РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

А. Бокор

Кафедра теоретической электротехники,
Будапештского технического университета, H-1521 Budapest

Summary

General use of computers of large memory has pushed into the background the numerical field calculation methods based on simulation of random walks, as the advantage arising from the demand on small memory has loosed its importance. At the same time, the programmable pocket calculators and mini-computers make the Monte-Carlo methods to be competitive beside other ones. There are such configurations for calculation of which these methods are particularly suitable and efficient to solve, above all, three-dimensional problems.

There are two known procedures for solving the Dirichlet-problem of Laplace equation: they are based on simulation of spherical rambles or random walk along a gride. At calculation of stationary current distribution many times field problems with Neumann boundary condition are to be solved. It will be shown that both models may be generalized for solving such problems, too.

При расчете статистических и стационарных электрических и магнитных полей методом Монте-Карло математическое ожидание подобранной к случайному блужданию удовлетворяет этому дифференциальному уравнению (уравнению Лапласа) и краевым условиам, как и потенциальная функция. Расчет состоит из симуляции N-ного количества блуждания, исходящего из точки искомого потенциала, к каждой из которых относится одно выборочное значение случайной величины, и их средним значением, что позволяет приблизиться к рассчитываемому потенциалу. Метод требует вычислительной машины с чрезвычайно малой емкостью памяти, но для требующейся точности необходимо очень большое количество блуждания; таким образом, время расчета оказывается длительным. Этим объясняется то, что с распространением вычислительных центров и в них вычислительных машин с большой емкостью памяти этот метод был оттеснен на задний план. Однако потребность в незначительной емкости создает возможность применения его для малых программируемых вычислительных машин, при которых длительность времени расчета не имеет значения.

При задачах, в которых значение потенциала или напряженности требуется лишь в нескольких точках, метод может успешно применять-

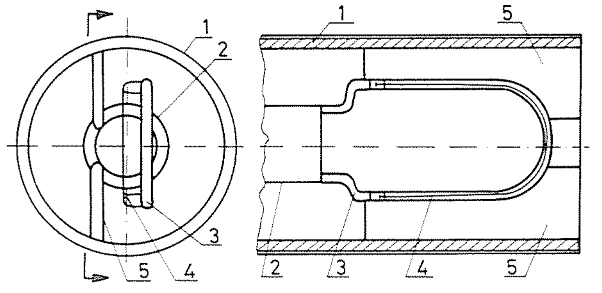

Рис. 1

ся. Особенно он выгоден для рассмотрения таких расположений, при которых не может применяться двухмерная модель. Расчет трехмерных моделей методом Монте-Карло, в отличие от других вычислительных методов, не требует большей емкости памяти и времени расчета подобной длительности двухмерных задач.

Метод Монте-Карло оказался очень выгодным для расчета потенциального поля, например электрометра, конструкция которого представлена на рисунке 1. В устройстве, состоящем, по существу, из двух коаксиальных металлических цилиндров, одним из электродов является внутренний цилиндр (2), присоединяющийся к нему язык клонённый из металлической нити (3), и наклеенная на него металлизированная кварцевая нить (4). Другой электрод состоит из внешнего цилиндра (1), и металлических пластин (5) положенных с целью увеличения чувствительности. Здесь напряжённость требовалась лишь вблизи от кварцевой нити, так задача была разрешимой методом Монте-Карло. В то же время это сложное устройство является неизучаемым при помощи двухмерной модели, так применение других вычислительных методов столкнётся с большими трудностями.

Для решения задания Дирихле для уравнения Лапласа так называемое блуждание по сферам оказалось намного более эффективным, чем общеизвестное блуждание по решётке. Блуждание по сферам и принципиально выгоднее, поскольку исключается ошибка, возникающая при дискретизации области. Более значительным преимуществом этого способа: намного быстрее, чем блуждание по ремётке. Сверх того он является пригодным для анализа и открытых устройств.

Здесь рассматриваем распространение метода Монте-Карло на случаи, когда на границе области частично предусматривается краевое условие Неймана, часто встречающееся при расчёте распределения стационарных токов. Оба моделирования блужданий возможно обобщить для решения и таких задач. В дальнейшем рассмотрим распространение только модели блуждания по сферам. С одной стороны учёт краевого условия Неймана при блуждании по решётке является достаточно очевидным, с другой стороны эффективность модели блуждания по сферам для решения таких задач намного значительнее, чем при решении задачи Дирихле.

Применение блуждания по сферам для задания Дирихле распознаваемо например из [1]. При распространении и мы исходим из этого изложения. Для простоты рассмотрим двухмерный случай. В точке P_0 ищем значение потенциальной функции $\Phi(P)$, гармонической ($\Delta\Phi=0$) в области D, изображённой на рисунке 2.а), на границе $\Gamma_1+\Gamma_2$ области $\Phi(P)$ дано, если $P \in \Gamma_1$, и $\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\right|_P=0$, при $P \in \Gamma_2$. Потенциальное значение $\Phi(P_1)$ в любой точке P_1 окружения $D_{\varepsilon 1}$ (находящегося в окрестности границы Γ_2 вне D) считаем равным $\Phi(P'_1)$, где P_1 является отражением точки P_1 на границу Γ_2. Если $D_{\varepsilon 1}$ является достаточно малой окружностью регулярной границы Γ_2, то Φ гармоническая функция в области $D+D_{\varepsilon 1}$. Зафиксируем в D малая окружность $D_{\varepsilon 0}$ границы Γ_1 (рисунок 2.б) и рассмотрим следующие блуждания, исходящие из точки P_0! Из точек круга радиуса r_i, центральной точки P_i $(P_i \in D, i=0,1,2,\ldots,n-1)$ с равной вероятностью выбираем точку P_{i+1}. Радиус может быть такого размера, чтобы всё точки круга были точками и области $D+D_{\varepsilon 1}$ (целесообразно выбирать максимально большое значение). Если $P_{i+1} \in D_{\varepsilon 1}$, тогда блуждание продолжаем из отражения P'_{i+1} этой точки. Если случайной величиной, подобранной к такому блужданию считаем потенциальное значение $\Phi(P_n)$, математическое ожидание этой случайной величиной будет $\Phi(P_0)$. Одно блуждание длится до тех пор, пока точка P_n попадёт в область $D_{\varepsilon 0}$. К потенциалу в точке P_n приближаемся с потенциалом

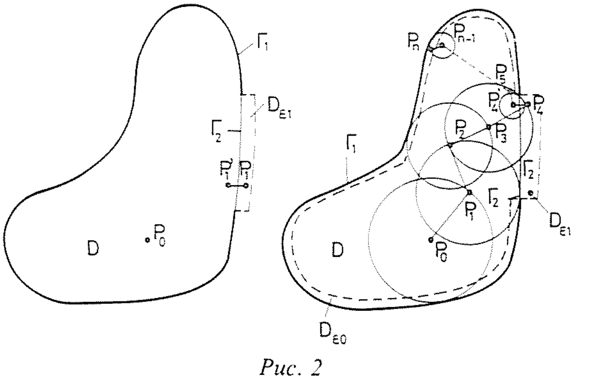

Рис. 2

ближайшей точки границы. Симулируя N-ное блуждание, средней величиной этих данных оцениваем значение $\Phi(P_0)$. Так как средняя величина сходится по вероятности к математическому ожиданию, то есть к $\Phi(P_0)$.

Применимость этого метода подтвердил анализ многих устройств. Два из них изображены на рисунках 3. и 4., где результаты расчёта можно сравнить с точными значениями. (В устройстве изображённом на рис. 3. точными считали результаты полученные методом конечных разностей, на рис. 4. в любой точке поля возбудившегося током вытекающим из

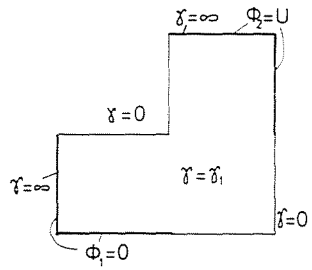

Рис. 3

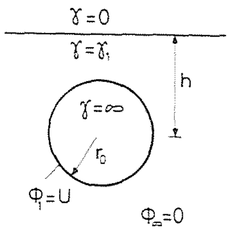

Рис. 4

сферического электрода потенциал вычитываемый с любой точностью в форме бесконечного ряда с помощью повторённых отражений.)

Большую часть программы служащей для расчёта значений потенциала или напряжённости в данной точке можно генерально приготовить. При анализе конкретной задачи надо приготовить только подпрограмму, с помощью которой вычитывается расстояние любой точки области от ближайщей точки границы. И ещё при граничном условии Неймана эта подпрограмма должна отражать точку прошедшую за границу такого типа. Такая подпрограмма легко приготовляется и в случае самых сложных устройств.

Резюме

В силу распространения цифровых вычислительных машин большой емкости памяти вычислительные методы полей основывающиеся на симуляции случайных блужданий отвигались на задний план, так как преимущества вытекающиеся из претензии на небольшую память потеряли свои значения. Но наличие маленьких программируемых цифровых машин дает возможность методам Монте-Карло стать опять конкурентноспособными. Имеются такие устройства, у расчета которых эти методы являются благополучно применимыми. Они могут быть эффективными методами расчета прежде всего трехмерных задач.

Известны два метода решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа: решения моделированиями блужданий по решетке и по сферам. При расчете распределения стационарных токов часто надо решить и краевую задачу Неймана. Покажем, что оба моделирования блужданий можем обобщить для решения и таких задач.

Литература

[1] Соболь И. М.: Численные методы Монте-Карло. Издательство Наука, Москва, 1972.
[2] Михайлов Г. А.: Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Издательство Наука, Новосибирск, 1974.

Dr. Árpád Bokor 1521 Budapest