hat{x}(t)$, удовлетворяющей критерию минимума среднеквадратической ошибки задачи фильтрации существует последовательность линейных оценок $\hat{x}_\alpha(t)$ и $\hat{x}(t)$ в смысле

$$|M[(z, \hat{x}(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2] - M[(z, \hat{x}(t) - \hat{x}(t))^2]| \rightarrow 0 \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (13)$$

Оценки $\hat{x}_\alpha(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{\hat{x}}_\alpha(t) = F(t)\hat{x}_\alpha(t) + V_{\hat{x}}(t)H^T(t)[\psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1}[z(t) - H(t)\hat{x}_\alpha(t)]$$

где $\hat{x}_\alpha(0) = 0$, а $V_{\hat{x}}(t)$ — ковариация ошибки оценки, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{x}}(t) = & F(t)V_{\hat{x}}(t) + V_{\hat{x}}(t)F^T(t) - V_{\hat{x}}(t)H^T(t)[\psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1} \times \\ & \times H(t)V_{\hat{x}}(t) + G(t)\psi_w(t)G^T(t). \end{aligned}$$

Доказательство

Решение задачи фильтрации находится по формулам (3) и (4), где $V(t)$ — белый гауссовский шум с нулевым средним с ковариацией

$$M[V(t), V^T(\tau)] = \alpha_1 I \delta(t - \tau), \quad \text{где } \alpha_1 = \psi_v(t) + \alpha E + U_0$$

эквивалентно решению уравнения Винера-Хопфа

$$K_{xr}(t, \sigma) = \int_0^t h_{x1}(t, \tau) K_r(\tau, \sigma) d\tau + \alpha_1 h_{x1}(t, \sigma) \quad (14)$$

Решение этого интегрального уравнения имеет вид:

$$h_{x1}(t, \tau) = \psi(\tau, t) K(\tau) \quad (15)$$

где $K(\tau) = V_{\hat{x}}(\tau)H^T(\tau)\alpha_1^{-1}$. Матрица $\Psi(\tau, t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{\Psi}(\tau, t) = [F(\tau) - K(\tau)H(\tau)]\Psi(\tau, t) \quad (16)$$

с начальным условием $\Psi(t, t) = I$. Матрица $V_{\hat{x}}(\tau)$ — решение уравнения Рикatti.

Запишем выражение

$$\hat{x}_\alpha(t) = \int_0^t h_{x1}(t, \tau) r(\tau) d\tau = \int_0^t \Psi(\tau, t) K(\tau) r(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Используя свойства матрицы $\Psi(\tau, t)$, получаем для $\hat{x}_z(t)$ уравнение:

$$\dot{\hat{x}}_z(t) = F(t)\hat{x}_z(t) + V_{\bar{x}}(t)H^T(t)[\Psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1}[z(t) - H(t)\hat{x}_z(t)] \quad (18)$$

с начальным условием $x_z(0) = 0$.

Докажем теперь сходимость оценки регуляризованного фильтра Калмана.

Допустим, что ковариационная функция помехи нам априори неизвестна. Очевидно, что если найти некоторую «наихудшую» помеху и построить для неё оптимальный фильтр, то этот фильтр обеспечит сходимость оценки полезного сигнала (хотя и не оптимальную) и для других помех.

При регулярном полезном сигнале $x(t) = \varphi(t)x(t_0)$ ($Q(t) = 0$) такой наименее худшей помехой в широком классе помех является белый шум. Это вытекает из следующего положения. Пусть $\text{cov}\{V(t)V(\tau)\} = \Psi_v(t)\delta_D(t-\tau)$ — ковариационная матрица r — мерного вектора помехи $V(t)$ и пусть существует такая положительно определенная $[r \times r]$ матрица $C(t)$, что начиная с некоторого момента $T > t_0$ выполняется условие с учетом введения параметра регуляризации и ограничения коэффициента усиления усилителя снизу

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi^T(\tau) H^T(\tau) \{[\Psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1} \delta_D(t-\tau)\} d\tau \right|_{ij} \cong \\ \cong |\varphi^T(t) H^T(\tau) C(t)|_{ij} \quad (T \cong t < \infty) \quad (19)$$

для всех элементов матриц ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, r$) Тогда оптимальный фильтр, рассчитанный для помехи — белого шума $w(t)$ с ковариационной матрицей $2C(t)\delta(t-\tau)$ и обеспечивающей среднеквадратическую сходимость оценки к полезному сигналу, обеспечивает эту сходимость в присутствии помехи $V(t)$. Идея доказательства этого положения состоит в следующем.

В случае регуляризованного фильтра Калмана и ограничением коэффициента усиления усилителя снизу, ошибка $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{x}}_z(t) = F(t)\tilde{x}_z(t) - V_{\bar{x}}(t)H^T(t)[\Psi_v(t) + \alpha E + U_0]^{-1}[V(t) + H(t)\tilde{x}_z(t)] \quad (20)$$

если $V(t)$ — произвольная аддитивная помеха.

На основании (17) выводятся дифференциальные уравнения дисперсии ошибки $\sigma_{z(t)}^2 = M[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)]$ для $V(t) = W(t)$ и для помехи $V(t)$ с произвольной ковариационной матрицей $\text{cov}\{v(t)v(\tau)\}$. При заданных коэффициентах $K(t)$ эти уравнения оказываются линейными относительно $\sigma_{z(t)}^2$ и неоднородными. Они имеют одинаковые собственные функции и различаются только возмущающимися членами, не содержащими $\sigma_{z(t)}^2$. В силу условия (19) возмущающие члены при $v(t) = w(t)$ для $t > T$ всегда не меньше соответствующих членов во втором уравнении. Поэтому асимптотическая сходимость дисперсии ошибки к нулю при $V(t) = W(t)$ влечет за собой такую же сходимость и для любого $V(t)$ с ковариационной функцией $\text{cov}\{v(t)v(\tau)\}$, удовлетворяющей (19).

Литература

1. SAGE, A. P. and SELSA, J. L. Estimation theory with applications and communications and control. New York McGraw-Hill, pp. 289, 334, 403, 1971.
2. Трубин В. А., Батищев В. И. Регуляризованный фильтр Калмана. А. С. 1317652 (СССР).
Опубл. в Б. И. № 7, 1988.
3. Смоллов В. Б. Функциональные преобразователи информации Л. Энергоиздат, 1981.

Slava TRUBIN H-1445 Budapest, POB 323