

ANWENDUNG DES ZEITOPTIMALEN STEUERUNGSPRINZIPS ZUM ENTWURF EINES DDC REGELUNGSSYSTEMS

A. FRIGYES und B. SZILÁGYI

Lehrstuhl für Prozessregelung,
Technische Universität, H—1521 Budapest

Eingegangen am 1. Juni 1987.

Abstract

There are some similarities between the algorithms of the dead-beat and the time optimal (bang-bang) control. The similarities are based on the fact, that in both cases the input signal of the plant is formed by consecutive accelerating and decelerating portions of constant amplitude.

The paper presents a method to approximate the time optimal operation by a dead-beat algorithm, which can be realized in a closed loop.

Bezeichnungen

Es werden die in der Regeltechnik gebräuchlichen Terminologien und Bezeichnungen benutzt. $x(t)$ bedeutet die Zeitfunktion des stetigen, sich kontinuierlich verändernden Signals, x_D bedeutet die Reihe der abgetasteten Werte, $x(z)$ ist die z Transformierte der Abtastreihe x_D .

t	Zeit
s	Laplace Operator
z	Verschiebungsoperator
x_T	Ausgangssignal des D/A Converters
x_D	Abtastreihe
$y(t)$	Regelgröße
Y_D	Abtastreihe der Regelgröße
y_{AD}	Abtastreihe der Führungsgröße
D	Abtastreihe der Regelabweichung
$D(z)$	Impulsübertragungsfunktion des Reglers
$W(s)$	Übertragungsfunktion der Regelstrecke
$v(t)$	Übergangsfunktion
$W(z)$	Impulsübertragungsfunktion der mit einem D/A Wandler ergänzten Regelstrecke
T_1, T_n	Zeitkonstanten der Regelstrecke
T_0	Abtastzeit

n	Ordnungszahl der Regelstrecke
$x_{T\max}$	Vorgeschriebene Grenze der Stellgröße
$C(z)$	Modifikationspolynom
m	Gradzahl des Modifikationspolynoms
t_i	Umschaltungszeitpunkte der Bang-bang Steuerung
$B(z)$	Zähler von $W(z)$ (Polynom)
$A(z)$	Nenner von $W(z)$ (Polynom)
b_i	Koeffizienten von $B(z)$
a_i	Koeffizienten von $A(z)$
T_{0cm}	Abtastzeit bei einem Modifikationspolynom $C(z)$ m -ter Ordnung
k	Zahl der in die Beschleunigungsstrecke fallenden Schritte

Diskretes mathematisches Modell des Systems mit digitalem Regler

Das Blockschaltbild des Hybridsystems, das einen digitalen Regler und eine stetige, kontinuierliche Regelstrecke enthält, ist in Abb. 1. gezeigt.

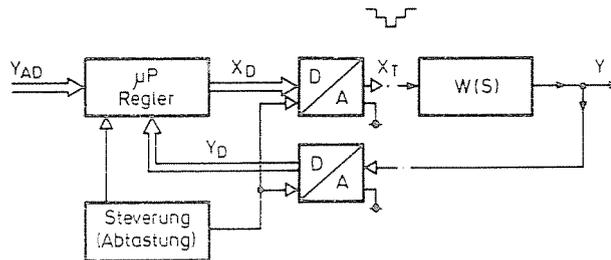


Abb. 1. Blockschaltbild der DDC Regelung

Der digitale Regler schaltet sich durch die D/A bzw. A/D Echtzeit Peripherien an die durch die $W(s)$ Übertragungsfunktion gekennzeichnete stetige Regelstrecke. Entsprechend des Taktes der Steuerung wird die Regelgröße y abgetastet und die Werte des digitalen Stellsignals bestimmt. Der D/A Wandler setzt das digitale Signal x_D in das analoge Signal x_T um. Die Umwandlung erfolgt entsprechend einer Halteglied-Operation nullter Ordnung so, daß die Form des Signals x_T eine, gemäß des Abtast-Taktes "stufig" verlaufende Zeitfunktion ist.

Werden die digitalen Signale Y_{AD} , Y_D und x_D als Abtastreihe aufgefaßt, und ist die Untersuchung der Abtastreihe Y_D anstelle des dazugehörigen analogen Signals $y(t)$ ausreichend, so kann für das digitale mathematische Modell des ursprünglichen hybriden Regelungssystems die durch das Blockschaltbild in Abb. 2. abstrahierte Struktur genommen werden.

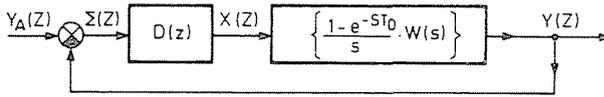


Abb. 2. Diskretes mathematisches Modell der DDC Regelung

Hierbei ist:

$$D(z) = \frac{x(z)}{\varepsilon(z)}$$

die Impulsübertragungsfunktion des digitalen Reglers; der Algorithmus des Reglers

$$W(z) = \zeta \left\{ \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} W(s) \right\}$$

ist die Impulsübertragungsfunktion der mit einem Halteglied nullter Ordnung ergänzten Regelstrecke.

Bei dem Entwurf des Systems wird bei Übertragungsfunktion $W(s)$ der Regelstrecke als gegeben betrachtet, und für das Signal x_T muß eine Begrenzungsvorschrift beachtet werden. Als vorgeschriebene Forderung wird angenommen, daß das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems in der schnellst möglichen Zeit dem Sollwert y_A folgt, der dem Einheitssprung entspricht.

Die während des Entwurfs zu beantwortenden Fragen sind:

- wie groß sei die Abtastzeit T_0 ;
- was für ein $D(z)$ Algorithmus soll benutzt werden?

Die hier angeführten Untersuchungen seien auf solche Regelstrecken mit Ausgleich beschränkt, die nur über eine von Energiespeichern verursachte Signalverzögerung verfügen, und deren normierte Übertragungsfunktion in der Form

$$W(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_n)} \quad (1)$$

anzugeben ist. In diesem Fall ist die Impulsübertragungsfunktion der mit einem Halteglied nullter Ordnung ergänzten Strecke ein Ausdruck vom Typ

$$W(z) = \zeta \left\{ \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} W(s) \right\} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2)$$

Zur numerischen Formulierung ist außer den Zeitkonstanten T_1, \dots, T_n der Strecke auch die Kenntnis der Abtastzeit T_0 notwendig, da jeder b_i und a_i Koeffizient auch von dieser abhängt.

Die für die Regelstrecke aufgestellten Bedingungen bedeuten, daß die Übergangsfunktion der Strecke und die daraus gebildete Abtastreihe Y_D gemäß Abb. 3. verlaufen.

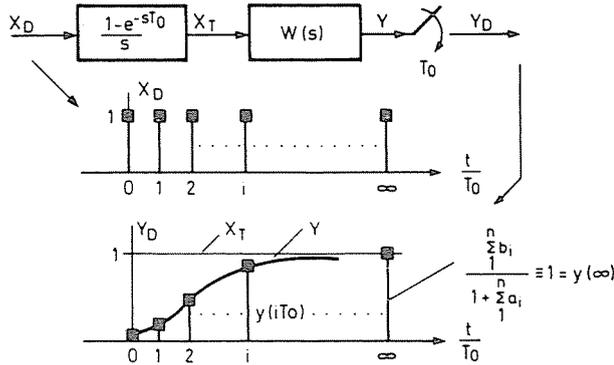


Abb. 3. Auf die Einheits-Abtastreihe gegebene Antwort der mit einem Halteglied nullter Ordnung ergänzten Strecke

Entwurf der Steuerung für endliche Einstellzeit (Dead-beat)

Die am Eingang der mit einem Halteglied nullter Ordnung ergänzten Strecke wirkende Folge von Einheitsabtastwerten erwirkt laut Abb. 3. am Ausgang der Strecke die Antwortsignale $y(t)$ beziehungsweise Y_D . Es sei erwähnt, daß das Ausgangssignal in diesem Falle den Endwert theoretisch erst im Unendlichen annimmt. Der Endwert kann nach folgendem Zusammenhang berechnet werden

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{B(z)}{A(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{\sum_1^n b_i}{1 + \sum_1^n a_i} = 1 = y(\infty) \quad (3)$$

Wird an dem Eingang der Strecke nicht die Folge von Einheitsabtastwerten geschaltet, sondern eine Folge von Abtastwerten, die wie folgt definiert ist:

$$x(z) = \frac{A(z)}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} \quad (4)$$

so ist daraufhin die am Ausgang erscheinende Folge von Abtastwerten:

$$\begin{aligned} y(z) &= W(z)x(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{A(z)}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} \end{aligned} \quad (5)$$

Eine bezeichnende Eigenschaft dieses Ausdruckes ist, daß die Werte des Ausgangssignals der Reihe nach folgende sind:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0 \\
 y(T_0) &= b_1 / \sum_1^n b_i \\
 y(2T_0) &= (b_1 + b_2) / \sum_1^n b_i \\
 &\vdots \\
 y(iT_0) &= \sum_1^i b_i / \sum_1^n b_i \\
 &\vdots \\
 y(nT_0) &= \sum_1^n b_i / \sum_1^n b_i = 1 \\
 y(n+1)T_0 &= 1 \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Die grundlegende Abweichung zu der in Abb. 4. dargestellten Folge von Abtastwerten besteht darin, daß das Ausgangssignal innerhalb einer Zeit von $t = nT_0$ den Endwert $y(nT_0) = 1$ erreicht und danach konstant bleibt. Das tritt natürlich deshalb ein, weil das Eingangssignal $x(z)$ jetzt nicht eine Folge von Einheitswerten, sondern das in (4) definierte Steuerungssignal ist.

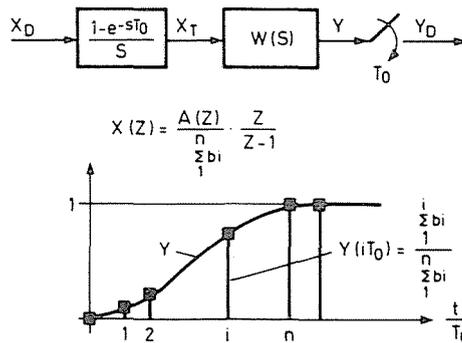


Abb. 4. Antwort der mit einem mathematischen Halteglied nullter Ordnung ergänzten Regelstrecke auf die Folge von endliche Einstellzeit sichernden x_D Abtastwerten

[Small handwritten note or signature]

Genauer untersucht:

$$\begin{aligned}
 x(z) &= \frac{A(z)}{\sum_1^n b_i z^{-i}} \frac{z}{z-1} = \frac{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} = \\
 &= \frac{1}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} + \frac{a_1}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} z^{-1} + \dots + \frac{a_n}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} z^{-n} \quad (7)
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 1 \left/ \sum_1^n b_i \right. \\
 x(T_0) &= (1 + a_1) \left/ \sum_1^n b_i \right. \\
 x(2T_0) &= (1 + a_1 + a_2) \left/ \sum_1^n b_i \right. \quad (8) \\
 &\vdots \\
 x(iT_0) &= \left(1 + \sum_1^i a_i \right) \left/ \sum_1^n b_i \right. \\
 &\vdots \\
 x(nT_0) &= \left(1 + \sum_1^n a_i \right) \left/ \sum_1^n b_i \right. = 1 \\
 x((n+1)T_0) &= 1
 \end{aligned}$$

usw. Unter Beachtung, daß bei in der Praxis vorkommenden Regelstrecken die Vorzeichen der Glieder der Folge a_i alternieren, ist der Signalverlauf auf Abb. 5. sichtbar.

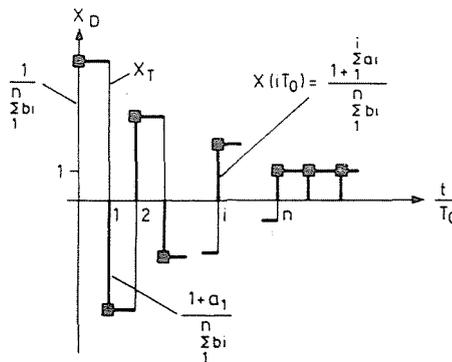


Abb. 5. Endliche Einstellzeit sichernde Folge von x_D Abtastwerten und das dementsprechende Steuerungssignal x_T

Abb. 4. und 5. vergleichend ist es klar, daß die Steuerung laut Abb. 5. das Einstellen der Ausgangsgröße y auf den Endwert $y(nT_0) = 1$ in einer Zeit von nT_0 ergibt. Wegen der ausgleichenden Eigenschaft der Regelstrecke stellt sich natürlich auch das Signal x_T spätestens nach einer Zeit von nT_0 auf den Endwert $x(nT_0) = 1$ ein. Da n die Ordnungszahl der Regelstrecke ist, und dies als technologische Gegebenheit zu betrachten ist, kann die Einstellzeit allein durch die Wahl der möglichst kleinsten Abtastzeit T_0 verkürzt werden. Allerdings kann T_0 nicht beliebig klein gewählt werden, denn die Verkürzung der Einstellzeit ist nur mit einer großen Übersteuerung möglich, wofür wiederum die für x_T vorgeschriebene Beschränkung eine Grenze setzt.

In Abb. 5. ist sichtbar, daß die Steuerung x_T gerade bei $t = 0$ ihr Maximum annimmt, so ist bei einem vorgeschriebenen Begrenzungswert $x_{T \max}$ die einzuhaltende Bedingung:

$$x(0) = \frac{1}{\sum_1^n b_i} \leq x_{T \max} \quad (9)$$

Hierbei wird jeder der Koeffizienten b_i von den Zeitkonstanten der Strecke und der Abtastzeit T_0 bestimmt.

$$\sum_1^n b_i(T_0) \leq \frac{1}{x_{T \max}} \quad (10)^*$$

Somit kann die Lösung der transzendenten Gleichung nach T_0 einen Anhaltspunkt für die Wahl der Abtastzeit geben. Ein kleinerer Wert für T_0 darf nicht angenommen werden, da sonst die Bedingung für die Begrenzung der Übersteuerung verletzt wird; die Wahl eines größeren Wertes für T_0 ist nicht ratsam, weil dann die durch die zugelassene Übersteuerung gegebene Möglichkeit der Beschleunigung nicht ausgenützt wird.

BEISPIEL: Die Übertragungsfunktion der Strecke sei $W(s) = 1/(1+sT)^2$. Die dementsprechende Impulsübertragungsfunktion ist:

$$W(z) = \zeta \left\{ \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} \frac{1}{(1+sT)^2} \right\} = \frac{b_1 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (11)$$

* $b_i(T_0)$ bedeutet, daß die Werte b_i Funktionen der Abtastzeit T_0 sind.

wobei

$$\begin{aligned}
 b_1(T_0) &= (1-E)^2 \frac{1-E\left(1+\frac{T_0}{T}\right)}{1-E(2-E)} \\
 b_2(T_0) &= (1-E)^2 \frac{E\left(E+\frac{T_0}{T}-1\right)}{1-E(2-E)} \\
 a_1(T_0) &= -2E \\
 a_2(T_0) &= E^2 \quad E = e^{-T_0/T}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Daraus ergibt sich die transzendente Gleichung, die die Grenzbedingung erfüllt und die Abtastzeit T_0 bestimmt:

$$\begin{aligned}
 b_1(T_0) + b_2(T_0) &= (1-E)^2 = (1 - e^{-T_0/T})^2 = \frac{1}{x_{T \max}} \\
 T_0 &= T \ln \frac{\sqrt{x_{T \max}}}{\sqrt{x_{T \max}} - 1}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Bei Angaben von $T=10\text{s}$; $x_{T \max}=10$

$$T_0 = 10 \ln \frac{1}{9} = 3,8013 \text{ s}$$

Die Signaldiagramme sind in Abb. 6. dargestellt.

Laut Abb. 6. ist die Regelgröße bei einem Steuerungssignal x_T in der Zeit $2T_0=7,6\text{s}$ auf den Endwert einstellbar, während das Steuerungssignal innerhalb der Begrenzung bleibt.

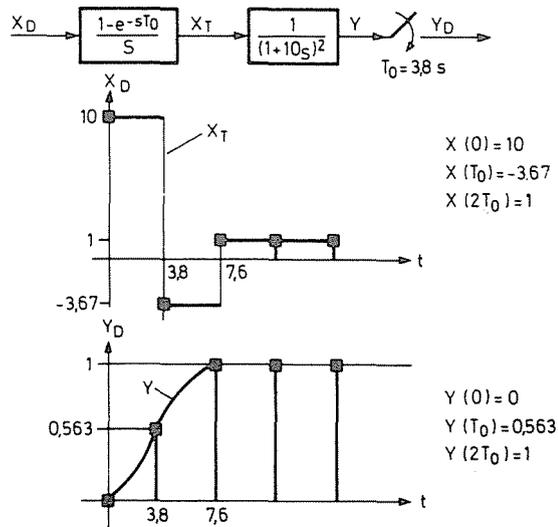


Abb. 6. Steuerungssignal x_T für endliche Einstellzeit und die diesbezügliche Antwort im Fall einer Strecke zweiter Ordnung

Bestimmung des $D(z)$ Algorithmus zur Realisierung der endlichen Einstellzeit im geschlossenen Regelkreis

In dem geschlossenen Regelkreis wird das eine endliche Einstellzeit sichernde Signal $x(z)$ durch den DDC Regler erzeugt. Dieser DDC Regler bildet die Differenz des Sollwertes und der Regelgröße: $\varepsilon(z) = y_A(z) - y(z)$ ist die Regelabweichung die dann an dem Eingang eines Gliedes mit der Impulsübertragungsfunktion $D(z)$ wirkt. (Abb. 2.) Der $D(z)$ Algorithmus muß aus $\varepsilon(z)$ das mit (4) definierte, die endliche Einstellzeit ergebende Signal $x(z)$ erzeugen.

$$\begin{aligned}
 D(z) &= \frac{x(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{x(z)}{y_A(z) - y(z)} = \frac{x(z)}{y_A(z) - W(z)x(z)} = \\
 &= \frac{\frac{A(z)}{z}}{\frac{z}{\sum_1^n b_i z - 1}} = \frac{A(z)}{\frac{z}{z-1} - \frac{B(z)}{A(z)} \frac{A(z)}{\sum_1^n b_i z - 1}} = \frac{A(z)}{\sum_1^n b_i - B(z)} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Die Bestimmung von $D(z)$ ist anhand von (14) sehr einfach, da die Parameter aus der Impulsübertragungsfunktion $W(z)$ — die Koeffizienten a_i und b_i — eindeutig $D(z)$ bestimmen. Ist die Impulsübertragungsfunktion der mit einem Halteglied nullter Ordnung ergänzten Strecke des Ausdrucks (2), so ist der DDC Algorithmus, der eine endliche Einstellung ergibt:

$$D(z) = \frac{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{\sum_1^n b_i - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_n z^{-n}} \quad (15)$$

Die Wahl des Reglers nach (15) garantiert eine schwingungslose Einstellung, weil im Beharrungszustand die Stellgröße bei $z=1$ die Impulsübertragungsfunktion (15) des Reglers einen Pol hat. Damit wird der integrierende Charakter garantiert, das eine natürliche Forderung ist, da im Beharrungszustand eine Regelabweichung von Null einen endlichen Wert der Regelgröße $y(\infty) = y_A = 1$, die dem Sollwert y_A entspricht, aufrechterhalten muß.

BEISPIEL

Bei einer Strecke $W(s) = 1/(1 + 10s)^2$ und einer Begrenzung von $x_{T\max} = 10$ ist die Abtastzeit $T_0 = 3,8s$. Die Impulsübertragungsfunktion der mit einem Halteglied nullter Ordnung ergänzten Strecke ist

$$W(z) = \frac{0,0563z^{-1} + 0,0437z^{-2}}{1 - 1,367z^{-1} + 0,4675z^{-2}} \quad (16)$$

Daraus folgt die Übertragungsfunktion des DDC Reglers, der für die endliche Einstellzeit sorgt:

$$D(z) = \frac{10 - 13,67z^{-1} + 4,675z^{-2}}{1 - 0,563z^{-1} - 0,437z^{-2}} \quad (17)$$

Bei Anwendung eines solchen Reglers verlaufen in einem geschlossenen Regelkreis die Signale $x_T(t)$ und $y(t)$ bei einem Einheitssprungollwert laut Abb. 6., d. h. das System gelangt in einer Zeit von $2T_0 = 7,6s$ mit dem Endwert $x_T(2T_0) = y(2T_0) = 1$ in den Beharrungszustand.

Annäherung der zeitoptimalen (Dead-beat) Funktionsweise beim Entwurf des Systems mit endlicher Einstellzeit

Ein Regelalgorithmus wird als Zeitoptimal bezeichnet, wenn er die Regelgröße unter Beachtung der Begrenzungen für die Stellgröße in der kürzesten Zeit auf den Sollwert einstellt. Die schnellstmögliche Einstellung des Ausgangssignals y der Strecke mit einer Übertragungsfunktion $W(s)$ auf den Endwert $y=1$ ist mit solchem Steuersignal möglich, welches sich vor der Einstellung auf den Endwert $x=1$ sprunghaft zwischen den Werten $\pm x_{T\max}$ ändert. (Abb. 7.)

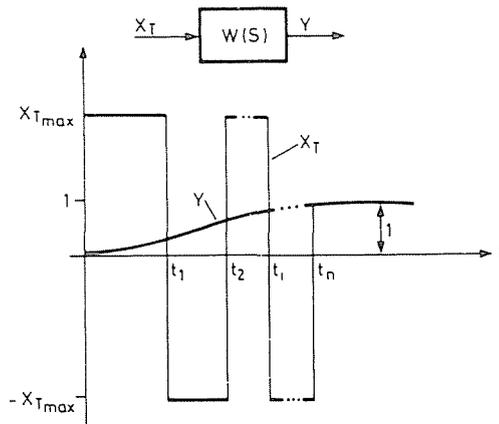


Abb. 7. Steuersignal des zeitoptimalen Systems und die diesbezügliche Antwort

Die Zahl der Umschaltungen wird von der Zahl der Energiespeicher (die Ordnungszahl n der Strecke) bestimmt, und die Zeitpunkte t_1, t_2, \dots, t_n der Umschaltungen müssen so gewählt werden, daß zum Zeitpunkt t_n der letzten Umschaltung gleichzeitig die Bedingungen $y(t_n) = 1$ und $y'(t_n) = \dots = y^{(n-1)}(t_n) = 0$ erfüllt werden. (Steuerung nach dem zeitoptimalen Bang-bang Prinzip.) Die Einstellzeit ist in diesem Fall t_n und das ist die theoretisch schnellstmögliche Funktionsweise. Die Umschaltungszeitpunkte t_1, t_2, \dots, t_n können mit Kenntnis der Zeitkonstanten T_1, T_2, \dots, T_n der Strecke bestimmt werden. Die konkrete Bestimmung der Umschaltzeiten wirft bedenkende rechentechnische Probleme auf (numerische Lösungen von transzendenten Gleichungssystemen), mit denen wir uns hier nicht im Detail beschäftigen. Die Methode ist darüberhinaus für Steuerung ausgearbeitet, jedoch in unserem Fall wollen wir sie zur Regelung nutzen.

Das Steuerungssignal, welches eine endliche Einstellzeit sichert (Abb. 5.) zeigt gewisse Ähnlichkeit zu der Bang-bang Steuerung, deshalb lohnt es sich zu diskutieren, wie die Funktion des Systems mit endlicher Einstellzeit dadurch zu verbessern ist, daß mit dem Steuersignal die Bang-bang Steuerung angenähert wird.

Die Schwierigkeit der Verwirklichung der Bang-bang Steuerung tritt darin auf, daß es im DDC System ausschließlich in den Abtastzeitpunkten die Möglichkeit gibt das Signal x_T zu verändern, und dieser Takt kann im Allgemeinen nicht synchron mit den Umschaltungszeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_T des Bang-bang Signals sein. Bei Anwendung einer sehr kleinen Abtastzeit könnte der Synchronismus zwar annähernd erreicht werden, doch es scheint offensichtlich, daß ein sinnvoller Kompromiss auch um den Preis gesucht werden muß, daß die Einstellzeit im Vergleich zu t ansteigt.

Im Folgenden geben wir eine Vorstellung über die Art, wie man den endliche Einstellzeit sichernden $D(z)$ Algorithmus in dem Sinne verändern kann, daß die Bang-bang Funktionsweise angenähert wird. Wir stellen das Verfahren anhand der Behandlung einer konkreten Aufgabe vor.

Die Übertragungsfunktion der Strecke sei

$$W(s) = \frac{1}{(1 + 10s)^2}$$

und die für die Steuerung x_T vorgeschriebene Begrenzung sei $x_{T\max} = \pm 10$.

Das Bang-bang Steuersignal ist in diesem Fall die mit Strichlinie gezeichnete Zeitfunktion von Abb 8. Die Regelgröße y stellt sich als Ergebnis einer Beschleunigung von $x_T = 10$, die bis $t_1 = 4,4s$ und einer Bremsung von $x_T = +10$, die bis $t_2 - t_1 = 2s$ dauert, auf den Endwert $y = 1$ in einer Zeit von $t_2 = 6,4s$ ein.

In Abb.8. ist auch das Steuerungssignal des auf endliche Einstellzeit geplanten Systems aufgezeigt. Daraus ist zu entnehmen, daß sich das

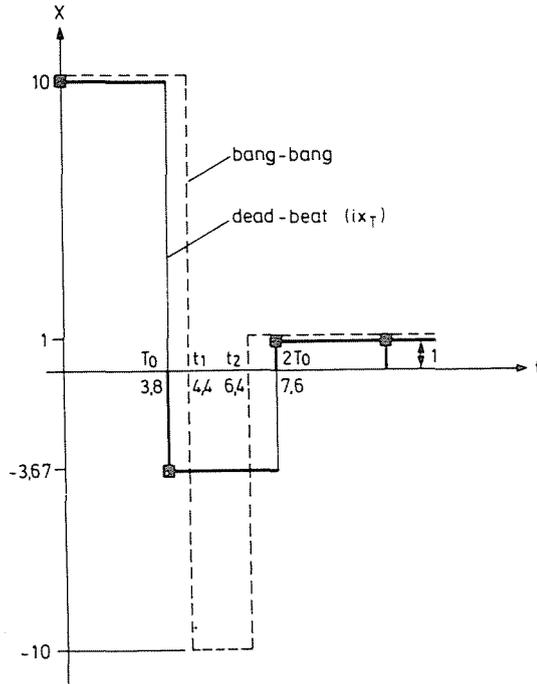


Abb. 8. Steuersignale des Systems mit endlicher Einstellzeit und der Bang-bang Steuerung im Fall einer Strecke zweiter Ordnung

Steuerungssignal wegen der Abtastzeit $t_0 = 3,8\text{s}$ nur im Takt von T_0 verändern kann, oder anders ausgedrückt, in dem System mit endlicher Einstellzeit dauert die Beschleunigung nicht genügend lange an und geschieht die Bremsung nicht mit der notwendigen Intensität. Das Ergebnis ist das Einstellen in einer Zeit von $2T_0 = 7,6\text{s}$, welche größer ist als die mit der Bang-bang Steuerung erreichbare Zeit von $6,4\text{s}$. Zur besseren Annäherung der Bang-bang Steuerung wird die Abtastzeit auf T_{0cm} gewählt und der Ausdruck zur Bestimmung von $x(z)$ (4) mit einem Polynom $C(z)$ mit der Gradzahl m erweitert:

$$x(z) = \frac{A(z)C(z)}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} \quad (18)$$

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} \quad (19)$$

In diesem Fall ist

$$x(z) = \frac{B(z)C(z)}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1}$$

also ist auch jetzt die endliche Einstellzeit gesichert.

Da der Endwert von x_T notwendigerweise $x_T(\infty) = 1$ sein muß, ist somit

$$\begin{aligned} x_D(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)C(z)}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{\left(1 + \sum_1^n a_i\right) \left(\sum_0^m c_i\right)}{\sum_1^n b_i} = 1 \end{aligned}$$

woraus folgt, das die Koeffizienten des Polinoms $C(z)$ die Bedingung

$$\sum_0^m c_i = 1 \quad (20)$$

erfüllen müssen.

Die Steuerung gemäß (18) ergibt, daß das Steuersignal x_T — und auch das von ihm erregte Ausgangssignal y — in einer Zeit von $(n+m)T_{0cm}$ den Endwert $y((n+m)T_{0cm}) = x((n+m)T_{0cm}) = 1$ annimmt. Die Erweiterung mit dem Polinom $C(z)$ mit der Gradzahl m ist scheinbar nachteilig im Hinblick auf die Einstellzeit, denn jetzt erreicht das System nach $n+m$ Schritten seinen Gleichgewichtszustand, verglichen mit dem Fall ohne Erweiterung, wo die Schrittzahl n war. Wir werden jedoch sehen, daß mit richtiger Wahl der Gradzahl m der Koeffizient c_i und die Abtastzeit T_{0cm} erreichbar werden, daß

$$(n+m)T_{0cm} > nT_0 \quad (21)$$

das im Hinblick auf die Einstellzeit günstiger ist als im Fall ohne Erweiterung.

Die Grundfrage der Dimensionierung reduzierte sich demnach auf die optimale Wahl von T_{0cm} und $C(z)$. Als erster Versuch sei das Erweiterungspolynom $C(z)$ von erstem Grad ($C(z) = c_0 + c_1 z^{-1}$; $m=1$), die Abtastzeit sei T_{0c1} . Damit ist die Steuerung des modifizierten Systems mit endlicher Einstellzeit

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{A(z)C(z)}{\sum_1^n b_i} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1})}{(b_1 + b_2)} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{1}{b_1 + b_2} [c_0 + (c_0 a_1 + c_1)^{-1} + (c_0 a_2 + c_1 a_1) z^{-2} + c_1 a_2 z^{-3}] \frac{z}{z-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

also

$$\begin{aligned}
 x(0) &= \frac{c_0}{b_1 + b_2} \\
 x(T_{0c1}) &= \frac{c_0(1 + a_1) + c_1}{b_1 + b_2} \\
 x(2T_{0c1}) &= \frac{c_0(1 + a_1 + a_2) + c_1(1 + a_1)}{b_1 + b_2} \\
 x(3T_{0c1}) &= \frac{(1 + a_1 + a_2)(c_0 + c_1)}{b_1 + b_2} = 1 \\
 x(4T_{0c1}) &= 1
 \end{aligned} \tag{23}$$

usw.

Die Form des Steuersignals ist in Abb. 9. sichtbar. Da die Einstellzeit $(n + m)T_{0c1} = (2 + 1)T_{0c1} = 3T_{0c1}$ beträgt, ist solch eine Abtastzeit notwendig, für die $3T_{0c1} < 2T_0 = 7,6\text{s}$ gilt. In diesem Fall verbessert sich die Einstellzeit des Systems. Sich daraus ergebend muß die Abtastzeit $T_{0c1} < 2,53\text{s}$ gewählt und auch die für x_T gültige Begrenzung eingehalten werden.

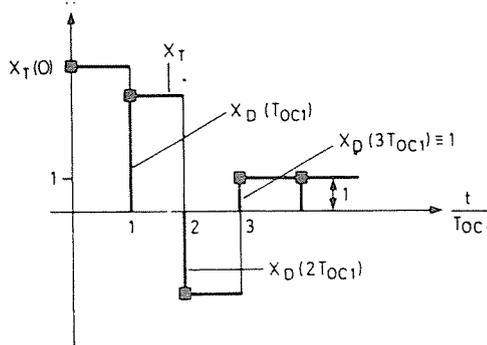


Abb. 9. Wirkung eines Modifikationspolinoms ersten Grades auf das Steuersignal des Systems mit endlicher Einstellzeit im Fall einer Strecke zweiter Ordnung

Also

$$x(0) = \frac{c_0}{b_1 + b_2} \leq x_{T\max} = 10 \tag{24}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung (20)

$$\begin{aligned}
 c_0 &= x_{T\max}(b_1 + b_2) \\
 c_1 &= 1 - c_0 = 1 - x_{T\max}(b_1 + b_2)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Da die Koeffizienten a_i , b_i und dadurch die Werte c_0 und c_1 Funktionen der Abtastzeit T_{0c1} sind, seien sie für verschiedene Werte von T_{0c1} errechnet (Tabelle 1).

Tabelle 1

T_{0c1}	b_1	b_2	a_1	a_2	c_0	c_1	$x(0)$	$x(T_{0c1})$	$x(2T_{0c1})$	$x(3T_{0c1})$
2,53	0,02708	0,02288	-1,5529	0,6029	0,4996	0,5004	10	2,13	-3,67	1
2,3	0,02272	0,01949	-1,5890	0,6312	0,4221	0,5779	10	5,51	-6,24	1
2,2	0,02090	0,01800	-1,6000	0,6400	0,3890	0,6110	10	9,50	-9,9	1
2,179	0,02055	0,01777	-1,6084	0,6467	0,3833	0,6166	10	10,0	-9,4	1
2,13	0,01970	0,01709	-1,6160	0,653	0,3680	0,6320	10	11,0	-10,2	1
2,0	0,01752	0,01533	-1,6347	0,670	0,3285	0,6716	10	14,0	-12,7	1

$$W(z) = \zeta \left\{ \frac{1 - e^{-sT_{0c1}}}{s} \frac{1}{(1 + 10s)^2} \right\} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1}$$

$$D(z) = \frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1})}{b_1 + b_2 - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1})}$$

Aus den Angaben der Tabelle kann man ablesen, daß die Abtastzeit $T_{0c1} = 2,179s$ der günstigste Wert ist. Dort nähert das Steuersignal gut die Bang-bang Steuerung an (Abb. 10), die Einstellzeit beträgt $3T_{0c1} = 6,537s$. Danach ergibt sich der Algorithmus $D(z)$, neben einer Abtastzeit von $T_{0c1} = 2,179s$:

$$W(z) = \zeta \left\{ \frac{1 - e^{-sT_{0c1}}}{s} \frac{1}{(1 + 10s)^2} \right\} =$$

$$= \frac{0,02055z^{-1} + 0,01777z^{-2}}{1 - 1,6084z^{-1} + 0,6467z^{-2}}$$

$$C(z) = 0,3833 + 0,6167z^{-1}$$

$$D(z) = \frac{A(z)C(z)}{\sum_1^n b_i - B(z)C(z)} =$$

$$= \frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1})}{b_1 + b_2 - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1})} =$$

$$= \frac{10 - 19,4z^{-2} + 10,4z^{-3}}{1 - 0,2055z^{-1} - 0,5084z^{-2} - 0,2859z^{-3}}$$

Dieser Algorithmus stellt die Regelgröße im geschlossenen Regelkreis nach einen Sollwert gemäss der Sprungfunktion in einer Zeit von $3T_{0c1} = 6,537s$ auf ihren Endwert $y(3T_{0c1}) = 1$ ein, während das Signal x_T sich entsprechend Abb. 10. ändert. Nachdem die Anwendung eines $C(z)$ Polinoms erster Ordnung

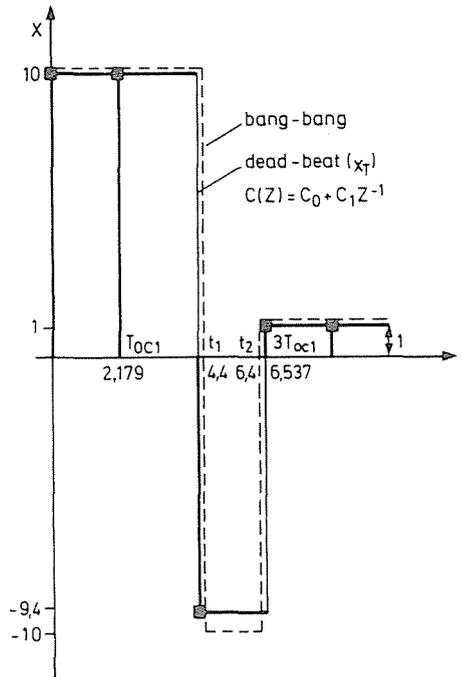


Abb. 10. Steuersignale des mit einem Modifikationspolynom ersten Grades ergänzten Systems mit endlicher Einstellzeit und der Bang-bang Steuerung

der Bang-bang Steuerung sehr gut nahe kommt, stellt sich die Frage, ob eine höhere Gradzahl von $C(z)$ eine immer bessere Annäherung gibt.

Es sei zuerst die Frage untersucht, ob ein solches $C(z)$ Polynom existiert, mit dessen Anwendung die Bang-bang Funktionsweise beliebig angenähert werden kann. Die in der gegebenen Aufgabe zum Bang-bang Verhalten notwendigen Umschaltungspunkte sind $t_1 = 4,4$ s; $t_2 = 6,4$ s. Neben der Abtastzeit T_{oc1} und der Gradzahl m des $C(z)$ Polinoms beträgt die gesamte Einstellzeit $(2+m)T_{oc1}$. Wenn davon k Schritte ($k < 2+m$; ganzzählig) auf die Beschleunigung und $2+m-k$ Schritte auf das Bremsen fallen, dann ist die Bedingung für das ideale Bang-bang Verhalten:

$$(2+m)T_{ocm} = t_2 = 6,4\text{s}$$

$$kT_{ocm} = T_1 = 4,4\text{s}$$

wobei m und k notwendigerweise nur ganze Zahlen sein können. Daraus folgt:

$$\frac{2+m}{k} = \frac{6,4}{4,4} = \frac{16}{11}$$

was die Zahlenpaare $m=14$; $k=11$ erfüllen.

Das bedeutet, daß neben einer Gradzahl von $m = 14$ und mit einer Wahl der Abtastzeit von

$$T_{0c14} = \frac{t_2}{2+m} = \frac{6,4}{14} = 0,4\text{s}$$

die Bang-bang Steuerung realisiert werden kann.*

Zwischen den Werten $m=0$ und $m=14$ der Gradzahl kann noch der Wert Bedeutung haben, wo der Quotient $(2+m)/k$ dem Verhältnis $t_2/t_1 = 16/11 = 1,4545$ gut nahe kommt. Dies kann durch folgende Zahlenpaare erreicht werden:

Den Angaben von Tabelle 2 nach kann im Falle von $m: 5, 8, 11$ auf eine bessere Annäherung gerechnet werden als bei dem $C(z)$ Polinom ersten Grades, beziehungsweise neben $m=14$ kann das Bang-bang Verhalten garantiert werden. Der sich in der Einstellzeit zeigende Gewinn begründet jedoch die Erweiterung mit einer Gradzahl größer als $m=1$ nicht.

Tabelle 2

m	k	$(2+m)/k$	Bemerkung
0	1	2	endliche Einstellzeit $C(z)=1$
1	2	1,5	$C(z)=c_0+c_1z^{-1}$
2	3	1,33	$C(z)=c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}$
4	4	1,5	
5	5	1,4	
7	6	1,5	
8	7	1,4285	
10	8	1,5	
11	9	1,4444	
12	10	1,4	
13	10	1,5	
14	11	1,4545	Bang-bang

In der Tabelle ist auch der Fall $m=2$ zur Illustration aufgeführt, daß ein $C(z)$ Polinom zweiten Grades eine schlechtere Einstellung ergibt als eines von ersten Grades. Die darauf bezogenen Detailrechnungen wurden ebenfalls ausgeführt, und als Ergebnis entstanden die Angaben von Tabelle 3.

* Das ist natürlich nur dann zu erreichen wenn die Umschaltungszeiten t_1 und t_2 einen gemeinsamen Teiler haben.

Tabelle 3

T_{0c2}	b_1	b_2	a_1	a_2	c_0	c_1	c_2	$x(0)$	$x(T_{0c2})$	$x(2T_{0c2})$	$x(3T_{0c2})$	$x(4T_{0c2})$
1,8	0,01438	0,01275	-1,6705	0,6976	0,2763	0,4628	0,2609	10	10	-7,841	-6,07	1
1,7	0,01291	0,01152	-1,6873	0,7117	0,2443	0,4122	0,3435	10	10	2,689	-8,99	1
1,67	0,01248	0,01116	-1,6923	0,7160	0,2365	0,4003	0,3631	10	10	3,869	-9,99	1
1,63	0,01192	0,01069	-1,6991	0,7218	0,2261	0,3841	0,3897	10	10	5,557	-11,42	1
1,6	0,01151	0,01034	-1,7042	0,7261	0,2185	0,3723	0,4091	10	10	6,915	-12,57	1

$$W(z) = \zeta \left\{ \frac{1 - e^{-ssT_{0c2}}}{s} \frac{1}{(1 + 10s)^2} \right\} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}$$

$$D(z) = \frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2})}{b_1 + b_2 - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2})}$$

Die Angaben der Tabelle zeigen, daß mit einem $C(z)$ Polinom zweiten Grades die Abtastzeit nicht unter $T_{0c2} = 1,67s$ gesenkt werden kann, ohne die Übersteuerungsbedingung zu verletzen. Das bedeutet gleichzeitig, daß die Einstellzeit in diesem Fall größer ist, als sie bei dem $C(z)$ Polinom ersten Grades war ($4T_{0c2} = 6,68 > 3T_{0c1} = 6,53$). Dieses Ergebnis kann auch anhand des physikalischen Hintergrunds gut verfolgt werden. Das zu T_{0c2} gehörende Steuersignal mit der Bang-bang Steuerung vergleichend (Abb. 11.) ist zu bemerken, daß bei $m = 2$ eine größere Annäherung des Bang-bang Signals möglich ist als bei $m = 1$. Die Erscheinung zeigt sich m Zeitintervall von $3,34 < t < 5,01$, denn wenn hier $x(2T_{0c2}) = 10$ gehalten wurde, so würde sich das System zu sehr beschleunigen und könnte in der einzigen zur Verfügung stehenden Abtastzeit nicht gebremst werden.

Das mit einem $C(z)$ Polinom zweiten Grades erweiterte System garantiert so die endliche Einstellung, daß zwischen $5,01 < t < 6,68$ nur mit $x_T = -10$ gebremst werden kann, deshalb wird im Zeitraum $3,34 < t < 5,01$ die Beschleunigung nur mit einer Intensität von 3,869 ausgeführt, wessen Preis eine Einstellzeit von $4T_{0c2} = 6,68s$ ist.

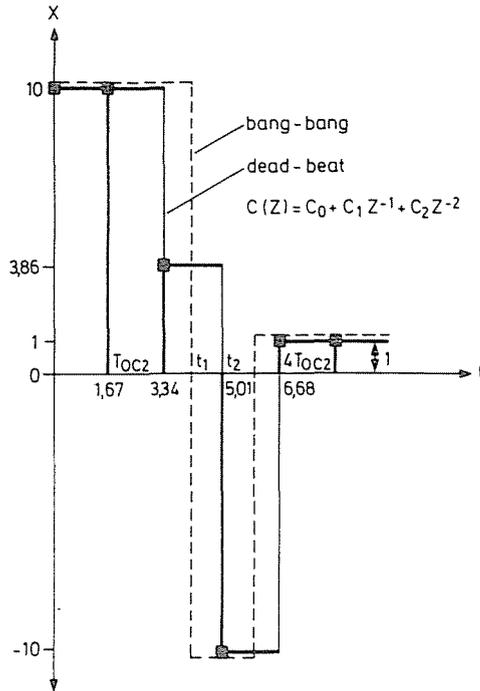


Abb. 11. Steuersignale der Bang-bang Steuerung und des mit einem Modifikationspolynom zweiten Grades ergänzten Systems mit endlicher Einstellzeit

Literatur

R. ISERMANN: Digitale Regelsysteme. Springer, 1977.

Zusammenfassung

In Abb. 12. sind verschiedene Ergebnisse vergleichbar. Zu der oben behandelten Regelstrecke waren ein analoger PID-Regler, ein digitaler PID-Regler, ein Regler mit endlicher Einstellzeit und ein modifizierter Regler mit endlicher Einstellzeit gekoppelt. Aufgezeichnet sind die Zeitfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ des geschlossenen Regelkreises bei einem Einheitsprung des Sollwertes. Die Zeitfunktionen zeigen anschaulich, daß neben Einhaltung der gegebenen Begrenzungsbedingung ($x_{T_{\max}} = 10$) schon das System mit endlicher Einstellzeit gut der Bang-bang-Einstellung nahe kommt (3. Kurve). Die dabei angewendete Abtastzeit von $T_0 = 3,8\text{s}$ ist hier nur deshalb ungünstig, weil das System in der Zeit von T_0 „geöffnet“ ist, d.h. durch den Zeitintervall T_0 nicht die Sollwertänderungen fühlt, was die Verlängerung der Einstellzeit um T_0 bedeutet. Dem kann mit Halbierung, Dritteln u.s.w. von T_0 geholfen werden das natürlich ein

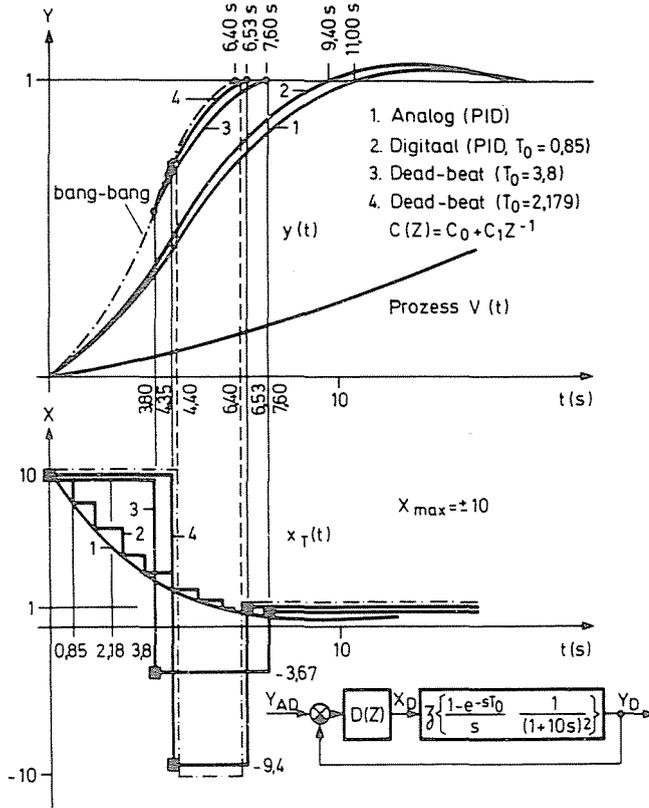


Abb. 12. Vergleich der verschiedenen Regelalgorithmen anhand der Zeitfunktionen der Signale x und y des geschlossenen Systems

Anwachsen der Gradzahl von $D(z)$ mit sich bringen würde. Wenn die Notwendigkeit besteht, so ist es wert mit der Verringerung von T_0 gleichzeitig die durch das Modifikationspolynom $C(z)$ gegebenen Möglichkeiten ausnutzen, da dort auch von einer weiteren Verringerung der Einstellzeit die Rede sein kann (4. Kurve).

Prof. Dr. Andor FRIGYES } H-1521 Budapest
 Dr. Béla SZILÁGYI }