

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА В РЕНТГЕНОДИФРАКЦИОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В. А. Трубин

Кафедра физики твердого тела,
Будапештский университет им Этвеша Лоранда, Н—1445, Будапешт.

Поступило 17 февраля 1988
Представлено проф. д-ром Р. Тушак

Abstract

The application of regularized digital Kalman filter for smoothing anomalous omitting in X-ray diffraction-measuring systems is studied. The PROBLEM of determination of the fine structure polycrystals from X-ray graphic investigations is a "reciprocal" one. The initial data incorrecr-resolved problems obtained by measurements, contain statistical errors. The system for automation of X-ray graphic investigations was made in CAMAC STANDART. This system has regularized digital Kalman filter.

Регуляризованный фильтр Калмана в вычислительной технике может быть использован в специализированных аналоговых и гибридных устройствах для получения дискретных оценок сложных технических систем, для восстановления сигналов и может быть использован в информационно-измерительных системах для рентгенодифракционных и спектрометрических исследований.

Известен фильтр Калмана—Бьюси [1], обеспечивающий получение оценок в линейном случае при невырожденности корреляционной матрицы погрешностей измерения и других ограничениях.

Однако этот фильтр работает только при соответствии априорной плотности распределения, плотности распределения, реализующейся в конкретном эксперименте.

Наиболее близким к разработанному фильтру является дискретный фильтр Калмана [2], содержащий вычислитель коэффициента усиления $K(t_n)$ и произведения $K(t_n)E(t_n)$, два вычислителя матричного произведения, блок задержки, вычитатель, сумматор, на выходе которого получается искомая оценка.

Недостаток известного дискретного фильтра Калмана — расходимость, которая проявляется из-за неточности задания процесса, моделирующего сообщение и наблюдение, отсутствие полной информации о реальной физической задаче. При этом коэффициент усиления фильтра $K(t_n)$ асимптотически стремится к нулю. Фильтр не работает и тогда, когда на его вход поступает многомерный сигнал, не имеющий шума, хотя бы в одной составляющей. Вследствие этого для фильтрации таких сигналов фильтр Калмана применять нельзя.

Целью разработанного регуляризованного фильтра является повышение точности фильтрации.

Поставленная цель достигается тем, что в дискретный фильтр, содержащий вычислитель коэффициента усиления $K(t_n)$ и произведения $K(t_n)E(t_n)$, два матричных умножителя, блок задержки, вычитатель, первый сумматор дополнительно введены генератор стационарного случайного процесса, второй сумматор, масштабный блок, повторитель с зоной нечувствительности, источник опорного сигнала.

На чертеже (Рис. 1) приведена структурная схема регуляризованного дискретного фильтра Калмана.

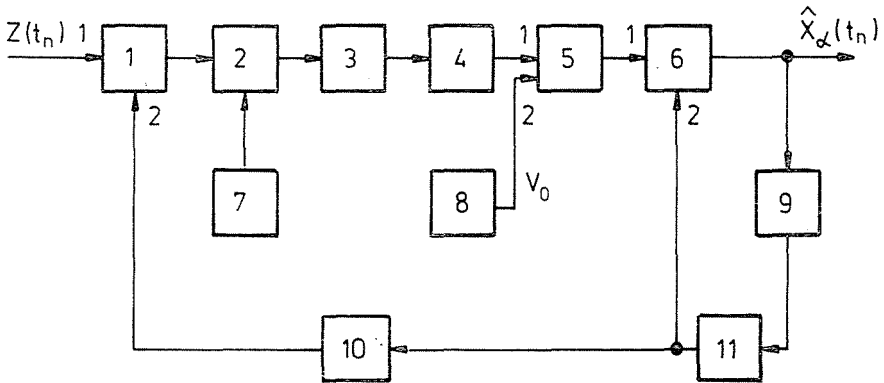


Рис. 1. Структурная схема регуляризованного дискретного фильтра Калмана

Устройство содержит вычитатель 1, второй сумматор 2, усилитель 3, масштабный блок 4, повторитель с зоной нечувствительности 5, первый сумматор 6, генератор 7 стационарного случайного процесса $\eta(t_n)$ интенсивностью $E_x(t_n)$ источник опорного сигнала 8, блок задержки 9, первый матричный умножитель 10, второй матричный умножитель 11.

Фильтр работает следующим образом. На информационный вход вычитателя 1 поступает дискретный сигнал $z(t_n)$, на управляющий вход поступает сигнал $z_x(t_n/t_{n-1})$ от первого матричного умножителя 10. На выходе вычитателя 1 образуется невязка $E(t_n)$. В заданные составляющие невязки на сумматор 2 добавляется стационарный случайный процесс от генератора 7. В усилителе 3 происходит усиление сигнала с коэффициентом усиления $K_x(t_n)$, который находится по формуле

$$K_x(t_n) = V_x(t_n) H^T(t_n) [V_v(t_n) + \alpha E]^{-1} \quad (1)$$

При фильтрации многомерного сигнала по Калману большое влияние на неустойчивую работу фильтра оказывают ошибки округления. В этом случае лучше вычислять квадратный корень из дисперсии, чем саму дисперсию, потому что число необходимых операций при счете сокращается в два раза.

Рассматривая этот способ предположим, что шум модели равен нулю;

неустойчивость, как правило, возникает при малом шуме модели, поэтому наше предположение не является ограничительным.

В дискретном времени уравнение для ковариационной матрицы ошибок оценивания при $V_w(t_n)=0$ записывается в виде:

$$V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1}) = \varphi(t_n, t_{n-1})V_{\bar{x}}(t_n)\varphi(t_n, t_{n-1}) \quad (2)$$

$$V_{\bar{x}}(t_n) = [I - K(t_n)H(t_n)]V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1}). \quad (3)$$

Легко показать прямой подстановкой, что корень из матрицы ковариаций равен

$$[V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1})]^{1/2} = \varphi(t_n/t_{n-1})[V_{\bar{x}}(t_n)]^{1/2} \quad (4)$$

$$[V_{\bar{x}}(t_n)]^{1/2} = [V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1})]^{1/2}(I - \{[V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1})]^{1/2}\}^T H(t_n)) \times \\ \times (\{[V_v(t_n) + H^T(t_n)V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1})H(t_n)]^{1/2}\}^{-T} \{V_v(t_n) + H^T(t_n)[V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1})H(t_n)]^{1/2} + \\ + [V_v(t_n)]^{1/2}\}^{-1} H^T(t_n)[V_{\bar{x}}(t_n/t_{n-1})]^{1/2}) \quad (5)$$

где используется нижняя матрица корней из дисперсий. Подобные меры предотвращают расходимость фильтра, повышают его точность, сохраняя при этом свойства оптимальности регуляризованного фильтра, накладывают ограничения на выбор параметра регуляризации α .

Коэффициент усиления $K_x(t_n)$ масштабного блока 4 находится в данном случае по формуле

$$K_{z1}(t_n) = \sqrt{V_{\bar{x}}(t_n)} H^T(t_n)[V_v(t_n) + \alpha E]^{-1}. \quad (6)$$

После масштабного блока 4 сигнал поступает на первый вход повторителя с зоной нечувствительности 5, на второй вход которого поступает сигнал U_0 от источника 8 опорного сигнала, повторитель с зоной нечувствительности выдает сигнал на выходе только в том случае, когда выполняется условие

$$U_{\text{вых}} = \begin{cases} U_{\text{вх}} & \text{при } U_{\text{вх}} > U_0 \\ 0 & \text{при } U_{\text{вх}} < U_0. \end{cases}$$

Тем самым осуществляется отсечение фоновой составляющей, которая присутствует во входном сигнале, то есть происходит ограничение коэффициента усиления масштабного блока 4 снизу, что обеспечивает сходимость процесса фильтрации. На черетее (Рис. 2) приведена структурная схема повторителя с зоной нечувствительности.

В повторителе с зоной нечувствительности 5 происходит изменение коэффициента усиления сигнала $K_{z1}(t_n)$, который находится по формуле

$$K_{z2}(t_n) = \sqrt{V_{\bar{x}}(t_n)} H^T(t_n)[V_v(t_n) + \alpha E + U_0]^{-1}. \quad (7)$$

С выхода повторителя с зоной нечувствительности сигнал $K_{z2}(t_n)E_x(t_n)$ с отсеченным фоном и сниженными ошибками округления за счет введения $\sqrt{V_{\bar{x}}(t_n)}$ поступает на первый вход первого сумматора 6, на второй вход которого пода-

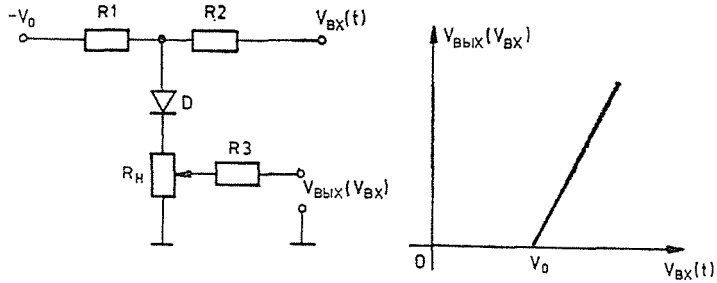


Рис. 2. Структурная схема повторителя с зоной нечувствительности

ется сигнал коррекции. На выходе второго сумматора 2 образуется сигнал

$$E_x(t_n) = E(t_n) + \eta(t_n) \quad (8)$$

На выходе первого сумматора 6 образуется искомая оценка $\hat{x}_x(t_n)$, которая через блок задержки 9 поступает в виде сигнала предыдущей оценки $\hat{x}_x(t_{n-1})$ на второй матричный умножитель 11, с выхода которого на вход первого матричного умножителя 10 поступает сигнал предсказания $\hat{x}_x(t_n/t_{n-1})$ с выхода которого поступает сигнал $\hat{z}_x(t_n/t_{n-1})$ на второй вход вычитателя 1.

Алгоритм функционирования предлагаемого фильтра будет иметь следующий вид:

1. Модель сообщения

$$x(t_{n+1}) = \varphi(t_{n+1}, t_n)x(t_n) + \Gamma(t_n)w(t_n). \quad (9)$$

2. Модель наблюдений

$$z(t_n) = H(t_n)x(t_n) + V(t_n). \quad (10)$$

3. Алгоритм фильтрации

$$\hat{x}_x(t_n) = \varphi(t_n, t_{n-1})\hat{x}_x(t_{n-1}) + K_{x2}(t_n)[z(t_n) - H(t_n)\varphi(t_n, t_{n-1})\hat{x}_x(t_{n-1})] \quad (11)$$

Применение регуляризованного дискретного фильтра Калмана повышает точность фильтрации поскольку отсутствует расхожимость искомым оценкам.

Ограничение памяти в фильтрах Калмана при детерминированном полезном сигнале, т. е. если эти фильтры являются фильтрами с растущей памятью необходимо в двух случаях:

1. Для устранения расхожимости решения, возникающей при несовпадении гипотезы о полезном сигнале с полезным сигналом (в частности, когда степень полинома, принятого в качестве гипотезы, ниже степени полинома, описывающего полезный сигнал).

2. Для устранения неустойчивости, которая возникает из-за вырождения корреляционных матриц ошибок оценок при длительной работе алгоритма. Параметр α в формулах (6), (7) определяется из условия невязки

$$\|z(t_n) - H(t_n)\varphi(t_n, t_{n-1})\hat{x}_x(t_{n-1})\|_{L_2} = \sigma_{z(t_n)}^2. \quad (12)$$

Отклонение фактической модели от расчетной вызывает увеличение $\sigma_{z(t)}^2$, что несколько компенсирует дополнительную ошибку фильтрации. Однако $[z(t_n) = H(t_n)\varphi(t_n, t_{n-1})\hat{x}_z(t_{n-1})]$ воздействует на оценку $\hat{x}_z(t_n)$ с весом равным усилению фильтра $K_{z1}(t_n)$, которое в процессе фильтрации быстро стремится к нулю. Поэтому оценка $\hat{x}_z(t_n)$ все «слабее» зависит от результатов поступающих наблюдений и растущая невязка наблюдений при жестко выбранном параметре регуляризации на неё не влияет. Поэтому этот метод повышения стабильности фильтра, который мы принимаем в устройстве, связан с ограничением усиления фильтра снизу, т. е. с отсечением фона, который всегда присутствует во входном сигнале. Элементы матрицы $K_{z1}(t_n)$ мы ограничиваем снизу за счет введения повторителя с зоной нечувствительности и источника опорного сигнала. U_0 .

Алгоритмы многомерных фильтров обладают двумя особенностями:

1. Элементы весовых матриц с течением времени уменьшаются и могут стать соизмеримыми с ошибками счета.

2. Алгоритмы содержат обратные матрицы $[V_v(t_n)]^{-1}$. Это приводит не только к значительному отклонению машинного решения: разностные уравнения, описывающие фильтры с растущей памятью устойчивы при вырождении этих матриц, а в случае плохой обусловленности обратных матриц задача оказывается некорректной. Матрица $K(t_n)$ известна приближенно, так как она измеряется и вычисляется в процессе работы алгоритма, а следовательно, содержит ошибки счета. Неточность этой матрицы порождает ошибки в решении, т.к. изменение в элементах матрицы $V_v(t_n)$ влечет за собой изменение в элементах обратной матрицы. Эти ошибки будут сколь угодно велики, в случае если матрица $V_v(t_n)$ плохо обусловлена, а следовательно, задача будет мало устойчива (некорректна), так как её решение сильно изменяется при малых изменениях элементов матрицы.

Для некорректных задач разработан метод устойчивого решения — метод регуляризации, который реализуется в предлагаемом устройстве. Для некорректных задач алгоритм, являющийся функцией некоторого параметра α , называется регуляризующим, если он удовлетворяет следующим условиям: 1) решение существует для всех возможных значений входных данных и всех $\alpha > 0$; 2) можно указать необходимую точность входных данных, при которых обеспечивается заданная точность решения. Из условия 2 следует, что при неточных входных данных решение сходится к точному решению при $\alpha \rightarrow 0$. В частности А. Н. Тихонов показал, что при квадратичных критериях $V(w)$ алгоритм W^α , полученный путем минимизации формы

$$V^\alpha = V(w) + \alpha\Omega(w) \quad (13)$$

удовлетворяет условиям 1, 2 если α удовлетворяет условию

$$\frac{\delta}{\varepsilon(\delta)} \cong \alpha \cong \alpha_0(\delta) \quad (14)$$

где δ — точность задания входных данных; $\varepsilon(\delta)$, $\alpha_0(\delta)$ — какие-либо убывающие функции, стремящиеся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Весовая матрица $w(t_n)$ определяется по формуле

$$w(t_n) = V_v^* [V_v^* + V_e]^{-1} \quad (15)$$

где V_v^* — корреляционная матрица ошибок экстраполяции. Корреляционная матрица ошибок оценок V_a

$$V_a = W V_v. \quad (16)$$

Задача определения весовой матрицы W , при которой квадратичная форма $Sp V_a(t_n)$ достигает минимума. Sp — след матрицы.

В соответствии с методикой А. Н. Тихонова при построении регуляризующего алгоритма задача определения минимума квадратичной формы заменяется на определение минимума квадратичной формы

$$Sp V_a^\alpha = Sp [V_a + \alpha \Omega(w)] \quad (17)$$

где $\Omega(W) = W \cdot W^T$; α — параметр регуляризации. Определяя минимум выражения (17) по элементам матрица W , получим

$$W = V_v^* \{V_v^* + [V_v + \alpha E]\}^{-1} \quad (18)$$

И так, регуляризующий алгоритм, полученный путем минимизации квадратичной формы (17), заключается в добавлении к матрице V_v матрицы αE ($0 < \alpha < 1$).

Литература

1. KALMAN, R. E. and BUCY, R. S.: New results in linear filtering and prediction. Trans ASME. J. Basic Eng., v. 83. D., p. 95—108, 1961.
2. SAGE, A. P. and MIELSA, J. L.: Estimation theory with applications and communications and control. New York McGraw-Hill., 1971.

Slava TRUBIN H-1545 Budapest, POB 323