

GEOMETRIE UND BERECHNUNG VON HYPERKLOTHOIDEN MIT ZWEI PARAMETERN FÜR STRASSENPROJEKTIERUNG

E. NEMESDY

Lehrstuhl für Straßenbau,
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 15. December 1984

Summary

Clothoid curves have since long been used in Hungarian road engineering, at a rate equal to straight lines and circular arcs. On German, and recently, on Italian initiative, road engineering applications of two-parameter hyperclothoids emerged. Sets of exact and approximate formulae have been developed for calculating hyperclothoids as a function of arc length. Approximate solutions involve cases of easings between inflection inverts (opposite road bends) and equidirectional circular arcs.

Aktualität: Rechenanlage und Zwangspunkte

Die ersten offiziellen, zeitgemäßen und als neu geltenden Straßenprojektierungsrichtlinien wurden in Ungarn noch im Jahre 1938 von dem derzeitigen Ministerium für Handels- und Verkehrswesen in Budapest herausgegeben. Es gereicht zum Ruhm der führenden ungarischen Ingenieure dieser Zeit, daß bereits 1938 bei der Behandlung der Linienführung der Straßen der Anwendung von Übergangsbögen sowie des Ästhetik der Straße und ihrer Umgebung — nach dem heutigen Wortgebrauch fahrpsychologischen und Umweltschutzrücksichten — besondere Abschnitte gewidmet waren.

In der Nachkriegszeit erschienen im Jahre 1952 neue *Straßenprojektierungsrichtlinien* in Ungarn, in denen die bisherigen ausländischen und einheimischen Erfahrungen zur Geltung kamen, und wo statt des als Übergangsbogen bis zu jener Zeit gebräuchlichen, aus dem Eisenbahnbau übernommenen kubischen Parabelbogens schon der Klothoidenbogen vorgeschrieben war. Das bedurfte damals einer Vorbereitung von mehreren Jahren. Zu dieser Zeit war nämlich nur die erste Klothoidentafel von *Schürba* in einigen Exemplaren bekannt, mit der früheren *Kasperschen* Einheitsklothoidenableitung der Klothoide, wo die mehrgliedrigen Formeln der Klothoidendaten stets aufgrund des Winkels τ als unabhängigen Veränderlichen angegeben waren. Der Verfasser erhielt damals die ehrenvolle Aufgabe und Möglichkeit, noch zu Beginn seiner Laufbahn, in den Jahren 1950/51 eine von diesen abweichende,

ungarische Klothoidentafel auszuarbeiten. Hier wurde unter Anwendung der *Bogenlänge l als unabhängigen Veränderlichen*, mit Hilfe von damals als neu geltenden Formeln der Klothoidenbogen abgeleitet. Die Einheitsklothoide und die Normklothoide wurden mit fünfstelligen Tabellen bzw. 1 cm Genauigkeit von einer organisierten Technikergruppe mit der mechanischen Rechenmaschine, für die neuen ungarischen Straßenprojektierungsrichtlinien abgestimmt, berechnet. Dieses *Handbuch der Strassenabsteckung* (Bde. I—II) erschien im Jahre 1952 und wurde 1963 und 1974 in neuen Auflagen herausgegeben. Ein Jahr später erschien die große und ausführlichere ausgezeichnete *Kasper-Schürba-Lorenzsche* Klothoidentafel von mm-Genauigkeit, die von der ungarischen unabhängig, auch in Abhängigkeit von der Bogenlänge l berechnet war und dadurch eine wertvolle Kontrolle ermöglichte.

Nach solchen Voreignissen ist leicht zu verstehen, daß sich in der ungarischen Straßenprojektierung die Anwendung von Klothoidenbögen als gleichgestellter Linienführungselemente schon seit langem eingebürgert hat, schon bevor von uns Autobahnen geplant oder gar gebaut worden wären.

In den 60er und 70er Jahren wurde auch in Ungarn von dem Straßen- und Eisenbahnbauplanungsunternehmen (UVATERV) Budapest eine vielfältige, große Computerprogrammserie für Straßenprojektierung (UTESZ) ausgearbeitet, die in der Entwurfspraxis oft benutzt und zu einer Grundlage des Universitätsunterrichts wurde. Bei den Straßenprojektierungsarbeiten auf Export wurden die Teilprogramme in kleineren programmierbaren Kalkulatoren mit wenig umfangreichem Magnetkarten-Schreibgerät zusammen mit den Klothoidenformeln benutzt. Klothoidentafeln wurden von den Ingenieuren nur aus Sicherheitsgründen mitgenommen.

Die stürmische Verbreitung der Personalcomputer hat mit einigen Jahren Verzögerung auch Ungarn erreicht. Zu der Ausarbeitung neuer Straßenprojektierungsprogramme mit interaktiven Programmen wurde dem Lehrstuhl für Straßenbau der Technischen Universität Budapest der erste Anstoß im Jahre 1981 durch eine *unter Leitung von Professor Krebs am Lehrstuhl für Straßenbau der Universität Karlsruhe* vorgelegte Forschungsarbeit gegeben. Dieser Erfahrungsaustausch war eines der für den ungarischen Partner nützlichsten Ergebnisse der Kooperation von mehreren Jahrzehnten der beiden Lehrstühle. Die mikrorechnergestützte Straßenprojektierungsmethode 1981 von Karlsruhe ließ das perspektivische Bild der geplanten Strecke aus dem Sehwinkel des Fahrers eines mit konstanter oder veränderlicher Geschwindigkeit fahrenden Kraftfahrzeugs auf dem Bildschirm erscheinen. Auf die Karlsruher Initiative hin wurde die Entwicklung des ungarischen interaktiven Programms begonnen, die von der ähnlichen, jedoch neueren Kooperation mit dem Lehrstuhl für Straßenbau der Universität Rom im Jahre 1983 einen neuen Anstoß erhielt. Von Prof. *Ranzo* wurde im Frühjahr 1983 eine in der Zwischenzeit entwickelte italienische Methode dargelegt, und der

Verfasser hatte Gelegenheit, bei einem Besuch in Rom im Herbst 1984 am Lehrstuhl des Professors *Giannini* eine überraschende Initiative zu sehen. Wir erfuhren, daß es auf den italienischen Autobahnen der ersten Periode, z. B. auf der „Autostrada del Sol“ zwischen Mailand und Rom, keine Übergangsbögen gebe. Die verbindliche und gleichwertige Anwendung von Übergangsbögen wurde in die italienischen Straßenprojektierungsrichtlinien erst spät, nur im Jahre 1978 — vor allem aufgrund der Arbeiten der Universität Rom — aufgenommen, wo in der praktischen Projektierung, z. B. im Falle der neuen Autobahn Rom-Pescara über die Appenninen, und bei der Projektierung des neuen Umfahrungsabschnitts der Autobahn bei Rom im Bau, schon beide (deutsche und ungarische) Klothoidentafeln angewandt wurden.

Wo etwas verhältnismäßig spät eingeführt wird, geschieht es oft mit besonders großer Sorgfalt und ohne die hindernde Wirkung der Gewöhnung und Routine. So war es auch in Italien. Am Lehrstuhl für Straßenbau der Universität Rom wurde parallel zu der Einführung der einfachen Klothoide eine wertvolle Forschungsarbeit von hohem Interesse über die Anwendung der *Zweiparameterklothoiden* oder *Hyperklothoiden* in der praktischen Straßenprojektierung begonnen. Von *Kasper* und *Lorentz* war bereits früher die Möglichkeit der Verallgemeinerung der Klothoide mit zwei Parametern erwähnt worden, davon wurde jedoch nicht allgemein Kenntnis genommen. Bloß das schöne Straßentrassierungsbuch von *Lorentz* aus dem Jahre 1971 enthält Hinweise, einige Grundformeln und Grunddaten darüber. Am Lehrstuhl für Straßenbau der Universität Rom wurde von *La Camera* in seinen Arbeiten aus den Jahren 1977—79—82 das volle Rechenverfahren der Hyperklothoiden ausgearbeitet; er beschäftigte sich vor allem mit fahrzeugdynamischen Problemen. So kommt in einem der italienischen Mikrorechnerprogramme für Straßenprojektierung auch der zweite Parameter n der Klothoide als Eingabegröße, Input vor. Von *La Camera* wurde bei der Berechnung der Koordinaten die Ableitung älteren Typs angewandt, wo der Tangentialwinkel τ die unabhängige Veränderliche ist. Der Verfasser des vorliegenden Beitrags hat bereits in Rom begonnen, diese zweiparametrischen Klothoiden in anderer Weise, aufgrund der Bogenlänge l als Veränderlicher abzuleiten. Im weiteren wurden die von der Bogenlänge l abhängigen, wichtigen Formeln der zweiparametrischen Klothoidenbögen nach diesem Ansatz beschrieben, dann werden im letzten Abschnitt auch die von dem Winkel τ abhängigen Formeln von *La Camera* dargelegt.

Obwohl Zweiparameterklothoiden auch in der Zukunft nur in selteneren Fällen in der Praxis zur Anwendung kommen werden, lohnt es sich dennoch, diese näher kennenzulernen. Sie haben den Vorteil, daß sie sich an Gebundenheiten infolge der vorgegebenen Lage der Kreisbögen und Geraden im Lageplan besser anpassen und sogar als näherungsweise Bremsbögen verwendet werden können. Eine wohlüberlegte Anwendung derselben hat kaum

Nachteile, weil bei mikrorechnergestützter Projektierung die vielgliedrigen Formeln, die wesentlich verwickelter als die Formeln der Klothoide sind, einfach programmiert und damit berechnet werden können.

Haupteigenschaften und Näherungsformeln des Klothoidenbogens mit zwei Parametern

Es ist bekannt, daß das Wesentliche an dem zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen mit dem Radius R befindlichen Klothoidenübergangsbogen die *lineare Krümmungsänderung die Bogenlänge entlang* zwischen $1/r=0$ und $1/r=1/R$ ist. Diesem Wesen der Klothoide entsprechen die sogenannte „*natürliche Gleichung*“ der Klothoide und die Definition ihres *Parameters*. (Der „Parameter“ ist ein linearer Vergrößerungs-Verkleinerungsfaktor der Klothoide. Seine runden Werte sind die Normenparameter, die seit 1952 in Ungarn mit dem Buchstaben p — statt des in der internationalen Fachliteratur gebräuchlichen Kurzzeichens A — bezeichnet und benutzt werden.) So gilt also: $r \cdot l = R \cdot L = p^2 = A^2$; d. h.:

$$A = p = \sqrt{R \cdot L} \quad \text{oder: } A^2 = R \cdot L$$

Es ist weiterhin bekannt, daß der in dieser Weise formulierte Klothoidenbogen dynamisch dem Weg eines *mit konstanter Geschwindigkeit* fahrenden Kraftfahrzeugs bei *mit konstanter Winkelgeschwindigkeit* gedrehtem Lenkrad entspricht.

Auch das ist allgemein bekannt, daß die „genauen“ Klothoidenformeln in einem $x - y$ -Koordinatensystem wegen der Notwendigkeit der Reihenentwicklung mehrgliedrig sind; wird aber von dem zweiten Glied an vernachlässigt, erhält man die Formeln des Übergangsbogens von der Form einer *kubischen Parabel*, die für die Abschätzung des Raumbedarfs des Klothoidenbogens (bei einem flachen Bogen sogar als dessen Ersatz) geeignet sind.

Weniger bekannt ist jedoch, daß von *Kasper* und *Lorentz* noch in den 1940er Jahren der Gedanke der Existenz der natürlichen Grundgleichung verallgemeinerter *Klothoiden höherer Ordnung* aufgeworfen wurde, der von *Lorentz*, dem Klassiker der schönen, ästhetischen Streckenführung, auch in seinem zusammenfassenden Spätwerk (1971) erwähnt, jedoch nicht ausgearbeitet wurde. So lautet die Grundgleichung der verallgemeinerten Klothoiden höherer Ordnung, statt der Grundbeziehung $A^2 = R \cdot L$ der einfachen Klothoide:

$$A^{n+1} = R \cdot L^n = r \cdot l^n$$

Die Kurve zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen mit dem Radius R hat also hier nicht einen einzigen Parameter, sondern zwei: A und n .

Der erste Parameter A mit der Dimension Meter spielt dieselbe Rolle, wie bei der gewöhnlichen Klothoide (ist also ein linearer Vergrößerungs-Verkleinerungsfaktor). Der zweite, der Exponentparameter n ist eine absolute Zahl, im Prinzip zwischen 0 und $+\infty$.

Ist $n=0$, so ist $R=r$: ein Kreisbogen mit konstantem Radius.

Ist $n=1$, so ist $A^2=RL$: ein gewöhnlicher Klothoidenbogen.

Ist $n=+\infty$, so ist $A=RL$: eine Gerade.

Ursprünglich wurden die Klothoiden mit zwei Parametern „Hyperklothoiden“ genannt. Man sieht also, daß gemäß Abb. 1 sämtliche Klothoiden mit

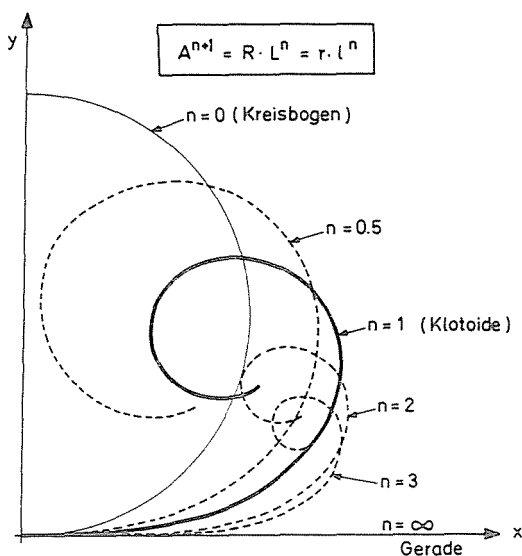


Abb. 1. Die Klothoidenbögen mit zwei Parametern füllen — in Abhängigkeit von dem Wert des Parameters n — den Raum zwischen der Geraden ($n = \infty$), der gewöhnlichen Klothoide ($n = 1$) und dem Kreisbogen ($n = 0$) aus. (Lorentz, [8]).

zwei Parametern im Koordinatensystem $x - y$ zwischen der Geraden $x = \infty$ und dem vom Koordinatenursprung aus gezeichneten Kreisbogen mit dem Radius $R = r$ befindliche Spiralkurven sind (Lorentz, 1971). In dem Spezialfall $n = 1$ stimmt die Zweiparameterklothoide mit dem auch bisher gebräuchlichen, allgemein bekannten Klothoidenbogen (mit einem Parameter) überein. Für praktische Anwendung können deshalb die von dem Wert $n = 1$ verhältnismäßig nicht stark abweichenden Exponentparameter n in Frage kommen.

Betrachten wir nun die Krümmungsbilder der Klothoiden mit zwei Parametern in Abb. 2. Aus der obengenannten natürlichen Grundgleichung die Änderung der Krümmung $1/r$ in Abhängigkeit von der Bogenlänge aus-

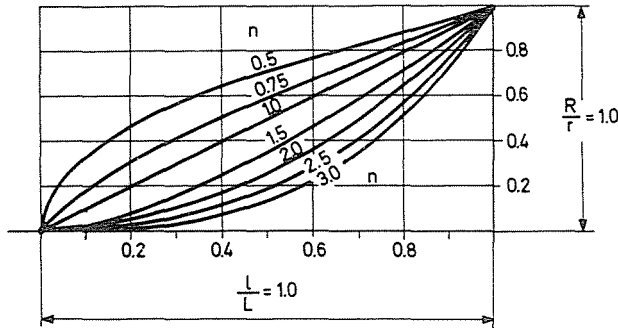


Abb. 2. Krümmungsbilder der einfachen Klothoide, als Übergangsbogen, und der Klothoiden mit zwei Parametern in Abhängigkeit von der Bogenlänge, zwischen der Geraden und dem Kreisbogen mit dem Radius R

gedrückt, erhält man:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(\frac{l}{L} \right)^n = \frac{l^n}{A^{n+1}}$$

Kommt also die Klothoide mit zwei Parametern als Übergangsbogen zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen mit dem Radius R mit der Übergangsbogenlänge L vor, ist zu erkennen, daß im Falle $n=1$ der Übergang *linear* ist; das ist der Fall des einer *konstanten Geschwindigkeit* entsprechenden, *gewöhnlichen* Klothoidenbogens. Ist $n > 1$, wird das Krümmungsbild von oben immer *konkaver*. Praktisch kommen hier die Exponentenwerte um $n=1,2-1,5-2,0-2,5$ in Frage, und die diesen entsprechende Linie der Übergangskurve steht im Lageplan den Fällen eines *mit veränderlicher Geschwindigkeit gefahrenen Bremsbogens* am nächsten (s. Handbuch der Straßenbogenabsteckung, Bd. II, S. 441). Ist $n < 1$, so wird das Krümmungsbild eine von oben *konvexe* Form haben; praktisch können die Werte um $n=0,8-0,6$ in Frage kommen. Die Linien der diesen entsprechenden Übergangsbögen im Lageplan stehen dem Fall des *Beschleunigungsbogens mit veränderlicher Geschwindigkeit* am nächsten. In der einschlägigen neuen italienischen Literatur (*La Camera* 1977, 1979, 1982) werden die fahrzeugdynamischen Fragen der Bögen (Verlauf, Änderungen der Seitenbeschleunigung, des Seitenstoßes, Verwandtheit mit und Abweichung z. B. von den deutschen und ungarischen Bremsbögen usw.). Hier möchten wir aber zuerst die *geometrischen Verhältnisse* des Bogens behandeln, weil wir meinen, daß in der ungarischen Praxis die Klothoidenbögen als gleichgestellte Linienführungselemente vorzukommen pflegen. (Die Behandlung der dynamischen Probleme von Bogenserien mit den minimalen Kreisbogenradius annähernden Krümmungen soll auf eine spätere Gelegenheit aufgeschoben werden.)

Die praktischen Möglichkeiten und Vorteile der Klothoidenbögen mit zwei Parametern lassen sich am besten veranschaulichen, wenn die Hauptdaten des Endpunktes des Übergangsbogens zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen durch *Näherungsformeln* gezeigt werden, die Verwandtschaft und Abweichung von der üblichen Annäherung der Klothoidenkurve (durch eine kubische Parabel) plastisch darstellen. Die Berechnung der die Hauptelemente

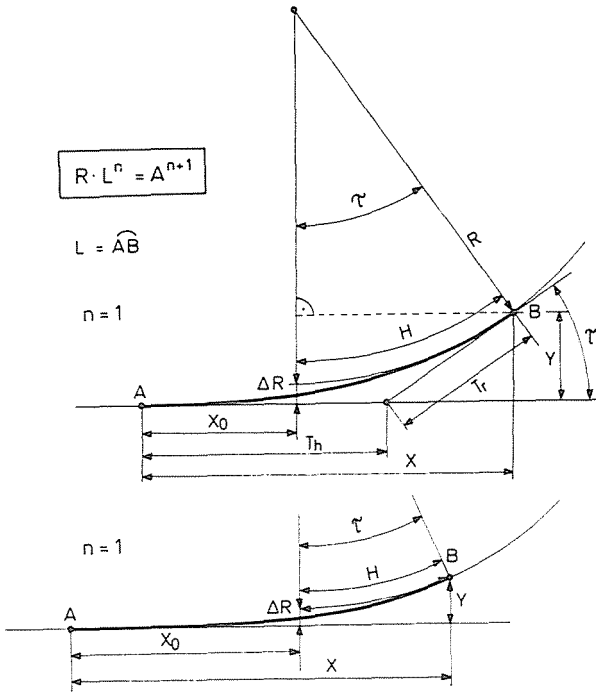


Abb. 3. Kennzeichnende Anschlußdaten für den Raumbedarf der Zweiparameter-Klothoidenbögen als Übergangsbögen und des Kreisbogens im Falle von Exponentparametern $n < 1$ und $n > 1$

verbindenden S-förmigen Zweiparameter-Übergangsbögen, Gegenbögen, und der Eikurven verdient besonders im Falle bei dem Lageplan festgesetzter Hauptelemente (festgesetzter Geraden, festgesetzter Kreisbögen) Interesse.

Wird bloß das erste Glied der sich aus der später mitzuteilenden genauen Ableitung ergebenden, in eine Reihe entwickelten Formeln behalten, dann erhält man nach Abb. 3:

$$x \cong l; \quad y \cong \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{l^{n+2}}{A^{n+1}} \tag{a}$$

$$L = \sqrt[n]{\frac{A^{n+1}}{R}} \tag{genauer Wert}$$

Anschlußpunktdaten:

$$X \cong L; \quad Y \cong \frac{1}{(n+1)^2 + (n+1)} \cdot \frac{L^2}{R} \quad (\text{b, c})$$

$$X_0 \cong \frac{n}{n+1} \cdot L; \quad \Delta R \cong \frac{n}{2(n+1)^2 \cdot (n+2)} \cdot \frac{L^2}{R} \quad (\text{d, e})$$

$$T_h \cong \frac{n+1}{n+2} L; \quad T_r \cong \frac{1}{n+1} \cdot L \quad (\text{grober Wert/f, g})$$

$$\text{arc } \tau = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{L}{A} \right)^{n+1} \quad (\text{genauer Wert/h})$$

$$H = R \cdot \text{arc } \tau = \frac{L}{n+1} \quad (\text{genauer Wert/i})$$

Nehmen wir an, daß bei einer Projektierung Größe und Ort der kleinsten Entfernung ΔR zwischen einer festgelegten Geraden und einem Kreisbogen in fester Lage, mit dem Radius R gegeben sind. Dann erhält man die notwendige Länge L des eine Verbindung gewährleistenden Klothoidenbogens mit zwei Parametern, bzw. den Parameter A im Falle eines angesetzten Exponentenparameters n aus den Formeln:

$$L \cong \sqrt{\frac{2(n+1)^2 \cdot (n+2)}{n} \cdot R \cdot \Delta R}$$

$$A \cong R \left[(n+1) \sqrt{\frac{(2n+4) \cdot \Delta R}{n \cdot R}} \right]^{\frac{n}{n+1}}$$

An den obigen Näherungsformeln fällt sogleich auf, daß man durch Einsetzung des Exponenten $n=1$ die Näherung der gewöhnlichen Klothoidenkurve, die bekannten Formeln der kubischen Parabel erhält. Diese Näherungsformeln sind dafür geeignet, den Raumbedarf und die Lage der Klothoide mit zwei Parametern im Verhältnis zu dem Kreisbogen im Falle verschiedener Exponentenparameter n rasch zu berechnen. Abb. 4 zeigt an einem konkreten Beispiel die Wirkung des Exponentenparameters n . Es seien der Kreisbogenradius $R=100$ m und die Entfernung des geraden Abschnitts von dem nächsten Punkt des Kreisbogens $\Delta R=10,00$ m. Gegeben sind in diesem Falle also der Kreisbogenradius und die Kreisbogenverschiebung; das würde bei einem einfachen Klothoidenbogen eindeutig eine einzige Klothoidenlänge L bzw. den Parameter $p=A$ angeben. Annähernd:

$$L = \sqrt{2 \cdot R \cdot \Delta R} = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 10} = 154,92 \text{ m}$$

$$p = A = \sqrt{RL} = \sqrt{100 \cdot 154,92} = 124,47 \text{ m}$$

Betrachten wir nun aufgrund der obigen Näherungsformeln, wie sich die Verbindungsbögen mit verschiedenen Exponentparametern $n=0,50-0,75-1,0-1,5-2,0-2,5$ zwischen den Kreisbogen und die Gerade in fester Lage einfügen. Raumbedarf und Lage im Verhältnis zu dem Kreisbogen sind am besten den aus den obigen Formeln berechneten Näherungswerten L, A, X_0, τ, H zu entnehmen (Tabelle I, Abb. 4).

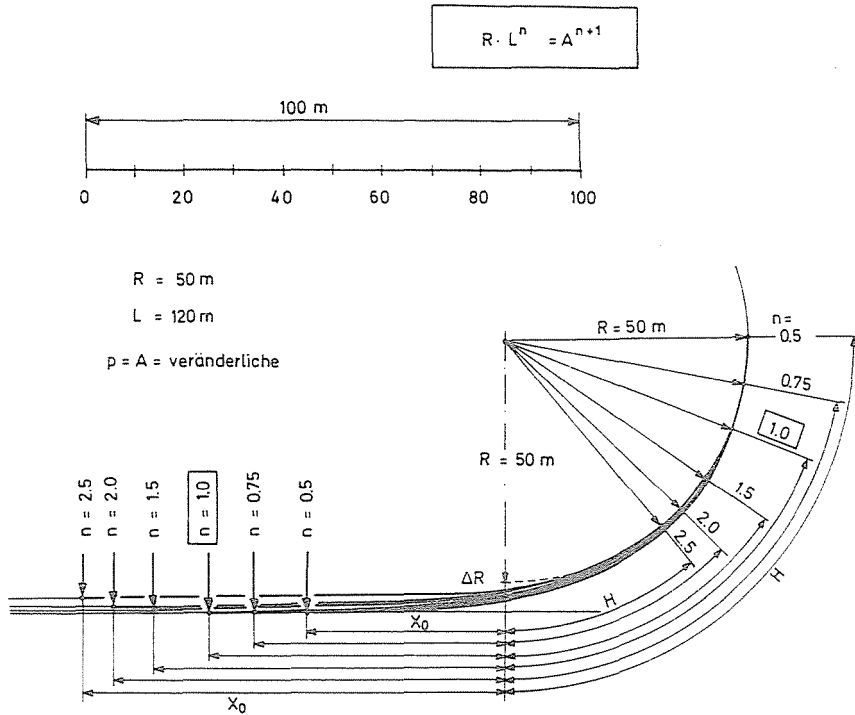


Abb. 4. Beispiel für den Verlauf der Übergangsbögen mit zwei Parametern in Abhängigkeit von der Änderung des Exponentparameters n , bei festgesetztem Radius $R = 100 \text{ m}$ und festgesetzter Kreisbogenverschiebung $R = 10 \text{ m}$

Die Änderung des Exponentparameters n zeichnet sich in interessanter Weise ab. Im Vergleich mit der gewöhnlichen Klothoide $n = 1$ ändert sich bei konstantem ΔR die Länge L der Zweiparameter-Übergangsbögen mit $n < 1$ kleiner als die Einheit kaum, der Bogen gleitet aber stärker unter den Kreisbogen hinein; X_0 wird also viel kleiner, τ, H , und Y werden hingegen viel größer sein.

Im Falle von zweiparametrischen Übergangsbögen mit $n > 1$ größer als die Einheit nimmt neben dem festen ΔR die Übergangsbogenlänge L stark zu und auch X_0 wird immer größer. Der Abschnitt an der Kreisbogenseite nimmt ab

Tabelle I

Zwei Beispiele für die Änderung der Anschlußdaten von Klothoiden mit zwei Parametern in Abhängigkeit von dem Wert des Exponentenparameters n :

I. Ausgangsdaten: $R = 100,00$ m und $R = 10,00$ m (Abb. 4.)						
n	A m	$L = X$ m	Y m	X_0 m	τ Altgrad	H m
0,5	150,00	58,16	60,00	50,00	57,2958	100,00
0,75	149,86	58,14	46,67	64,23	49,0652	95,64
1	154,92	124,44	49,87	77,46	44,3810	77,46
1,5	170,78	137,87	33,33	102,47	39,1406	68,31
2	189,74	153,26	30,00	126,49	36,2371	63,25
2,5	210,00	169,89	28,00	150,00	34,3775	60,00

II. Ausgangsdaten: $R = 50,00$ m und $L = 120,00$ m X (Abb. 5.)						
n	A m	R m	X_0 m	Y m	τ Altgrad	H m
0,5	66,49	12,80	40,00	76,80	91,6732	80,00
0,75	72,76	12,82	51,43	59,84	78,5771	68,57
1	77,46	12,00	60,00	48,00	68,7549	60,00
1,5	84,55	9,87	72,00	32,91	55,0039	48,00
2	89,63	8,00	80,00	24,00	45,8366	40,00
2,5	93,44	6,53	85,71	18,34	39,2885	34,29

und damit vermindern sich die Werte von τ , H und Y . Dieser Fall wird dem Fall der *Bremsbögen* mit veränderlicher Geschwindigkeit immer ähnlicher.

Tabelle I und Abb. 5 zeigen ein anderes extremes Beispiel von diesem Gebiet. Als Ausgangsdaten seien hier gegeben: ein kleiner Kreisbogenhalbmesser $R = 50$ in einem Knotenpunkt und eine verhältnismäßig große Übergangsbogenlänge $L = 120$ m. Auch hier sind die bereits genannten Tendenzen zu beobachten. Bei Exponentparametern *kleiner* als die Einheit $n < 1$ ist es jetzt die Kreisbogenverschiebung ΔR , die sich kaum verändert, während sich der Verbindungsbogen stärker unter den Kreisbogen schiebt, als die gewöhnliche Klothoide mit $n = 1$. Die X_0 -Werte vermindern sich, während die Werte τ , H , Y wachsen. Bei Exponentparametern *über* der Einheit $n > 1$ vermindern sich hingegen die Werte ΔR , τ , H , Y , der Bogen schiebt sich unter dem Kreisbogen hervor nach außen; X_0 wächst und das ist dem Falle der *Bremsbögen* ähnlich.

Obwohl sich auch diese Tabellendaten und Abbildungen nur aus Näherungsformeln ergeben haben, charakterisieren sie dennoch die Lage des

zweiparametrischen Klothoidenbogens zwischen den Kreisbogen und der Geraden, im Vergleich mit der gewöhnlichen Klothoide. Erstens scheint es, daß die Anwendung von Exponentparametern unter der Einheit $n < 1$ im Falle von Geraden und Kreisbögen in gebundener Lage wenig vorteilhaft ist. *Viel vorteilhafter scheinen die Exponentparameter über der Einheit, etwa im Bereich $1 \leq n < 2,5$ zu sein.* Dann läßt sich bei Kreisbögen mit großem Halbmesser eine freiere Bewegung des Bogens verwirklichen (wie wir es im weiteren z.B. im Falle

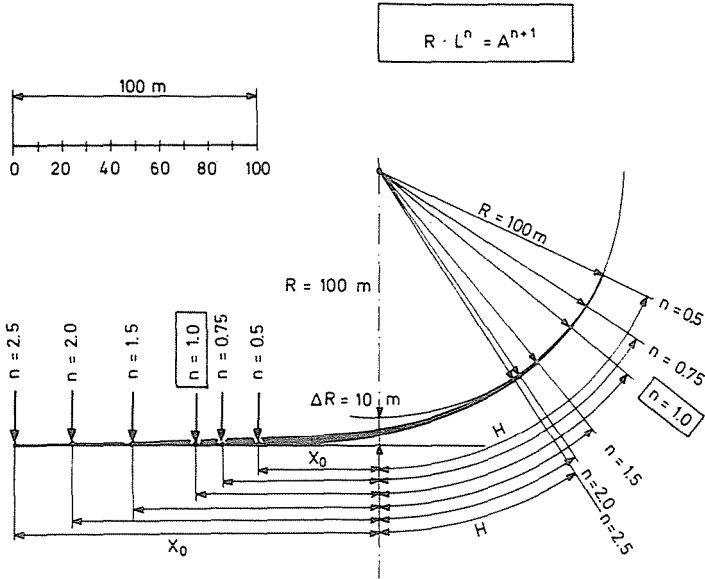


Abb. 5. Beispiel für den Verlauf von Übergangsbögen mit zwei Parametern bei festgesetztem Kreisbogenhalbmesser $R = 50$ m und festgesetzter Übergangsbogenlänge $L = 120$ m

von S-förmigen Gegenbögen oder Eikurven sehen werden.) Bei *Kreisbögen mit kleinem Radius* steht die Form des Zweiparameterbogens $n > 1$ der Form der Bremsbögen nahe. Dieser kann sich wieder an geometrische Bindungen des Lageplanes besser anpassen als die gewöhnliche Klothoide.

Es muß aber auch zugegeben werden, daß im Falle von $n < 1$ — wie es auch aus Abb. 2 zu erkennen ist — im von oben konkaven Krümmungsbild die Krümmung anfangs *recht langsam ansteigt*, und *am Anfang* des verlängerten Abschnitts X_0 des Übergangsbogens im Lageplan die y -Ordinaten *sehr klein* sein werden; der Bogenanfang weicht kaum von der Geraden ab.

Genauere Berechnung des Zweiparameter-Klothoidenbogens in Abhängigkeit von der Bogenlänge als Variable

Die italienischen Verfasser haben die genauen Formeln der Hyperklothoiden in einem x - y -Koordinatensystem stets (dem Beispiel der früheren Klothoidenableitungen folgend) unter Anwendung des Tangentialwinkels τ als Variable abgeleitet, wie das später bei ihren Endformeln zu sehen sein wird. Wir unsererseits haben im Falle der Klothoide — und jedes anderen Bogens mit einer in Abhängigkeit von der Bogenlänge $1/r = f(l)$ veränderlichen Krümmung — schon seit langem (1951) [3], [5] die Ableitung und Formeln *in Abhängigkeit* von der Bogenlänge l eingeführt und damit in den ungarischen Klothoidentafeln vorteilhaftere Berechnungsformeln benutzt. Nach Abb. 6 gingen wir bezüglich der Koordinaten des Übergangsbogens von den nachstehenden Formeln aus, wie sich das von der Abbildung gut ablesen läßt:

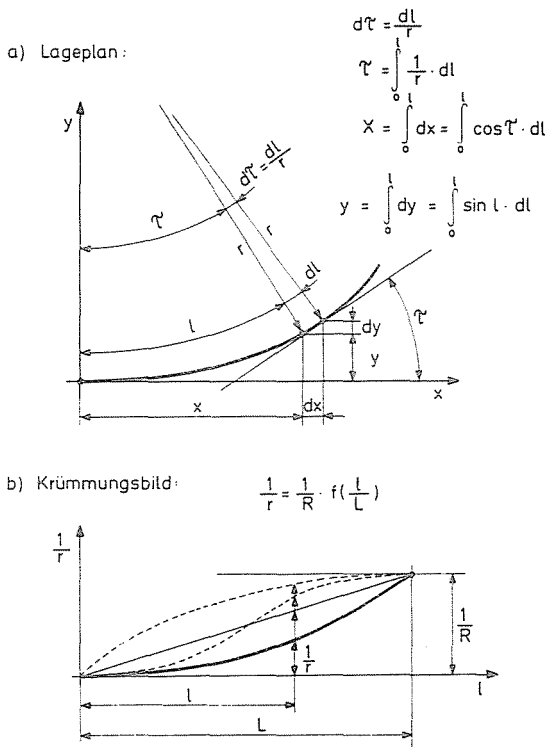


Abb. 6. Allgemeine Ausgangsbasis für die Ableitung der Koordinaten x, y eines Übergangsbogens mit beliebiger Krümmungsänderung, unter Anwendung der Bogenlänge l als Veränderlicher (Nemesdy, 1951)

ist $\frac{1}{r} = f(l)$ bekannt, gelten:

$$\tau_l = \int_0^l d\tau = \int_0^l \frac{dl}{r} = \int_0^l \frac{1}{r} \cdot dl = \int_0^l f(l) \cdot dl \tag{a}$$

$$x_l = \int_0^l dx = \int_0^l \cos\tau \cdot dl \tag{b}$$

$$y_l = \int_0^l dy = \int_0^l \sin\tau \cdot dl \tag{c}$$

Da sich aus der Formel „a“ die Formel von τ in Abhängigkeit von der Bogenlänge als einfache Formel ergibt, kann diese in die durch „b“ und „c“ bezeichneten Formeln der beiden Koordinaten eingesetzt werden; dann werden die *Kosinus*- und *Sinus*funktionen in Reihen entwickelt und je Glied integriert. Dieses Verfahren haben wir bei Klothoiden und bei wellenförmig auslaufenden Eisenbahnbögen auch früher schon angewandt, und dieses benutzen wir jetzt auch im Falle der zweiparametrischen Klothoide.

Die Grundbeziehung der Zweiparameter-Klothoide und die Formel der Krümmungsänderung sind nun wie folgt:

$$r \cdot l^n = A^{n+1}; \quad \text{oder: } \frac{1}{r} = \frac{l^n}{A^{n+1}} \tag{1}$$

Die beiden Parameter sind also: der *Größenparameter* A (in m); und der *Exponentparameter* n , eine dimensionslose Zahl.

Die Größe des Tangentialwinkels τ_l bei der Bogenlänge l ergibt sich aus der obigen Formel (a) zu:

$$\tau_l = \int_0^l \frac{1}{r} dl = \int_0^l \frac{l^n}{A^{n+1}} dl = \frac{l^{n+1}}{(n+1) \cdot A^{n+1}} \tag{2}$$

Schreiben wir als Vorbereitung die in eine Taylor-Reihe entwickelten allgemeinen Formen der Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ an:

$$\cos z = 1 + \sum_1^k (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin z = \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

Damit ergibt sich also die Formel der Abszisse x zu;

$$X = \int_0^l \cos \tau \cdot dl = \int_0^l \left(1 + \sum_1^k (-1)^k \cdot \frac{\tau^{2k}}{(2k)!} \right) \cdot dl$$

Die Formel (2) des Winkels τ eingesetzt, erhält man;

$$X = \int_0^l \left(1 + \sum_1^k \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{l^{2k(n+1)}}{(n+1)^{2k} \cdot A^{2k(n+1)}} \right) \cdot dl$$

Die Abszisse x eines Punktes bei der Bogenlänge ergibt sich also zu:

$$X = l + \sum_1^k (-1)^k \cdot \frac{l^{2k(n+1)+1}}{(2k)! (n+1)^{2k} [2k(n+1)+1] \cdot A^{2k(n+1)}} \quad (3)$$

Die Ordinate y wird in ganz ähnlicher Weise berechnet:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^l \sin \tau \cdot dl = \int_0^l \left(\sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{\tau^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \cdot dl = \\ &= \int_0^l \left(\sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{l^{(2k-1)(n+1)}}{(2k-1)! (n+1)^{2k-1} \cdot A^{(2k-1)(n+1)}} \right) \cdot dl \end{aligned}$$

Die Ordinate y eines Punktes bei der Bogenlänge ergibt sich also zu:

$$y = \sum_0^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{l^{(2k-1)(n+1)+1}}{(2k-1)! (n+1)^{2k-1} [(2k-1)(n+1)+1] \cdot A^{(2k-1)(n+1)}} \quad (4)$$

Diese Formeln lassen sich auch auf den Kleinrechner leicht programmieren und damit praktisch einfach berechnen. Die Zahl k der berücksichtigten Glieder hängt von der gewünschten Genauigkeit ab, die Zahl k wird z.B. durch den Rechner bis zu einer Genauigkeit von 1 cm erhöht.

Die obigen Formeln sind die Kleinpunktsformeln einer Klothoide mit zwei Parametern: A und n .

Auch hier könnten mit Hilfe der Formeln $l_1 = l/A$, $x_1 = x/A$; $y_1 = y/A$ Einheitsklothoiden berechnet werden. Auch das zeigt, daß der Parameter A , ähnlich wie im Falle der gewöhnlichen Klothoide, auch hier ein linearer Vergrößerungs-Verkleinerungsparameter ist. Statt Einheitsklothoidentafeln werden heute aber die Daten auf dem Computer mit Hilfe kurzer Programme leicht berechnet.

**Anschluß der zweiparametrischen Klothoide
an den Kreisbogen mit einem Radius R**

Die Klothoide wird an den Kreisbogen auch jetzt aufgrund der wohlbekannteren Abb. 3 angeschlossen. Beim Anschluß sind jedoch die Bogenlänge $l=L$ und der Radius $r=R$. Man erhält nach der Grundbeziehung zwei wichtige Formeln:

$$L = \sqrt[n]{\frac{A^{n+1}}{R}} \quad (\text{Übergangsbogenlänge}) \tag{5}$$

$$A^{n+1} = R \cdot L^n \quad (\text{erster Parameter}) \tag{6}$$

Die Koordinaten X, Y des Endpunktes, also des Anschlußpunktes B erhält man aus den bekannten Formeln der Kleinpunkte, mit der Substitution $l=L$. Es werden immer je zwei Formeln angeschrieben, je nach dem, ob die Werte von X oder Y unter Anwendung des Kreisbogenhalbmessers R oder des Wertes des Parameters A bestimmt werden sollen.

Genauer Wert der *Abszisse des Endpunktes* auf zweierlei Art:

$$X = L + \sum_1^k (-1)^k \cdot \frac{L^{2k(n+1)+1}}{(2k)!(n+1)^{2k}[2k(n+1)+1] \cdot A^{2k(n+1)}}$$

$$X = L + \sum_1^k (-1)^k \cdot \frac{L^{(2k+1)}}{(2k)!(n+1)^{2k}[2k(n+1)+1] \cdot R^{2k}}$$

Genauer Wert der *Ordinate des Endpunktes* auf zweierlei Art:

$$Y = \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{L^{(2k-1)(n+1)+1}}{(2k-1)!(n+1)^{2k-1}[(2k-1)(n+1)+1] \cdot A^{(2k-1)(n+1)}}$$

$$Y = \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{L^{2k}}{(2k-1)!(n+1)^{2k-1}[(2k-1)(n+1)+1] \cdot R^{2k-1}}$$

Der End-Tangentialwinkel τ des Anschlußpunktes ist der einzige, auch dessen genauer Wert mit Hilfe einer *eingliedrigen* Formel ausgedrückt werden kann, indem in die bereits abgeleitete Formel von $\tau, l=L$ eingesetzt wird:

$$\tau = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{L^{n+1}}{A^{n+1}}$$

oder:

$$\tau = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{L}{R}$$

Ort (x_0) und Größe (ΔR) der Kreisbogenverschiebung werden von der

Abbildung abgelesen:

$$X_o = X - R \cdot \sin \tau \quad \text{und} \quad \Delta R = Y - R(1 - \cos \tau)$$

Wieder die in Reihe entwickelten Formen der Sinus- und Kosinusfunktionen angewandt, hat man:

$$\sin \tau = \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{\tau^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$(1 - \cos \tau) = \sum_1^k (-1)^k \cdot \frac{\tau^{2k}}{(2k)!}$$

Die genaue Formel der Abszisse X_o der Kreisbogenverschiebung auf zweierlei Art lautet:

$$\begin{aligned} X_o &= L + \sum_1^k (-1)^k \frac{L^{2k(n+1)+1}}{(2k)!(n+1)^{2k}[2k(n+1)+1] \cdot A^{2k(n+1)}} - \\ &\quad - \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{R \cdot L^{(2k-1)(n+1)}}{(2k-1)!(n+1)^{2k-1} \cdot A^{(2n-1)(n+1)}} \\ X_o &= L + \sum_1^k (-1)^k \frac{L^{2k+1}}{(2k)!(n+1)^{2k}[2k(n+1)+1] \cdot R^{2k}} - \\ &\quad - \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{L^{2k-1}}{(2k-1)!(n+1)^{2k-1} \cdot R^{2k-2}} \end{aligned}$$

Die genaue Formel der Kreisbogenverschiebung ΔR auf zweierlei Art lautet:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{L^{(2k-1)(n+1)+1}}{(2k-1)!(n+1)^{2k-1}[(2k-1)(n+1)+1] \cdot A^{(2k-1)(n+1)}} - \\ &\quad - \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{R \cdot L^{2k(n+1)}}{(2k)!(n+1)^{2k} \cdot A^{2k(n+1)}} \\ \Delta R &= \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{L^{2k}}{(2k-1)!(n+1)^{2k-1}[(2k-1)(n+1)+1] \cdot R^{2k-1}} - \\ &\quad - \sum_1^k (-1)^{k-1} \cdot \frac{L^{2k}}{(2k)!(n+1)^{2k} \cdot R^{(2k-1)}} \end{aligned}$$

Die längeren und kürzeren Tangentenlängen T_h und T_r werden direkt aus den bekannten Daten X , Y , τ genau berechnet:

$$T_h = X - Y/\operatorname{tg} \tau \quad \text{und} \quad T_r = Y/\sin \tau$$

Damit sind die leicht programmierbaren, genauen Formeln der Anschlußdaten der Zweiparameter-Klothoide und des Kreisbogens mit dem Radius R in

Abhängigkeit von der Bogenlänge L angegeben. Bei $n=1$ kommt man zu den ursprünglichen Klothoidenformeln.

Hier sei bemerkt, wenn man von den hier vorkommenden sämtlichen Anschlußpunkt-Formeln nur die *ersten Glieder* beläßt und die übrigen vernachlässigt, erhält man die *Näherungsformeln* die in Abschnitt 2 mit den Bezeichnungen *a bis i* für die Berechnung des Raumbedarfs bereits dargelegt und verwendet wurden. (Die Formeln von T_h und T_r sind ziemlich schlecht, weil $\text{arc } \tau \approx \sin \tau \approx \text{tg } \tau$ hier eine ziemlich grobe Näherung enthält).

Zweiparameter-Klothoiden als Verbindungselemente bei S-Gegenbögen und Eibogen

Der auch praktisch nutzbare Hauptvorteil der Klothoiden mit zwei Parametern besteht darin, daß im Falle, wenn bei Straßenprojektierungen wegen aus dem Lageplan herrührender Gebundenheiten die Lage zweier

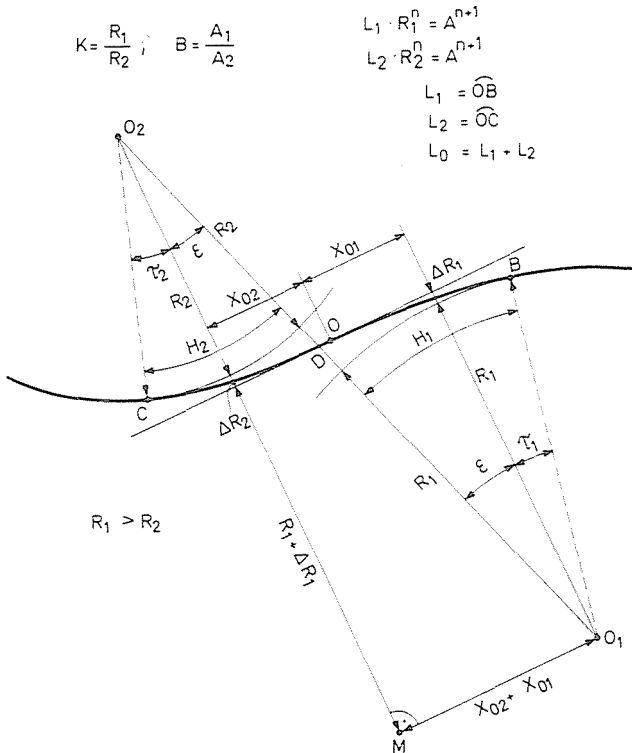


Abb. 7. Verbindung zweier Kreisbögen von entgegengesetzter Richtung durch Klothoiden mit zwei Parametern als S-förmige Gegenbögen

Kreisbögen als fix, festgesetzt angenommen werden muß, man durch eine mehr oder weniger große Änderung des Exponentenparameters n die Verbindungs-Übergangsbögen mit einem höheren Freiheitsgrad entwerfen, berechnen kann, als das bei einer einfachen Klothoide der Fall ist. Die zwei Grundfälle sind in den Abb. 7 und 8 zu sehen. In Abb. 7 sind die Kreisbögen von *entgegengesetzter Richtung* in fixer Lage durch einen *S-förmigen Gegenbogen* verbunden; der kleinste Abstand zwischen den Kreisbögen ist D . Der zweite Fall (Abb. 8) ist der

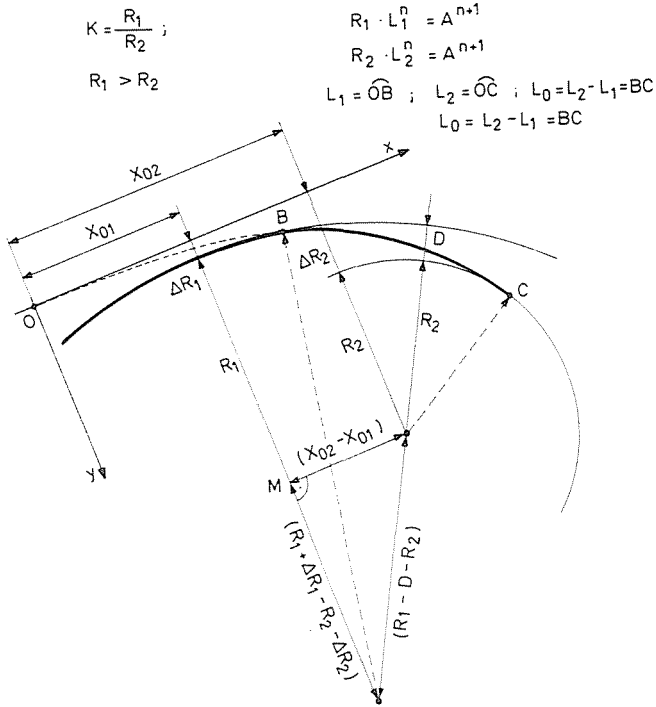


Abb. 8. Verbindung zweier Kreisbögen gleicher Richtung durch eine Klothoide mit zwei Parametern als Zwischen-Übergangsbogen: *Eilinie*.

Eibogen, wo die *Kreisbögen gleicher Richtung* und in festgesetzter Lage durch einen *Zwischen-Übergangsbogen* verbunden sind; der kleinste Abstand zwischen den Kreisbögen ist wieder D .

Ist der Abstand D zwischen den beiden Kreisbögen bekannt, dann lassen sich Länge und Parameter der Verbindungs-Gegenbögen oder Zwischen-Übergangsbögen nur näherungsweise mit Hilfe von nach dem Winkelbildverfahren (Straßenabsteckungs-Taschenbuch, Bd. II, 1963/74) abgeleiteten Formeln berechnen. Die oberen Vorzeichen gelten für *S-förmige* Gegenbögen,

die unteren für Eibögen mit Zwischen-Übergangsbögen.

$$R_o = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \pm R_2}$$

$$L_o = \sqrt{24R_o \cdot D}$$

$$A = p = \sqrt{R_o \cdot L_o}$$

$$L_1 = \frac{A^2}{R_1}; \quad L_2 = \frac{A^2}{R_2}; \quad L_o = L_1 \pm L_2$$

Diese bekannten guten Näherungsformeln sind bei einem Gegenbogen nur für Übergangsbögen mit gleichem, gemeinsamen Parameter $A_1 = A_2 = A$ geeignet. Weichen die Parameter der beiden sich S-förmig anschließenden Übergangsbögen voneinander ab, dann werden im allgemeinen statt einer Näherungsformel die bekannten graphischen *Osterloh*-Diagramme angewandt.

Das Problem wurde für den Fall der Klothoiden mit zwei Parametern zuerst von *La Camera* am Lehrstuhl für Straßenbau der Universität Rom gelöst; seine Formeln (in denen ein Winkel τ die Veränderliche ist) werden im nächsten Abschnitt mitgeteilt. Hier wird jetzt wieder eine gut programmierbare Näherungsformelserie dargelegt, wo die Übergangsbogenlängen L_1, L_2 wieder mit Hilfe der *Bogenlänge als Variable* sowie mit den verschiedenen Parametern A_1, A_2 (Abschnitt 2, Formeln d, e) berechnet werden. Aufgrund der Abb. 7 und 8 kann in gleicher Weise der pythagoreische Satz für das sich auf die Kreisbogen-Mittelpunktabstände — als Hypotenuse — stützende rechtwinklige Dreieck angeschrieben werden:

$$(R_1 \pm D \pm R_2)^2 = (R_1 + \Delta R_1 - R_2 - \Delta R_2)^2 + (\pm X_{01} + X_{02})^2$$

wo

$$\Delta R = \frac{n}{2(n+1)^2 \cdot (n+2)} \cdot \frac{L}{R} \quad \text{und:} \quad X_0 = \frac{n}{n+1} \cdot L$$

Diese Formeln werden mit Indizes versehen und der Reihe nach substituiert, wobei die nachstehenden berechenbaren oder anzusetzenden Verhältniszahlen als bekannt gelten (die Bezeichnungen von *La Camera* wurden hier belassen):

$$K = \frac{R_1}{R_2}; \quad B = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{und daraus:} \quad P = \sqrt[n]{\frac{K}{B^{n+1}}}$$

P ist also nur eine Konstante, die die Berechnung erleichtert. Im Falle eines Eibogens ist offenbar $B = 1$ und daher $P = \sqrt[n]{K}$.

Nach Durchführung der Berechnung und Ordnen der Formel sind noch drei Konstanten zu berechnen, von denen sich dann die erste Übergangsbogenlänge L_1 , dann die übrigen Daten berechnen lassen. In den Formeln gelten wieder

die oberen Vorzeichen im Falle eines *S-förmigen Gegenbogens* und die *unteren* bei einem Eibogen mit dem Zwischen-Übergangsbogen.

$$a = \left[\frac{(1 \pm KP^2)^2}{R_1^2} \cdot \frac{n^2}{[2(n+1)^2 \cdot (n+2)]^2} \right]$$

$$b = \left[\frac{\left(1 \pm \frac{1}{K}\right) (1 \pm KP^2) \cdot n}{(n+1)^2 \cdot (n+2)} + \frac{(\pm 1 + P)^2 \cdot n^2}{(n+1)^2} \right]$$

$$c = \left[2R_1 D \cdot \left(1 \pm \frac{1}{K}\right) \pm D^2 \right]$$

$$L_1^2 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}$$

$$L_1 = \sqrt{L_1^2}; \quad L_2 = L_1 \cdot P$$

$$A_1 = (L_1^n \cdot R)^{\frac{1}{n+1}}; \quad A_2 = \frac{A_1}{B}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{L_1}{R_1}; \quad \tau_2 = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{L_2}{R_2}$$

$$\sin \varepsilon = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pm L_1 + L_2}{R_1 \pm D \pm R_2}$$

$$H_1 = R_1(\varepsilon \pm \tau_1); \quad H_2 = R_2(\pm \varepsilon + \tau_2)$$

$$L = L_0 = (\pm L_1 + L_2)$$

Die gut programmierbare Formelreihe liefert eine rasche Approximation sowohl für den allgemeinen Fall des *S*-kurvenförmigen Gegenbogens (obere Vorzeichen), als auch für den Zwischen-Übergangsbogen des Eibogens (untere Vorzeichen). Selbstverständlich erhält man bei $n=1$ für die gewöhnliche Klothoide eine bisher nicht bekannte allgemeine näherungsweise Lösung für den Fall $A_1 = A_2$ (bzw. $p_1 \neq p_2$).

Die Formeln nach La Camera der römischen „Hyperklothoiden“

Nach den vorigen Ausführungen verdienen schließlich die am Lehrstuhl für Straßenbau der Universität Rom noch im Jahre 1977 von *La Camera* ausgearbeiteten Hauptformeln für die „Hyperklothoiden“, die von ihm 1982 weiter ergänzt wurden, dargelegt zu werden (Autostrade, Jg. 1977, H. 7—8 und

Jhg. 1982, H. 3). Die hochwertige und gedankenerregende Arbeit darf bezüglich der Klothoiden mit zwei Parametern als bahnbrechend gelten, die Formeln sind jedoch etwas umständlich, weil als unabhängige Veränderliche einfacher nicht die Bogenlänge l oder L , sondern nach dem alten Ableitungsverfahren der Klothoide der Tangentialwinkel τ benutzt wird. Dieser ist aus einer der nachstehenden Formeln zu berechnen:

$$\tau = \frac{1}{n+1} \left[\frac{A}{r} \right]^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1} \left[\frac{l}{A} \right]^{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{l}{r}$$

(Am Ende des Übergangsbogens sind $l=L$ und $r=R$.) Bei einem Winkel τ lauten die Formeln der Kleinpunkt-Koordinaten x und y der Zweiparameter-Klothoide wie folgt:

$$x = A \cdot \sqrt[n]{n+1} \sqrt{(n+1)\tau} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-2)}}{(2i-2)! \cdot p_i}$$

$$y = A \cdot \sqrt[n]{n+1} \sqrt{(n+1)\tau} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-1)}}{(2i-2)! \cdot q_i}$$

Dabei bedeuten die Kurzbezeichnungen p_i und q_i :

$$p_i = (2i-2) \cdot (n+1) + 1$$

$$q_i = (2i-1) \cdot (n+1) + 1 = p_i + (n+1)$$

Die genauen Werte der Kreisbogenverschiebungsdaten X_0 und ΔR lauten zum Beispiel:

$$X_0 = A \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{n+1} \sqrt{(n+1)\tau} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-2)}}{(2i-2)! \cdot p_i}$$

$$\Delta R = A \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{n+1} \sqrt{(n+1)\tau} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\tau^{(2i-1)}}{(2i)! \cdot q_i}$$

Hier ist τ im voraus aus den Werten von L und R zu berechnen. Die Näherungsformeln sind dieselben, die in Abschnitt 2 beschrieben wurden.

Der Parameter A_1 des *S-förmigen Gegenbogens* ergibt sich annähernd aus der Formel:

$$A_1 = \left\{ (n+1) \cdot R^{1/n} \sqrt[\frac{D \left[D + 2R_1 \frac{K+1}{K} \right] \cdot (n+2)}{n[n(n+2)(1+P)^2 + \frac{K+1}{K} (1+KP^2)]} }{ \frac{n}{n+1} } \right.$$

und für die Eibögen gilt im Falle eines Zwischen-Übergangsbogens:

$$A_1 = \left\{ R_1 \left[\frac{D[2R_1 \frac{1-K}{K} (n+2)]}{n[(n+2)n(K^{1/n} - 1)]^2 - \frac{1-K}{K} \left(1 - K^{\frac{2+n}{n}}\right)} \right]^n \right\}^{\frac{1}{n+1}}$$

Die Bezeichnungen K , B , P haben dieselbe Bedeutung, wie in Abschnitt 5.

Geistreich und vorteilhaft ist hier die Iterationsbeziehung von *La Camera* aus dem Jahr 1982, die für die vorigen zwei Kreisverbindungsfälle eine *genaue Lösung* ergibt:

$$\left(\frac{R_1 + D + R_2}{R_1} \right)^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau^{(2i-1)}}{(2i-1)! \cdot p_i/n} \left[(-1)^c + \frac{1}{B} \left(\frac{K}{B} \right)^{\frac{p_i}{n}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{K + (-1)^c}{K} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau^{2i}}{(2i)! \cdot q_i/n} \left[1 + (-1)^c \cdot \frac{1}{B} \left(\frac{K}{B} \right)^{\frac{q_i}{n}} \right] \right\}^2 \right\}$$

Hier ist $c=2$ für den Fall einer S -Kurve und $c=1$ für den Fall eines Eibogens. Die sonstigen Kurzbezeichnungen sind bereits bekannt. Die obige Beziehung auf den Mikrorechner programmiert, läßt sich der die Gleichheit befriedigende Winkelwert τ_1 , durch *Iteration* ermitteln. Die gesuchten Parameter lauten dann:

$$A_1 = [(n+1) \cdot \tau_1]^{\frac{n}{n+1}} \cdot R_1; \quad A_2 = \frac{A_1}{B}; \quad \tau_2 = \tau_1 \left(\frac{K}{B} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

La Camera bemerkt, daß manchmal, wenn der Winkel, ziemlich groß ist, die obere Zahlengröße 1×10^{38} der Mikrorechner erschöpft werden kann (overflow-Fehler); in einem solchen Falle soll der kleinere Winkel τ_2 mit Hilfe folgender Iterationsformel berechnet werden:

$$\left(\frac{R_1 + D + R_2}{R_1} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau_2^{(2i-1)}}{(2i-1)! \cdot p_i/n} \left[(-1)^c \cdot (K' \cdot B)^{\frac{p_i+n}{n}} + K' \right]^2 + \\ + \left\{ 1 + (-1)^c \cdot K' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau_2^{2i}}{(2i)! \cdot q_i/n} \left[(K' \cdot B)^{\frac{q_i+n}{n}} + (-1)^c \cdot K' \right] \right\}^2$$

Hier ist jetzt $K' = R_2/R_1$. Nach der Ermittlung von τ_2 durch Iteration, erhält man:

$$A_2 = [(n+1) \cdot \tau_2]^{\frac{n}{n+1}} \cdot R_2; \quad A_1 = A_2 \cdot B; \quad \tau_1 = \tau_2 (B \cdot K)^{\frac{n+1}{n}}$$

Schließlich sehen wir noch eine interessante, ebenfalls iterative Formel für die genaue Bestimmung des Parameters A bei vorgegebener Kreisbogenverschie-

bung, zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen mit dem Radius R :

$$\Delta R = R \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \tau^{2i}}{(2i)! \cdot q_i/n} \right]; \quad \tau \text{ bekannt, so:}$$

$$A = [(n+1) \cdot \tau]^{n+1} \cdot R$$

Es sei bemerkt, daß von *La Camera* und Mitarbeitern die dynamischen Verhältnisse (Seitenbeschleunigungs- und Seitenstoßänderungen) der römischen „Hyperklothoiden“ sehr eingehend untersucht wurden, besonders im Vergleich mit den Bremsbögen, unter diesen mit dem deutschen (Blaschke) und ungarischen (Nemesdy) Bremsbogen (1979, 1982). Hier soll bloß ein Fall der S-förmigen Gegenbögen zwischen drei Kreisbögen aus geometrischer Sicht, nach *La Camera* (1977) gezeigt werden (Abb. 9), einmal mit gewöhnlichen Klothoiden ($n=1$), die sich überdecken, und das andere Mal mit einer möglichen Variante der Übergangsbögen mit zwei Parametern, ohne Überdeckung.

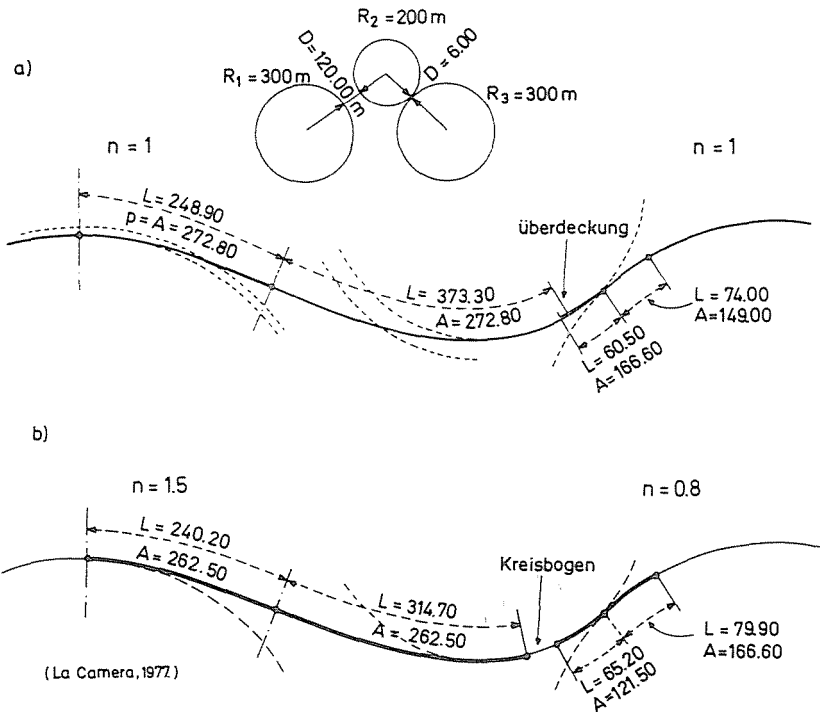


Abb. 9. Beispiel für Verbindungen mit S-förmigen Gegenbögen zwischen drei Kreisbögen in fixer Lage: a) mit gewöhnlichen Klothoiden ($n=1$), die sich überdecken; b) mit einer Variante der Zweiparameter-Klothoiden, die sich nicht überdecken ($n=1,5$ und $0,8$). (*La Camera*, 1977)

Zusammenfassung

Die Klothoide mit zwei Parametern als Übergangsbogen stellt eine das Interesse erregende Verallgemeinerung der allgemein verbreiteten üblichen Klothoide dar. Obwohl man in Ungarn mit Recht der Ansicht ist, daß ein guter Projektant mit der altbewährten gewöhnlichen Klothoide $n=1$ bei allen Gebundenheiten des Lageplanes die Geometrie der Straßenachse mit gutem Ergebnis berechnen kann, lohnt es sich dennoch, auf die Bögen mit zwei Parametern aufzumerken, und notwendigenfalls von dem Fall $n=1$ nicht allzu sehr abweichende Zweiparameterbögen ($0,8 < n < 2,0$) zur Erleichterung der Arbeit zu verwenden. In der vor kurzem in Rom kennengelernten italienischen Forschungstätigkeit wurden bereits in die mikrorechnergestützte iterative Projektierungsmethode „Hyperklothoiden“ eingebaut, auch der Exponentialparameter n gehört zu den Eingabedaten. Im vorliegenden Aufsatz sind die originalen Formeln von La Camera im letzten Abschnitt 6 beschrieben. Vorher wurden aber neuere vorteilhafte Formeln der Klothoide mit zwei Parametern abgeleitet, wo die Veränderliche nicht der Winkel τ , sondern die Bogenlänge l ist. Bei den genauen Lösungen von Gegenbögen und Eibogen scheint es aber vorteilhaft zu sein, die ursprünglichen Iterationsformeln von La Camera gerade mit der Berechnung von τ zu behalten.

Die Darlegung des ganzen Problemerkises stellt für die Straßenplaner auch deshalb ein nützlichcs Vorbild dar, weil dadurch darauf hingewiesen wird, wie leichte Lösungen durch interaktive Mikrorechner auch im Falle von Problemen ermöglicht werden, die früher zwar im Prinzip aufgeworfen worden waren, jedoch ohne Rechnereinsatz auch heute nicht verwirklicht werden könnten.

Im Beitrag wurde nur die Geometrie behandelt, auf dynamische Fragen ging der Verfasser hier nicht ein.

Literatur

1. SCHÜRBA: Klothoiden-Abstecktafeln, Berlin, 1942
2. KASPER: Der Übergangsbogen bei den Reichsautobahnen, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Jg. H. 12—14. (1942)
3. NEMESDY, E.: Übergangsbögen bei den Hauptverkehrsstraßen in Ungarn (Magyar Közlekedés, Mély- és Vízépítés, Jg. H. 10. (1950) -Projektierung und Absteckung von Straßen-Übergangsbögen mit Hilfe von Klothoidentafeln. Mélyépítéstudományi Szemle, Jg. H. 3—3 (1951) (In ungarischer Sprache)
4. Ministerium für Verkehrs- und Postwesen: Richtlinien für Planung und Bau von Hauptverkehrsstraßen, Budapest, 1952 (in ungarischer Sprache)
5. NEMESDY, E.: Útívkítűző Kézikönyv (klotoidtáblázatokkal I—II. Straßenabsteckungs-Handbuch (mit Klothoidentafeln) Bde, I—II. Közlekedési Kiadó, Budapest, 1952
6. KASPER—SCHÜRBA—LORENZ: Die Klothoide als Trassierungselement. Verlag Dummler, Bonn, 1953—61.
7. NEMESDY, E.: Útívkítűző Zsebkönyv I—II. Straßenabsteckungs-Taschenbuch, Bde. I—II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964 und 1973
8. LORENZ: Trassierung und Gestaltung von Straßen und Autobahnen. Bauverlag GMBH, Wiesbaden und Berlin, 1971.
9. NEMESDY, E.: Utak és autópályák tervezési alapjai. Planungsgrundlagen der Straßen und Autobahnen, Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1974
10. FERRARI—GIANNINI: Geometria e progetto di strade (Ingegnerie strade, Vol. I.) ISEDO, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1977. 1980

11. LA CAMERA: L'impiego della Clotoide a parametro variabile nella progettazione stradale Autostrade, H. 7—8 (1977)
12. LA CAMERA—FABI: L'impiego della clotoide a parametro variabile nella progettazione stradale: le curve di frenature Autostrade, H. 6—8 (1979)
13. LA CAMERA—CARBONE—CIGNITTI: L'impiego della clotoide multiparametro nella progettazione stradale, la pratica applicazione Autostrade, H. 3. (1982)
14. KREBS: Veröffentlichungen des Instituts für Straßenbau und Eisenbahnwesen der Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1971—1981.

Prof. Dr. Ervin NEMESDY H-1521 Budapest