БЫСТРЫЕ И МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. А. Соболев

Кафедра дифференциальных уравнений

Куйбышевского университета, г. Куйбышев*

Поступило 9. VII. 1984г.
Представлено проф. д-ром. П Рожа

Summary

A method of integral manifolds is derived to study systems of singularly perturbed differential equations. The results are applied to problem of decomposition for gyroscopic systems.

Введение

Гироскопические приборы представляют собой сложные элекромеханические системы, в которых имеются роторы с быстрым вращением. Движение таких систем описывается громоздкими и трудными для анализа дифференциальными уравнениями. Поэтому при исследовании уравнений движения обычно используют различные приближенные методы.

Наиболее распространенным методом является использование более простых уравнений прецессионной теории гироскопов. При этом формируется упрощенная модель системы, которая отличается от исходной пренебрежением кинетическими моментами элементов подвеса гироскопического устройства, кожухов его гироскопов, кинетическими моментами роторов электродвигателей и датчиков углов, а также экваториальными составляющими кинетических моментов роторов гироскопов. Этод метод наиболее полно разработан А. Ю. Ишлинским [1]. Такой неформальный подход требует тонкой механической интуиции и опыта работы с гироскопическими приборами.

Д. Р. Меркин показал, что уравнения движения широкого класса гироскопических приборов представляют собой систему дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной [2].

* Работа выполнена на кафедре математики электротехнического факультета Будапештского технического университета.

Такие системы обычно называются сингулярно возмущенными. Формально переход к уравнениям прецессионной теории совершается путем отбрасывания некоторых малых членов в уравнениях движения. При этом возникает вопрос о математическом обосновании допустимости такого перехода [2, 3].

Уравнения движения гироскопической системы можно представить в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,$$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ay)=-[G+\varepsilon B]y+\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Ay)\right]'y+\varepsilon Q. \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный вектор обобщенных координат, $A=A(t,x)$ — симметрическая положительно определенная матрица, $G=G(t,x)$ — кососимметрическая матрица гироскопических сил, $B=B(t,x)$ — симметрическая матрица диссипативных сил, $Q=Q(t,x)$ — вектор обобщенных сил, ε — малый положительний параметр, штрих означает транспонирование [2]. Будем предполагать, что A, B, G, G^{-1}, Q ограничены и достаточное число раз дифференцируемы по t и x.

Прецессионные уравнения имеют вид

$$(G+\varepsilon B)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varepsilon Q. \tag{2}$$

Особенностью гироскопических систем является наличие двух типов движений: быстрых — нутационных и медленных — прецессионных. Система уравнений (1) описывает оба типа движений, а система (2) — только медленные.

В работах [4, 5] для обоснования допустимости перехода к прецессионным уравнениям и исследования связи между решениями систем (1) и (2) применялся метод интегральных многообразий [6]. В этих работах показано, что система (1) имеет интегральное многообразие (инвариантную поверхность) $y=\varepsilon h(t,x,\varepsilon)$, уравнения на котором имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varepsilon h(t,x,\varepsilon). \tag{3}$$

Эти уравнения с высокой степенью точности по отношению к ε совпадают с уравнениями (2), если последние разрешить относительно производной.

Уравнения на многообразии — это точные уравнения прецессионных движений. В работах [4, 5] показано, что решение уравнений (1) представимо в виде суммы некоторого решения уравнений (3) и малой быстро гаснущей добавки. Кроме того, нулевое решение системы (1) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает нулевое решение уравнений (3).

В настоящей работе метод интегральных многообразий применяется для декомпозиции системы (1) на уравнения, описывающие только медленные или только быстрые движения.

Интегральные многообразия сингулярно возмущенных систем

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}=f(t,x,y,\varepsilon),\qquad \varepsilon\dot{y}=g(t,x,y,\varepsilon). \tag{4}$$

Здесь x и f — m-мерные векторы, y и g — n-мерные векторы, ε — малый положительный параметр. Функции f и g определены и непрерывны по совокупности переменных при $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $t\in R$, $x\in R^m$ и y из некоторой области $D\subset R^n$. Система (4) содержит малый параметр при части производных и поэтому является сингулярно возмущенной. Положив в (4) $\varepsilon=0$, получим так называемую порождающую систему

$$\dot{x}=f(t,x,y,0),\qquad g(t,x,y,0)=0.$$

Предположим, что второе уравнение этой системы имеет изолированное решение $y=h_0(t,x)$. В работах [4—7] приводятся достаточные условия существования интегрального многообразия $y=h(t,x,\varepsilon)$, $h(t,x,0)=h_0$, движение на котором описывается уравнениями

$$\dot{u}=f(t,u,h(t,u,\varepsilon),\varepsilon). \tag{5}$$

Анализ этих уравнений часто позволяет просто решать задачи об устойчивости, о периодических решениях и другие качественные задачи для исходной системы.

Применим теперь интегральные многообразия для декомпозиции системы (4). С этой целью введем новые переменные u, z и w по формулам $z=y-h(t,x,\varepsilon)$, $w=x-u$, где u удовлетворяет уравнению (5) и рассмотрим вспомогательную систему вида

$$\begin{aligned}
&\dot{u}=f(t,u,h(t,u,\varepsilon),\varepsilon),\\
&\dot{w}=f(t,u+w,z+h(t,u+w,\varepsilon),\varepsilon)-f(t,u,h(t,u,\varepsilon),\varepsilon),\\
&\varepsilon\dot{z}=g_1(t,u,w,z,\varepsilon),
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$g_1 = g(t, u+w, z+h(t, u+w, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- g(t, u+w, h(t, u+w, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \frac{\partial h}{\partial x}(t, u+w, \varepsilon)\,[f(t, u+w, z+h(t, u+w, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- f(t, u+w, h(t, u+w, \varepsilon), \varepsilon)]\,.$$

Используя модификацию техники Боголюбова — Митропольского [6], аналогично тому, как это делается в работе [8], можно получить достаточные условия существования интегрального многообразия $w = \varepsilon H(t, u, z, \varepsilon)$ системы (6), движение по которому описывается уравнениями

$$\dot{u} = f(t, u, h(t, u, \varepsilon), \varepsilon)\,, \tag{7}$$

$$\varepsilon\dot{v} = g_1(t, u, \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), v, \varepsilon)\,. \tag{8}$$

При этом решения системы (4) связаны с решениями системы (7)—(8) соотношениями

$$\begin{aligned} x &= u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon)\,, \\ y &= v + h(t, x, \varepsilon) = v + h(t, u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), \varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (7) не содержит v и может быть решено независимо от (8). Соотношения (9) показывают, что решения системы (4) представляют собой суперпозицию медленной переменной u и быстрой переменной v. Эти соотношения позволяют произвести декомпозицию не только уравнений, но и начальных условий. Если для (4) заданы начальные условия $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, то из (9) следует, что $v_0 = v(t_0) = y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)$, а $u_0 = u(t_0)$ определяется из уравнения

$$x_0 = u_0 + \varepsilon H(t_0, u_0, v_0, \varepsilon)\,. \tag{10}$$

Рассмотрим частный случай. Предположим, что функции f, g и h_0 дважды непрерывно дифференцируемы и собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(t, x)$ матрицы $\left.\dfrac{dg}{dy}\right|_{y = h_0(t,x)}$, $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i \leqq -2\beta < 0$. Тогда интегральные многообразия $y = h(t, x, \varepsilon)$, $w = \varepsilon H(t, u, z, \varepsilon)$ существуют, функции h и H гладким образом зависят от всех переменных и функция H удовлетворяет неравенствам

$$|H(t, u, z, \varepsilon)| \leqq a|z|\,, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}|H(t,u,z,\varepsilon)-H(t,\bar{u},z,\varepsilon)|\leqq b|z|\cdot|u-\bar{u}|,\\ |H(t,u,z,\varepsilon)-H(t,u,\bar{z},\varepsilon)|\leqq c|z-\bar{z}|,\end{gathered}\tag{12}$$

где a, b, c — некоторые положительные числа. Кроме того, решения уравнения (8) подчиняются неравенству

$$|v(t)|\leqq K|v_0|e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(t-t_0)},\quad K>0,\quad t\geqq t_0.\tag{13}$$

Используя то обстоятельство, что функции h и H удовлетворяют условию Липшица по переменным x, u и z, из неравенств (11), (13) и представления (9) легко получить, что задача об устойчивости системы (4) эквивалентна задаче об устойчивости уравнения (7), описывающего движение по интегральному многообразию $y=h(t,x,\varepsilon)$.

В работах [4, 5, 7] показано, что функция h может быть найдена с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра $h(t,x,\varepsilon)=h_0((t,x)+\varepsilon h_1(t,x)+\varepsilon^2\ldots$ из уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial h}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}f(t,x,h,\varepsilon)=g(t,x,h,\varepsilon),\tag{14}$$

которое получается формальной подстановкой $h(t,x,\varepsilon)$ вместо y в (4), если f и g достаточное число раз дифференцируемы по всем переменным. Аналогичным образом можно показать, что функция $\varepsilon H(t,u,z,\varepsilon)$ также может быть найдена в виде асимптотического разложения $\varepsilon H=\varepsilon H_1(t,u,z)+\varepsilon^2 H_2(t,u,z)+\varepsilon^3\ldots$ из уравнения

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial H}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial H}{\partial u}f(t,u,h(t,u,\varepsilon),\varepsilon)+\frac{\partial H}{\partial z}g_1(t,u,\varepsilon H,z,\varepsilon)=\\ =f(t,u+\varepsilon H,z+h(t,u+\varepsilon H,\varepsilon),\varepsilon)-f(t,u,h(t,u,\varepsilon),\varepsilon),\end{gathered}\tag{15}$$

которое получено в результате формальной подстановки $\varepsilon H(t,u,z,\varepsilon)$ вместо w в (6).

Следует отметить, что представление (9) и оценка (13) имеют место только для достаточно малых по норме значениях вектора $|z|$, другими словами, они справедливы только для тех решений, для которых достаточно мала величина $|y_0-h(t_0,x_0,\varepsilon)|$, характеризующая расстояние от начальной точки (x_0,y_0) до интегрального многообразия $y=h(t,x,\varepsilon)$ в начальный момент времени $t=t_0$.

Начальное значение u_0 для уравнения (7) можно найти в виде разложения по степеням ε из (10) — $u_0=u_0^0+\varepsilon u_0^1+\varepsilon^2\ldots$. При этом получаем $u_0^0=x_0$, $u_0^1=-H(t_0,x_0,y_0-h(t_0,x_0,0),0)$.

Заметим, что соотношения (9) могут быть использованы и для декомпозиции краевых условий. Пусть для примера

$$x(1)=x_1, \qquad y(0)=y_0 .$$

Из (9), пренебрегая членами порядка $0(e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}})$, получаем

$$u(1)=x_1, \quad v(0)=y_0-h(0, u(0)+\varepsilon H(0, u(0), v(0), \varepsilon), \varepsilon) .$$

Можно рассматривать и более общие краевые условия, но для v всегда будет получаться начальное условие, если можно пренебрегать членами порядка $0(e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}})$.

Декомпозиция уравнений гироскопических систем

Как отмечалось во введении, система (1) имеет интегральное многообразие $y=\varepsilon h(t, x, \varepsilon)$, движение по которому описывается уравнением (3). Введем новые переменные $z=y-\varepsilon h(t, x, \varepsilon)$, $w=x-u$, где u удовлетворяет уравнению (3), и рассмотрим систему уравнений, аналогичную (6):

$$\dot{u}=\varepsilon h(t, u, \varepsilon),$$

$$\dot{w}=\varepsilon h(t, u+w, \varepsilon)-\varepsilon h(t, u, \varepsilon)+z, \tag{16}$$

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Az)=-[G+\varepsilon B]z+\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\partial A}{\partial x} z\right]' z+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial x} z\right]' h+\left[\frac{\partial A}{\partial x} h\right]' z\right\},$$

где

$$A=A(t, u+w), \quad G=G(t, u+w), \quad B=B(t, u+w), \quad h=h(t, u+w, \varepsilon).$$

Эта система, в свою очередь, имеет интегральное многообразие, движение на котором описывается уравнениями

$$\dot{u}=\varepsilon h(t, u, \varepsilon), \tag{17}$$

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Av)=-[G+\varepsilon B]v+\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\partial A}{\partial x} z\right]' z+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial x} z\right]' h+\left[\frac{\partial A}{\partial x} h\right]' z\right\}, \tag{18}$$

где

$$A=A(t, u+\varepsilon H), \quad G=G(t, u+\varepsilon H), \quad B=B(t, u+\varepsilon H),$$

$$h=h(t, u+\varepsilon H, \varepsilon), \quad H=H(t, u, v, \varepsilon).$$

Переменные x и y связаны с u и v соотношениями

$$x=u+\varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), \tag{19}$$

$$y=v+\varepsilon h(t, x, \varepsilon)=v+\varepsilon h(t, u+\varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), \varepsilon) . \tag{20}$$

Уравнение (17) описывает прецессионные колебания гироскопической системы, а уравнение (18) — нутационные колебания. Формула (19) показывает, что вектор x представляет собой суперпозицию прецессионных и нутационных колебаний.

Пусть, для простоты, матрица A — единичная и собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(t, x)$ матрицы B удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i > \beta > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

Тогда для решений уравнения (18) при достаточно малых по норме значениях v_0 справедливо неравенство

$$|v(t)| \leqq K|v_0|e^{-\beta(t-t_0)}, \qquad K>0, \quad t \geqq t_0, \tag{22}$$

аналогичное (13). Если же матрица A — не единичная, то (21) должно выполняться для собственных значений матрицы $F^{-1}BF^{-1} + \frac{1}{2}(F_1 + F_1')$, где $F^2 = A$, $F_1 = F^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}$ [5]. Неравенство (22) означает, что нутационные колебания являются затухающими при наличии диссипативных сил типа вязкого трения.

Как и ранее, из (19), (20) и оценки (22) следует, что задача об устойчивости (1) эквивалентна задаче об устойчивости (17).

Из уравнений, аналогичных (14), (15) и получаемых формальной подстановкой $\varepsilon h(t, x, \varepsilon)$ вместо y в (1) и $\varepsilon H(t, u, z, \varepsilon)$ вместо w в (16), находим

$$\varepsilon h(t, x, \varepsilon) = \varepsilon h_1(t, x) + \varepsilon^2 h_2(t, x) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\varepsilon H(t, u, z, \varepsilon) = \varepsilon H_1(t, u, z) + \varepsilon^2 H_2(t, u, z) + \varepsilon^3 \ldots$$

Здесь

$$h_1 = G^{-1}Q, \quad h_2 = -G^{-1}\left[Bh_1 + \frac{\partial}{\partial t}(Ah_1)\right],$$

где

$$A = A(t, x), \quad G = G(t, x), \quad B = B(t, x), \quad Q = Q(t, x);$$

$$H_1 = -G^{-1}Az, \quad H_2 = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}G^{-1}\right)A - G^{-1}B\right]G^{-1}Az + O(|z|^2),$$

где

$$A = A(t, u), \quad G = G(t, u), \quad B = B(t, u).$$

Если для уравнений (1) заданы начальные условия $x(t_0) = \alpha$, $y(t_0) = \varepsilon\alpha_1$, то начальное значение для уравнения (17) определяется из уравнения

$$\alpha = u_0 + \varepsilon H(t_0, u_0, \varepsilon\alpha_1 - \varepsilon h(t_0, \alpha, \varepsilon), \varepsilon)$$

в виде разложения $u_0 = u_0^0 + \varepsilon u_0^1 + \varepsilon u_0^2 + \varepsilon^3 \ldots$, где $u_0^0 = \alpha$, $u_0^1 = 0$, $u_0^2 = G^{-1}(t_0, \alpha) A(t_0, \alpha) [\alpha_1 - G^{-1}(t_0, \alpha) Q(t_0, \alpha)]$.

Заметим, что условие (21) может быть несколько ослаблено. В этом неравенстве можно считать β не фиксированным положительным числом, а положительным малым параметром, если только $\varepsilon^3 = O(\beta)$. Это означает, в частности, что переход к прецессионным уравнениям допустим и для систем с малой диссипацией. Справедливость этого факта устанавливается на основании результатов работы [7].

Декомпозиция линейных систем

Рассмотрим теперь линейную автономную гироскопическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \varepsilon A \dot{y} &= -[G + \varepsilon B] y + \varepsilon C x . \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь A, G, B и C — постоянные матрицы, $\det G \neq 0$ [2].

Для этой системы $h(t, x, \varepsilon) = P(\varepsilon) x$, $H(t, u, z, \varepsilon) = L(\varepsilon) z$, где P и L — матричные решения уравнений

$$\varepsilon A (\varepsilon P)^2 = -[G + \varepsilon B] \varepsilon P + \varepsilon C ,$$

$$-L A^{-1} [G + \varepsilon B + \varepsilon^2 A P] = I + \varepsilon P \cdot \varepsilon L$$

и могут быть найдены из этих уравнений в виде сходящихся степенных рядов

$$P = P_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon^2 P_3 + \varepsilon^3 \ldots, \quad L = L_1 + \varepsilon L_2 + \varepsilon^2 L_3 + \varepsilon^3 \ldots$$

При этом

$$P_1 = G^{-1} C, \quad P_2 = -G^{-1} B P_1, \quad P_3 = -G^{-1} [B P_1 + A (P_1)^2];$$

$$L_1 = -G^{-1} A, \quad L_2 = G^{-1} B G^{-1} A, \quad L_3 = -[P_1 L_1 + L_1 P_1 + L_2 A^{-1} B] G^{-1} A.$$

Соотношения (19), (20) в рассматриваемом случае принимают вид

$$\begin{aligned} x &= u + \varepsilon L v , \\ y &= v + \varepsilon P x = (I + \varepsilon^2 P L) v + \varepsilon P u . \end{aligned} \tag{24}$$

Прецессионные колебания описываются уравнением

$$\dot{u} = \varepsilon P(\varepsilon) u ,$$

а нутационные колебания уравнением

$$\varepsilon A \dot{v} = -[G + \varepsilon B + \varepsilon^2 A P] v .$$

Преобразование (24) может быть применено и для декомпозиции уравнений гироскопической системы, находящейся под воздействием случайных возмущений. Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,, \\ \varepsilon A\dot{y} &= -[G+\varepsilon B]y+\varepsilon Cx+\varepsilon b\dot{w}(t)\,, \end{aligned} \tag{25}$$

полученные из (23) добавлением во второе уравнение слагаемого $\varepsilon b\dot{w}$, где b — постоянный вектор, а $\dot{w}$ — белый шум.

После преобразования (24) система (25) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon P(\varepsilon)u-\varepsilon LA^{-1}b\dot{w}\,, \\ \varepsilon A\dot{v} &= -[G+\varepsilon B+\varepsilon^2 AP]v+\varepsilon b\dot{w}\,. \end{aligned}$$

Естественно считать, что первое уравнение описывает прецессионные колебания, а нутационные колебания описываются уравнением

$$\varepsilon A\dot{v}_1 = -[G+\varepsilon B+\varepsilon^2 AP]v_1,$$

где

$$v_1 = v-\int_0^t \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(G+\varepsilon B+\varepsilon^2 AP)(t-s)\right]b\,\mathrm{d}w(s).$$

Резюме

Особенностью гироскопических систем является наличие двух типов движений — быстрых и медленных. Это обстоятельство благоприятствует применению метода интегральных многообразий для анализа таких систем. Использование метода дает возможность выделить инвариантную поверхность невысокой размерности, на которой возможны только медленные движения, и произвести декомпозицию уравнений движения, что позволяет существенно упростить анализ задач динамики гироскопических систем.

Литература

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М., «Наука», 1974.
3. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В. О прецессионных уравнениях гироскопических систем. — ПММ *40*, 230 (1976).
4. Соболев В. А., Стрыгин В. В. О допустимости перехода к прецессионным уравнениям гироскопических систем. — Изв. АН СССР. МТТ, № 5, 10 (1978)
5. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Метод интегральных многообразий в задаче о приемлемости решения прецессионных уравнений гироскопических систем. — В. кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск, 1979, 38.

6. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., «Наука», 1973.
7. Соболев В. А. К теории интегральных многообразий одного класса систем сингулярно возмущенных уравнений. — В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев, 1980, 124.
8. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. J. Different. Eq., *3*, 546 (1967).

Владимир Андреевич Соболев СССР, Куйбышев, пр. Ленина, 3, кв. 113.