

# CHAOTISCHE LÖSUNGEN BEI DER DREIFACHEN FREQUENZTEILUNG\*\*

E. PHILIPPOW und D. SCHUCHARDT\*

Technische Hochschule Ilmenau,

Eingegangen am 7. Dezember 1985

## Summary

The paper deals with the solution of the model equation for threefold frequency distribution [1]

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon \left[ 1 - x^2 - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau} + x + b(4x^3 - 3x) = \hat{B} \cos 3\tau \quad (1)$$

depending on the equation parameters  $\varepsilon$ ,  $b$  and  $\hat{B}$ . The mapping method appears particularly suited in the analysis on non-linear externally excited networks [2] [3]. By means of this stroboscopic method one succeeds to present a clear picture of the different solution structures in the different parameter ranges. Particular attention was paid to bifurcation characterized by qualitative changes in the periodical states and to chaotic solutions. Such stochastic movements will be observed in certain cases precisely in defined systems represented as in the present case by simple differential equations.

## Übersicht

In der vorliegenden Arbeit wird das Lösungsverhalten der Modellgleichung für die dreifache Frequenzteilung [1]

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon \left[ 1 - x^2 - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau} + x + b(4x^3 - 3x) = \hat{B} \cos 3\tau \quad (1)$$

in Abhängigkeit von den Gleichungsparametern  $\varepsilon$ ,  $b$  und  $\hat{B}$  untersucht.

Bei der Analyse nichtlinearer fremderregter Netzwerke erweist sich die Mapping-Methode als besonders geeignet [2] [3].

Mit Hilfe dieser stroboskopischen Methode gelingt eine übersichtliche Darstellung der verschiedenen Lösungsstrukturen in den unterschiedlichen Parameterbereichen. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Auftreten von Bifurkationen gewidmet, die durch qualitative Veränderungen in den periodischen Zuständen gekennzeichnet sind. Solche stochastischen Bewegungen werden unter Umständen gerade in determinierten Systemen, die wie hier durch eine einfache Differentialgleichung dargestellt werden, beobachtet.

\* Keramische Werke Hermsdorf, Betrieb Mikroelektronik

\*\* Prof. K. Simonyi zum siebzigsten Geburtstag gewidmet

## Grundlagen

Eingeschwungene periodische Bewegungen (geschlossene Kurven in der Phasenebene) werden durch Fixpunkte in der Mapping-Ebene repräsentiert. Die Fixpunkte werden hinsichtlich der Stabilität mit Hilfe der Floquet'schen Multiplikatoren  $m_1$  und  $m_2$  in vier Typen klassifiziert: Vollständig stabil ( $|m_1| < 1, |m_2| < 1$ ), vollständig instabil ( $|m_1| > 1; |m_2| > 1$ ), direkt instabil ( $0 < m_1 < 1 < m_2$ ) und invers instabil ( $m_2 < -1 < m_1 < 0$ ).

In vielen nichtlinearen dynamischen Systemen kommt es bei kontinuierlicher Veränderung der Systemparameter zu unstetigen Veränderungen in dem Gleichgewichts- bzw. in dem periodischen Zustand (Bifurkation) [4]. Dabei können unter Umständen subharmonische Verdoppelungen der Periode auftreten (Frequenzteilung).

Nach mehreren Bifurkationen bzw. nach mehreren subharmonischen Periodenverdoppelungen können chaotische Bewegungen entstehen. Sie führen zu sehr komplizierten Bewegungen in dem nichtlinearen dynamischen System. In diesem Falle tritt bei der Transformation dieser stochastischen Bewegung in der Poincaré-Ebene (Mapping-Ebene) eine besondere topologische Struktur — der „Strange Attractor“ — auf. Die Transformationspunkte führen bei der Abbildung nicht zu Fixpunkten oder geschlossenen Invarianzkurven, sondern liegen innerhalb eines begrenzten Flächenbereiches des Strange attractors. Diese topologische Struktur ist an die Existenz einer Vielzahl von instabilen Lösungen der Differentialgleichung gebunden. Instabile Lösungspunkte in der Poincaré-Ebene sind die homoklinen Punkte.

Weitere topologische Strukturen in der Mapping-Ebene sind die  $\alpha$ - bzw.  $\omega$ -Invarianzkurven. Wenn mehrere stabile Fixpunkte vorhanden sind, sind ihre Einzugsgebiete durch Grenzlinien getrennt. Der Mapping-Prozeß, der von einem Punkt auf der Grenzlinie ausgeht, führt zu einem anderen Punkt der Grenzlinie. Beim Fortsetzen der Transformation gelangt man zu einem direkt oder invers instabilen Fixpunkt  $P_i$ . Die Grenzlinie stellt eine Invarianzkurve — die  $\omega$ -Invarianzkurve — dar. Von einem direkt oder invers instabilen Punkt  $P_i$  der  $\omega$ -Invarianzkurve führt eine Invarianzkurve — die  $\alpha$ -Invarianzkurve — zu je einem der zwei stabilen Fixpunkte, deren Einzugsgebiete durch die zugehörige  $\omega$ -Invarianzkurve begrenzt werden.

Schnittpunkte von  $\alpha$ - und  $\omega$ -Invarianzkurven außer den zugehörigen direkt instabilen Punkten  $P_i$  werden doppelt asymptotische Punkte genannt. Ein solcher Schnittpunkt heißt homoklin, wenn  $\alpha$ - und  $\omega$ -Zweige von gleichen instabilen Fixpunkten ausgehen, ansonsten heteroklin.

Bei Auftreten von doppelt asymptotischen Schnittpunkten sind zusätzliche subharmonische Lösungen zu beobachten. Bevor das System von einer stabilen periodischen Lösung zu einer chaotischen Bewegung übergeht, treten immer weitere Verschlingungen von  $\alpha$ - und  $\omega$ -Zweigen auf, die zu subharmonischen

schen Lösungen führen. Schließlich entsteht in einem begrenzten Bereich der  $\dot{x}(x)$  Ebene eine flächenbedeckende homokline Struktur (Strange attractor). Die Lösung wird chaotisch.

### Analyse der Frequenzteilergleichung dritten Grades

Im folgenden sollen die Ergebnisse der digitalen Simulation der Differentialgleichung (Gl. 1) vorgestellt werden. Das Blockdiagramm ist auf Abb. 1 gezeigt.

Zunächst wurde  $b = \hat{B} = 1$  gesetzt und der Dämpfungsparameter  $\varepsilon$  variiert.

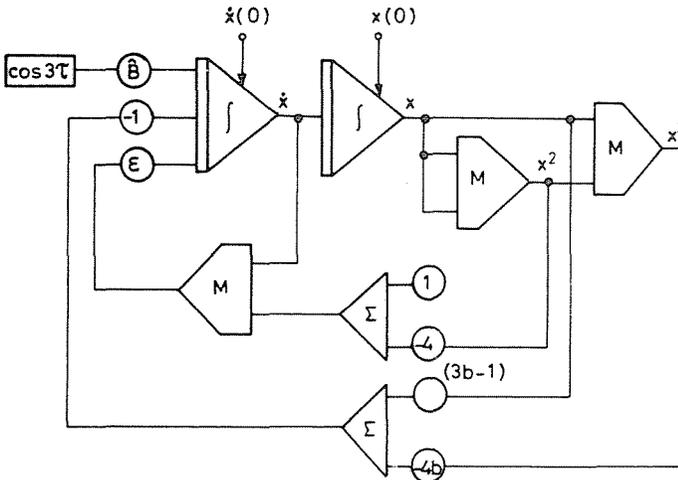


Abb. 1

### Der Bereich der exakten dreifachen Frequenzteilung

In dem Bereich

$$0,85 < \varepsilon < 67 \quad (2)$$

findet eine exakte dreifache Frequenzteilung statt. Das Ergebnis der globalen Analyse in der Mapping-Ebene für den Fall  $\varepsilon=2$ ;  $b = \hat{B} = 1$  ist auf Abb. 2 gezeigt. Der Verlauf der  $\omega$ - und  $\alpha$ -Invarianzkurven und die Lage der Einzugsgebiete ist von  $\varepsilon$  abhängig. Bei kleinen Werten von  $\varepsilon$  wird der Verlauf der  $\alpha$ - und  $\omega$ -Invarianzkurven sehr kompliziert. In dem Parameterbereich (Gl. 2) existieren in der Mapping-Ebene sieben Fixpunkte. Der Typ der Fixpunkte wurde durch Ermittlung der Floquetmultiplikatoren  $m_1$  und  $m_2$  bestimmt.

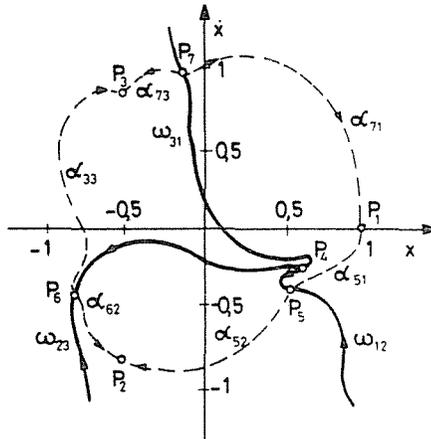


Abb. 2

Die Fixpunkte  $P_1(1; 0)$ ,  $P_2(-0,5; 0,866)$  und  $P_3(-0,5; -0,866)$  entsprechen drei stabilen dreifach subharmonischen Schwingungen (Transformation  $\Theta^3$ ) mit der Periode  $T=2\pi$ :

$$x_{(\lambda+1)} = \cos\left(\tau + \lambda \frac{2\pi}{3}\right); \quad \lambda=0, 1, 2. \quad (3)$$

Der Klirrfaktor bzw. der Oberwellengehalt ist Null. Die unterschiedlichen Lösungen ( $\lambda=0, 1, 2$ ) stellen sich je nach den Anfangsbedingungen ein.

Der Fixpunkt  $P_4$  (Transformation  $\Theta^1$ ) ist vollständig instabil. Die Fixpunkte  $P_5$ ,  $P_6$  und  $P_7$  sind direkt instabil. Abb. 3 zeigt den Verlauf der Floquetmultiplikatoren der Fixpunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$ .

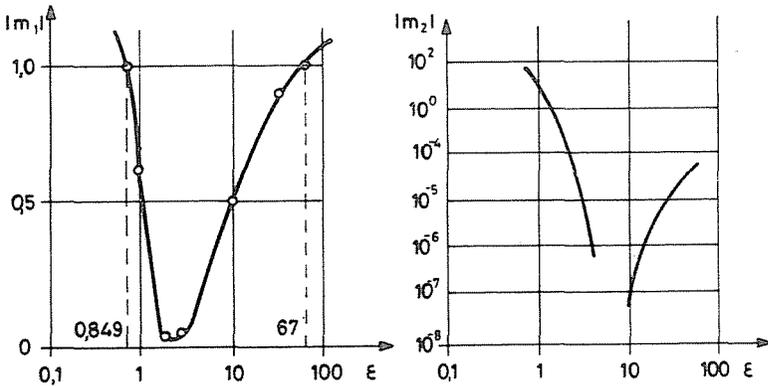


Abb. 3

Der optimale Bereich für den dreifachen Frequenzteiler ist

$$1,5 < \varepsilon < 5.$$

Er ist am weitesten von der Stabilitätsgrenze entfernt und sichert ein schnelles Einschwingen.

*Der Parameterbereich  $0,85 > \varepsilon > 0,57$  ( $b = B = 1$ )*

Bei  $\varepsilon = 0,845$  tritt eine Bifurkation auf. Die drei Fixpunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  werden instabil und spalten sich in je zwei vollständig stabile Fixpunkte ( $P_{11} - P_{12}$ ), ( $P_{21} - P_{22}$ ) und ( $P_{31} - P_{32}$ ) auf  $\Theta^3$ . Die Lösungen werden verzerrt (Klirrfaktor) und erhalten eine zusätzliche Phasenverschiebung.

Wenn man nun  $\varepsilon$  weiterhin verkleinert, werden die Fixpunktpaare ( $P_{11} - P_{12}$ ), ( $P_{21} - P_{22}$ ) und ( $P_{31} - P_{32}$ ) erneut instabil. In ihrer Umgebung erscheinen neue stabile Paare von Fixpunkten.

Mit kleiner werdendem  $\varepsilon$  bewegen sich die beiden Fixpunkte eines Paares in entgegengesetzter Richtung, längs einer Kurve — dem geometrischen Ort aller im Laufe der Verkleinerung von  $\varepsilon$  instabil gewordenen Fixpunkte.

Die Verzerrung der entsprechenden periodischen Lösungen wächst mit kleiner werdendem  $\varepsilon$ . Bei  $\varepsilon = 0,6$  beträgt der Klirrfaktor  $k \approx 4\%$ .

Die beschriebenen Erscheinungen sind schematisch in Abb. 4 gezeigt.

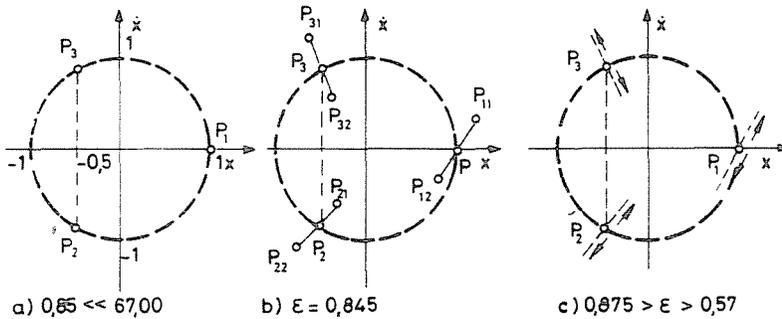


Abb. 4

*Der Parameterbereich  $0,57 > \varepsilon > 0,52$  ( $B = b = 1$ )*

Bei  $\varepsilon = 0,57$  tritt eine subharmonische Bifurkation auf. Jeder der sechs Fixpunkte spaltet sich in zwei Fixpunkte, die jetzt subharmonisch mit der Periode  $T = 4\pi$  (Transformation  $\Theta^6$ ) sind, auf.

Die neuen Paare befinden sich in der unmittelbaren Umgebung des jeweiligen bifurkierten Fixpunktes. Sie liegen auf der Kurve, die den geometrischen Ort der direkt instabilen Fixpunkte vom vorherigen Parameterintervall ( $0,845 > \varepsilon > 0,157$ ) darstellen.

Wenn  $\varepsilon$  verändert wird, bewegen sich die Fixpunkte längs dieser Kurve.

Bei  $\varepsilon = 0,53$  erfolgt erneut eine subharmonische Bifurkation. Die Fixpunkte spalten sich wiederum jeweils in zwei auf. Dabei erfolgt eine weitere Verdoppelung der Periode ( $T = 8\pi$ , — Transformation  $\Theta^{12}$ ).

Eine weitere Verkleinerung von  $\varepsilon$  führt zu weiteren subharmonischen Bifurkationen, die in immer kürzeren Abschnitten erfolgen. Die Zahl der Fixpunkte wird immer höher.

Bei  $\varepsilon = 0,52$  ist der Übergang zu dem chaotischen Zustand erfolgt.

### Der „Strange Attractor“

In dem Intervall  $0,52 > \varepsilon > 0,05$  ( $\hat{B} = b = 1$ ) bildet sich ein „strange Attractor“ aus. Seine topologische Struktur in der Mapping-Ebene verändert sich mit kleiner werdendem  $\varepsilon$ . Dieser Vorgang ist in Abb. 5 bis Abb. 8 gezeigt.

#### Der Parameterbereich $0,52 > \varepsilon > 0,45$ ( $B = b = 1$ )

In diesem Intervall besteht der strange Attractor aus drei getrennten linearen Bereichen. Die topologische Struktur ähnelt der topologischen Struktur im vorhergehenden Parameterbereich. Während jedoch die verschie-

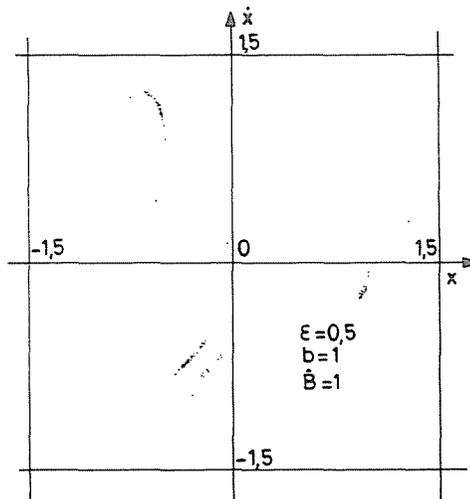


Abb. 5

denen Transformationspunkte im Bereich  $0,57 > \varepsilon > 0,52$  als Folge einer Veränderung von  $\varepsilon$  erscheinen, treten die verschiedenen Transformationspunkte im Bereich  $0,52 > \varepsilon > 0,48$  bei gleichem  $\varepsilon$  bei fortgesetzten Mappingprozessen auf.

Die Entwicklung der chaotischen Bewegung beginnt in der Umgebung der instabilen Fixpunkte, die in der Nachbarschaft der vormals stabilen Fixpunkte,  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  auftreten.

Die lineare Verteilung der Mappingpunkte (Abb. 6) erscheint in modifizierter Form in allen Stufen bis zu den vollständig ausgebildeten strange

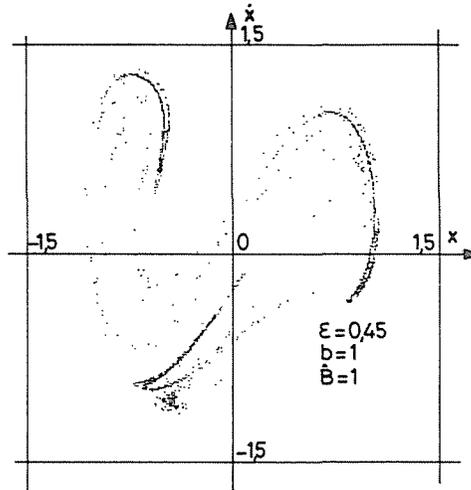


Abb. 6

Attractor. Sie ist offensichtlich eine Grundform der topologischen Struktur des strange Attractors.

Wenn  $\varepsilon$  kontinuierlich verkleinert wird, blähen sich die linearen Punktverteilungsbereiche in drei breitere Gürtel auf. Immer mehr Mappingpunkte streuen außerhalb der linearen Gürtel mit erhöhter Mappingpunktdichte.

Dies ist der Ausgangspunkt für die Ausbildung einer einzigen zusammenhängenden Struktur.

Der Parameterbereich  $0,45 > \varepsilon > 0,20$  ( $\hat{B} = b = 1$ )

Wird  $\varepsilon = 0,45$ , so kommt es zur vollständigen Strukturierung des Chaosbildes. Es entsteht ein zusammenhängender stranger Attractor (Abb. 7). Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit zuerst wesentlich größer, daß ein Abbildungspunkt in den bereits vorher beobachteten bandförmigen Gebieten liegt,

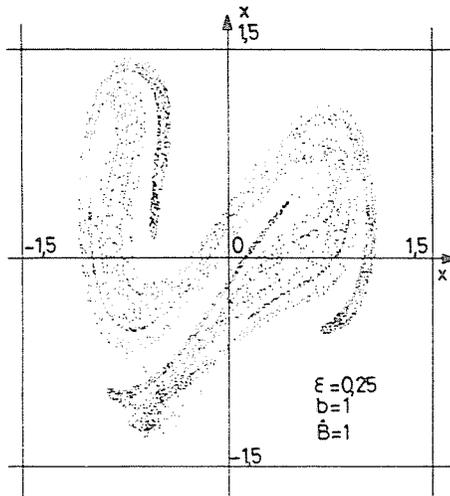


Abb. 7

als in den neu entstandenen Verbindungsbereichen. Das heißt, daß bei Parameterwerten zwischen  $0,2 < \varepsilon < 0,4$  eine Ausgangsgröße mit subharmonischen Anteilen dritten Grades (wie bei der exakten Frequenzteilung, nur hier mit sehr starkem Oberwellengehalt) vorherrscht, diese aber ab und zu durch stochastische Bewegungen gestört wird.

*Der Parameterbereich  $0,2 > \varepsilon > 0,05$  ( $\hat{B} = b = 1$ )*

In diesem Bereich verschwinden mit kleiner werdendem  $\varepsilon$  allmählich die Gebiete mit erhöhter Abbildungspunktdichte (Abb. 8). Das bedeutet, daß bei diesen Parametern (z. B.  $\varepsilon = 0,05$ ) die subharmonischen Anteile nicht mehr dominieren, sondern mit annähernd gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten wie andere zufällige Bewegungen. Die Struktur des voll ausgebildeten Chaos in der Poincaré-Ebene ist in weiten Grenzen von den Anfangsbedingungen unabhängig.

*Der Parameterbereich  $\varepsilon < 0,05$*

Bei diesen geringen Dämpfungswerten treten erneut Fixpunkte auf, das heißt, die chaotischen Lösungen verschwinden. Hierbei ist jedoch das Phänomen zu beobachten, daß der Einschwingvorgang chaotischen Charakter trägt. Erst nach mehreren hundert Perioden wird eine stabile, periodische Lösung erreicht. Die sich einstellenden Ausgangsgrößen sind subharmonisch

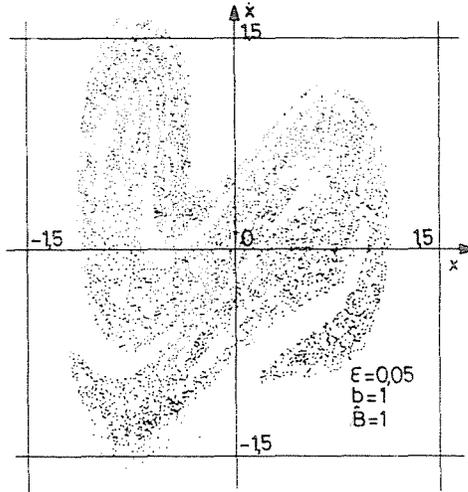


Abb. 8

(z. B. im Falle  $\varepsilon=0,03$  bei  $\Theta^3$  zwei vollständig stabile Fixpunkte bzw. im Falle  $\varepsilon=0,005$  bei  $\Theta^3$  vier vollständig stabile Fixpunkte).

Der Sachverhalt ist in Abb. 9 gezeigt. Der linke Teil des Bildes stellt einen Ausschnitt aus dem chaotischen Einschwingvorgang, der rechte Teil die stabile eingeschwungene Lösung dar.

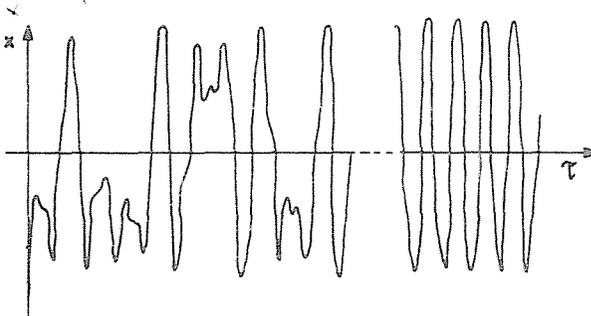


Abb. 9

### Verhalten der chaotischen Lösung bei Variation der Erregeramplitude $\hat{B}$

Im folgenden wird ein Überblick über die grundsätzliche Lösungsstruktur bei konstanter Dämpfung ( $\varepsilon=0,1$ ) in Abhängigkeit von der Erregeramplitude  $\hat{B}$  gegeben.

Betrachtung für  $\hat{B} > 1$

Wird  $\hat{B}$  kontinuierlich vergrößert, so kommt es zu einer Ausdehnung des strange Attractors in Richtung der  $\dot{x}$ -Achse (Abb. 10). Ausgangsbild ist dabei der strange Attractor bei  $\varepsilon=0,1$  und  $b=\hat{B}=1$ . Es ist zu beobachten, daß die bandförmigen Grundstrukturen in ihrer Längenausdehnung zunehmen und daß sie die Struktur immer weiter umschlingen. Dabei werden die Bandgebiete immer schmaler und deren Enden (Spitzen) sind durch eine zunehmende Abbildungspunktdichte gekennzeichnet. Es dominieren jetzt wieder bestimmte

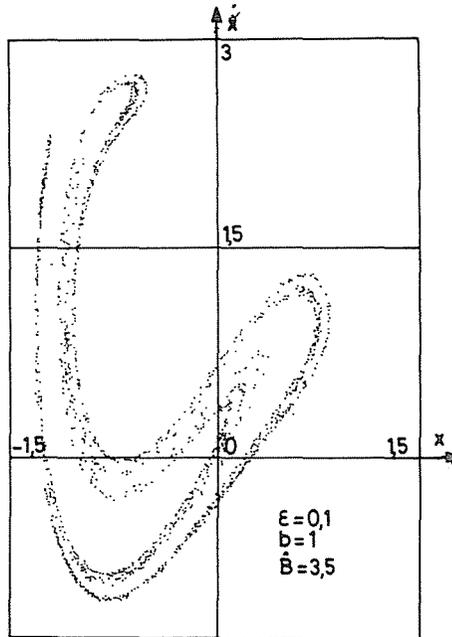


Abb. 10

durch diese Spitzen charakterisierte Schwingungsanteile im Chaos. Die Fläche, die von Transformationspunkten bedeckt wird, nimmt immer mehr ab. Dieses weist darauf hin, daß es bei weiterer Erhöhung von  $\hat{B}$  wieder zu periodischen Lösungen kommen wird. Mit wachsendem  $\hat{B}$  begrenzt sich die chaotische Struktur immer weiter auf bestimmte Kurvenstücke, bis es schließlich zwischen  $3,85 < \hat{B} < 3,9$  zum Abreißen der zusammenhängenden Struktur kommt. In diesem Übergangsbereich existieren fünf separate Teilstücke (Abb. 11).

Der Übergang vom Chaos zur periodischen Lösung ist bei  $\hat{B}=4$  abgeschlossen. Es existieren bei  $\Theta^3$  fünf Fixpunkte mit der Periode  $10\pi$ . Dabei sind im Intervall  $3,9 < \hat{B} < 4,0$  wiederum die charakteristischen subharmonischen

schen Vervielfachungen beim Übergang von der periodischen Bewegung bei  $\hat{B}=4,0$  zu der aperiodischen bei  $\hat{B}=3,9$  zu beobachten.

Erreicht man bei kontinuierlicher Parametervergrößerung den Wert  $\hat{B}=5,28$ , so tritt eine erneute Bifurkation auf. Die fünf Fixpunkte verschwinden, und sie gehen bei  $\Theta^3$  in zwei neue über ( $T=4\pi$ ).

Schließlich zeigt das System bei Erregeramplituden  $\hat{B}=5,8$  keine Frequenzteilung mehr. In der Poincaré-Ebene liegt nur noch ein Fixpunkt vor. Das System schwingt mit der Frequenz der Erregerfunktion, wobei die zugehörigen Ausgangsgrößen stark verzerrt sind.

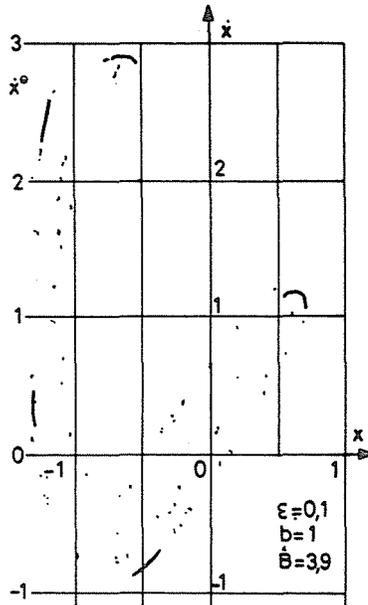


Abb. 11

### Betrachtungen für $\hat{B} < 1$

In diesem Parameterbereich treten bei Variation von  $\hat{B}$  ähnliche Erscheinungen, wie sie bei Variation von  $\varepsilon$  dargelegt wurden, auf.

Ist  $\hat{B} < 0,64$ , so liegt eine Frequenzteilung dritten Grades vor, die durch drei vollständig stabile Fixpunkte gekennzeichnet ist. Erreicht die Erregeramplitude den kritischen Wert  $\hat{B}=0,64$ , so spalten sich die drei Fixpunkte in jeweils zwei neue, also insgesamt sechs auf.

Der Übergang zur chaotischen Lösung vollzieht sich zwischen  $0,68 < \hat{B} < 0,7$ . Dabei tritt bei  $\hat{B}=0,68$  eine weitere subharmonische Bifurkation

auf. Nachfolgende periodische Verdoppelungen vollziehen sich dann in immer kleineren Intervallabschnitten, bis bei ca.  $\hat{B}=0,7$  der chaotische Zustand eingenommen wird. Nun bilden zuerst wieder drei separate Kurvenstücke den strange Attractor im Übergangsbereich zum vollausgebildeten Chaos, das sich bei ca.  $\hat{B}=0,78$  einstellt.

Diese Übergangsstrukturen stellen wiederum die Orte der instabilen Lösungen bei  $0,64 < \hat{B} < 0,68$  dar. Also auch hier nimmt die chaotische Bewegung zuerst die in der Nähe der vormals stabilen Fixpunkte liegenden instabilen Lösungen ein, bevor sich dann eine zusammenhängende Struktur in der Poincaré-Ebene herausbildet.

### Zusammenfassung

Es wurde eine Analyse des Übergangs von periodischen zu stochastischen Lösungen der Frequenzteilergleichung dritten Grades durchgeführt und dabei die Struktur des Chaos in der Poincaré-Ebene näher erläutert.

Der chaotische Zustand ist an eine Vielzahl von instabilen Lösungen des Systems gebunden. Voraussetzung für das Entstehen dieser Instabilitäten ist die Bifurkation der stabilen periodischen Lösungen. In immer kleiner werdenden Intervallabschnitten des Parameterbereiches vollziehen sich subharmonische Verdoppelungen, bis die Periode der Lösungen schließlich gegen unendlich strebt. Dabei entstehen in der Poincaré-Ebene homokline Strukturen, welche sich zunächst in der Umgebung der vormals stabilen Fixpunkte herausbilden. Bevor sich das Chaos vollständig strukturiert, werden dort Übergangsstrukturen eingenommen. In diesen Übergangsbereichen dominieren im Zeitverhalten die Ausgangsgrößen, die den exakten periodischen Lösungen (hier stark verzerrt) entsprechen, welche aber oft durch regellose Schwingungsanteile gestört werden.

Diese Übergangsstrukturen (separate Teilstücke) bilden dann das Grundgerüst des vollständig ausgebildeten Chaos in der Poincaré-Ebene, wobei die Konturen des Chaos erhalten bleiben.

Ein Netzwerk, das durch die Differentialgleichung (1) beschrieben wird ist in den Literaturstellen [1] und [6] behandelt.

### Literatur

1. PHILIPPOW, E.—DO TRUNG TA: Synthese dreifacher Frequenzteilerschaltungen. EuM-Wien, 1984
2. HAYASHI, CH.: Nonlinear oscillations in physical systems. New York, San Francisco, Toronto, London, McGraw Hill, 1964
3. HAYASHI, CH.—ABE, M.—OSHIMA, K.—KAWAKAMI, H.: The method of mapping as applied to the solutions for certain types of nonlinear differential equations. Nineteenth Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Kiev, August/September 1981
4. HAYASHI, CH.: Selected Papers on Nonlinear Oscillations. Nippon Printing and Publishing Company
5. HAYASHI, CH.—KAWAKAMI, H.: Bifurcations and the generation of chaotic states in the solutions of nonlinear differential equations. Fourth Nat. Congress of the theoretical and applied mechanics. Varna, September 1981

6. PHILIPPOW, E.—DO TRUNG TA: Ein Beitrag zur Theorie der Frequenzteilung. ISTET Ilmenau, September 1983, Tagungsbericht
7. SALAM—MARSDEN—VARAIYA: Chaos and Arnold diffusion in dynamical systems. IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-30, No. 9 pp 667—708, September 1983
8. PHILIPPOW, E. S.: Some properties of Frequency Dividing Networks. Proceedings of ISCAS 85 — Kyoto
9. PHILIPPOW, E.—DO TRUNG TA: Frequency Dividing Networks — Modeling, Analysis and Networksynthesis. ISCAS 84 — Montreal 1984
10. PHILIPPOW, E.—DO TRUNG TA— M'PASSY, A.: Synthese eines Chaosgenerators. ISTET 85 — Moskau, Tagungsbericht.

Prof. Dr. Eugen PHILIPPOW, Wielandstr. 6., 6300 Ilmenau, DDR  
Dietmar SCHUCHARDT, Am Stadion 14, 6530 Hermsdorf, DDR