НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОСВОЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, УПОТРЕБЛЯЕМЫХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

И. Шебештьен

Кафедра теоретической электротехники Будапештского Технического Университета

Поступило: 30. X. 1979 г.
Представлено: проф. И. Ваго

Затруднения при расчёте рабочих режимов электрических вращающихся машин создаются тем, что индуктивность обмоток машины зависит от угла α повёртывания ротора. В уравнениях машин постоянного тока (и однофазных коллекторных машин) индуктивности не являются меняющимися, вследствие действия коллектора. Известно, что в теории машин переменного тока меняющиеся индуктивности элиминируемы при помощи разнообразных преобразований [1, 2]. В дальнейшем преобразования, употребляемые в специальной литературе выведутся математическим методом, исходя из уравнений, непосредственно описывающих вращающуюся машину, применяя предусмотренных свойств искомого преобразования. В течении этого применяется такое изложение, которое различается от работ, подобной цели в специальной литературе [1, 3], и результаты задаются в более обобщённой форме.

1. Уравнения электрических вращающихся машин в обобщенной форме

Связь между током и напряжением обмоток электрических машин задаётся уравнениями Кирхгофа, касающимися обмоток. Эти уравнения в матричной форме являются следующими [1, 2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr}^{+} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \tag{1}$$

На 1-ом рисунке зарисована система обмотки так, что каждая статорная и роторная обмотка обозначается соленоидом. $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{i}_s$, $\mathbf{R}_s$ и $\mathbf{L}_s$ обозначения матриц, состоящих соответственно из напряжения, тока, сопротивления и само- или взаимоиндуктивности статорных обмоток. Подобным образом но индексом буквой r обозначаются величины касательно ротора. Матрица $\mathbb{L}_{sr}$ состоит из взаимоиндуктивностей статорных и роторных обмоток. Знак $+$, как верхний индекс, является знаком транспозиции и $p=\frac{d}{dt}$ знак производной по времени. При написании уравнений предполагается, что эффект магнитных нелинейностей и магнитных неоднородностей, созданных фазами; а также скин-эффект и потери от гистерезиса и вихревых токов пренебрегаемы. В течении расчётов предполагается распределение индукции, созданной обмотками в воздушном зазоре синусоидальное.

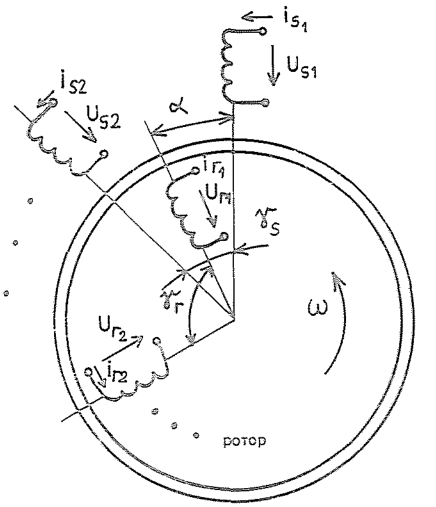

Рис. 1

Индуктивность обмоток зависит от угла α, и этим косвенно от времени. В соотношении (1) — испольнив исчисление производной — получается

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{R}_s & 0 \\ 0 & \mathbb{R}_r \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \mathbb{M}_s & \mathbb{M}_{sr} \\ \mathbb{M}_{sr}^+ & \mathbb{M}_r \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbb{L}_s & \mathbb{L}_{sr} \\ \mathbb{L}_{sr}^+ & \mathbb{L}_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$\omega = p\alpha \tag{3}$$

является угловой скоростью ротора насчёт двухполюсной машины, и

$$\mathbb{M}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbb{L}_{ij} \qquad i, j = s, r \tag{4}$$

обозначение производного по α матриц-индуктивностей. Если в выражении (2) блочные матрицы обозначаются лишь одной матрицей и так можно написать выражение короче:

$$u = (\mathbb{R} + \omega \mathbb{M})\, i + \mathbb{L} p i \tag{5}$$

2. Проведение преобразования, элиминирующего меняющиеся параметры

Элементы матриц $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$, находящиеся в выражении (5) зависят от угла α. Изменение индуктивностей создается следствием вращения ротора, поэтому их зависимость от угла α периодическая. При случае периодических меняющихся параметров можно преобразовать уравнения системы таким образом, что получается система уравнений постоянными параметрами, и в отдельных случаях преобразование задаётся и в законченной форме [4]. В дальнейшем предписываются условия, которые должны удовлетвориться преобразованием:

1. параметры, зависящие от угла α элиминируются,
2. элементы преобразующей матрицы $\mathbb{C}$ являются независимыми от численной величины параметров исследуемой электрической машины,
3. мощность системы возможно рассчитывать при использовании преобразованных переменных в такой форме, как при случае первоначальных переменных (инвариантность мощности),
4. статорные и роторные величины преобразуются независимо друг от друга,
5. преобразующая матрица токов и напряжений являются одинаковыми.

Вышеуказанные требования в специальной литературе — можно сказать — являются общими.

Приняв во внимание 5-ое условие преобразованные величины определяются следующими формулами:

$$u_t = \mathbb{C}^{-1} u, \tag{6}$$

и

$$i_t = \mathbb{C}^{-1} i \tag{7}$$

На основании 4-ого условия преобразующая матрица является квазидиагональной, то есть

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_s & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{C}_r \end{bmatrix} \tag{8}$$

Соответственно 3-ему условию, равенство насчёт эффективной мощности системы

$$P = i^* u = (\mathbb{C} i_t)^* (\mathbb{C} u_t) = i_t^* \mathbb{C}^* \mathbb{C} u_t = i_t^* u_t \tag{9}$$

(знак является обозначением сопряженной матрицы) исполняется в таком случае, если [1]:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{-1} \tag{10}$$

т. е. преобразующая матрица унитарная. Преобразуя уравнение (5) соответственно (6) и (7) формулами:

$$u_t = [\mathbb{C}^* \mathbb{R} \mathbb{C} + \mathbb{C}^* p (\mathbb{L} \mathbb{C})]\, i_t + \mathbb{C}^* \mathbb{L} \mathbb{C}\, p\, i_t \tag{11}$$

Пусть обозначение преобразованных матриц параметров следующие:

$$\mathbb{C}^* \mathbb{R} \mathbb{C} = \mathbb{R}_t \tag{12}$$

$$\mathbb{C}^* p\, \mathbb{L} \mathbb{C} = \mathbb{G}_t \tag{13}$$

$$\mathbb{C}^* \mathbb{L} \mathbb{C} = \mathbb{L}_t \tag{14}$$

Таким обозначениями

$$u_t = (\mathbb{R}_t + \mathbb{G}_t)\, i_t + \mathbb{L}_t\, p\, i_t, \tag{15}$$

выражение является точно конформным, как уравнение (5), но в нём не могут представляться параметры, зависимые от угла α (1-ое условие). Поэтому и при $\omega \neq 0$ справедливо, что

$$p\, \mathbb{L}_t = \omega \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbb{C}^* \mathbb{L} \mathbb{C}) \equiv \mathbb{0}\,. \tag{16}$$

В дальнейшем установятся условия, при которых преобразование соответствующее выражением (16) имеет результатом матрицы $\mathbb{R}_t$ и $\mathbb{G}_t$, независимые от угла α.

На основании формул (13) и (16) получается, что

$$\mathbb{G}_t = -\omega \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbb{C}^* \right) \mathbb{L} \mathbb{C} \tag{17}$$

т. е. из матрицы $\mathbb{G}_t$ можно выносить угловую скорость множителем.

Поэтому в случае неизвестной угловой скорости надо применять и уравнение движения ротора при определении переменных, выступающих в выражении (11).

В таком случае, если преобразующая метрица удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathbb{C}^* = \mathbb{F}^*\mathbb{C}^* \tag{18}$$

где $\mathbb{F}^*$ не зависит от угла α, тогда:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathbb{C}^*\right)\mathbb{L}\mathbb{C} = \mathbb{F}^*\mathbb{C}^*\mathbb{L}\mathbb{C} = \mathbb{F}^*\mathbb{L}_t \tag{19}$$

т. е. матричный сможитель, выступающий в матрице $\mathbb{G}_t$ является постоянным. Соответственно уравнению (18) является

$$\mathbb{C} = \mathbb{S}\, e^{\mathbb{F}\alpha}, \tag{20}$$

где $\mathbb{S}$ представляет собой матрицу с постоянными элементами. Вследствие условия инвариантности мощности (10):

$$\mathbb{S}\,\mathbb{S}^* = \mathbb{1} \tag{21}$$

и

$$\mathbb{F} = -\mathbb{F}^* \tag{22}$$

т. е. $\mathbb{S}$ является комплексной унитарной, а $\mathbb{F}$ является комплексной кососимметрической матрицей [4].

Можно доказать, что применяя преобразование, соответствующее вышеуказанным, преобразованные сопротивления, определяемые формулой (12) будут независимые от угла α, если сопротивление статорных, а также роторных обмоток одинаковы, т. е.:

$$\mathbb{R}_s = R_s\,\mathbb{1}\,, \tag{23}$$

$$\mathbb{R}_r = R_r\,\mathbb{1}\,. \tag{24}$$

Согласно 2-ому условию, относящемуся к преобразованию элементы матриц $\mathbb{S}$ и $\mathbb{F}$ хочется определить независимо от численной величины индуктивностей, по типу машин всеобщностью. Один из методов определения матриц $\mathbb{S}$ и $\mathbb{F}$ представляется в рамках следующего примера.

3. Определение преобразующей матрицы при симметричной n—m фазной машине

Симметричная n—m фазная машина имеет на статоре номер n штук, и на роторе номер m штук обмоток. Максимумы возбуждений, созданных через обмотки появляются с угловым отклонением на угле γ_s и также γ_r [6]. Размер воздушного зазора машины постоянный, поэтому только взаимоиндуктивности статорных и роторных обмоток зависят от угла α, т. е.

$$\mathbb{L}_{sr}=L_{sr}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha+\gamma_r) & \dots & \cos(\alpha+(m-1)\gamma_r) \\ \cos(\alpha-\gamma_s) & \cos(\alpha+\gamma_r \quad \gamma_s) & \dots & \cos(\alpha+(m-1)\gamma_r-\gamma_s) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cos(\alpha-(n-1)\gamma_s) & \cos(\alpha+\gamma_r-(n-1)\gamma_s) & \dots & \cos(\alpha+(m-1)\gamma_r-(n-1)\gamma_s) \end{bmatrix} \tag{24}$$

а также матрицы

$$\mathbb{L}_s=\chi\,(L_s, L_{s2}, \dots L_{sn}) \tag{25}$$

и

$$\mathbb{L}_r=\chi\,(L_r, L_{r2}, \dots L_{rm}) \tag{26}$$

являются циклическими [6]. При обозначении циклических матриц задаётся в скобках первый строк матриц за буквой χ ссылающейся на циклический характер матриц [4]. В вышеуказанных матрицах L_{sr} обозначает максимум взаимоиндуктивности, между одной статорной и одной роторной обмотками; L_s и L_r обозначают самоиндуктивность статорных и роторных обмоток соответственно, кроме того $L_{si}(i=2,\dots n)$ и $L_{ri}(i=2,\dots,m)$ соответственно обозначают взаимоиндуктивности статорных и роторных обмоток.

Известно, что матрицу, состоящую из циклических блоков, можно преобразовать в матрицу, состоящую из диагональных блоков [5]. Из этого следует, что матрицу индуктивности фазной машины в случае $n=m$ можно преобразовать в матрицу с диагональными блоками независимо от численной величины индуктивности, потому что собственные векторы циклических матриц не зависят от численной величины элементов [5].

Если $n\neq m$, тогда матрица $\mathbb{L}_{sr}$ является нециклическим, но по расчёту [6, 7] её преобразованная похожа на матрицу, получаемую в случае $n=m$. Итак в преобразующей матрице, заданной по формуле (20):

$$\mathbb{S}=\begin{bmatrix}\mathbb{S}_n & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{S}_m\end{bmatrix} \tag{27}$$

где $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{S}_m$ состоят из собственных векторов циклических матриц порядка n и m соответственно. Преобразуя матрицу индуктивностей по матрице (27) получается:

$$\mathbb{S}^*\mathbb{L}\mathbb{S}=\begin{bmatrix}\mathbb{S}_n^*\mathbb{L}_s\mathbb{S}_n & \mathbb{S}_n^*\mathbb{L}_{sr}\mathbb{S}_m \\ \mathbb{S}_m^*\mathbb{L}_{sr}^+\mathbb{S}_n & \mathbb{S}_m^*\mathbb{L}_r\mathbb{S}_m\end{bmatrix}, \tag{28}$$

где

$$\mathbb{S}_n^*\mathbb{L}_s\mathbb{S}_n=\langle L_{s0}, L_{s+}, L_{s0}, \ldots, L_{s0}, L_{s-}\rangle \tag{29}$$

$$\mathbb{S}_m^*\mathbb{L}_r\mathbb{S}_m=\langle L_{r0}, L_{r+}, L_{r0}, \ldots, L_{r0}, L_{r-}\rangle \tag{30}$$

являются диагональными матрицами, состоящими из собственных чисел матриц $\mathbb{L}_s$ и $\mathbb{L}_r$; кроме того:

$$\mathbb{S}_n^*\mathbb{L}_{sr}\mathbb{S}_m=(\mathbb{S}_m^*\mathbb{L}_{sr}^+\mathbb{S}_n)^*=L_{srt}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & m-1 & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\alpha} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & e^{-j\alpha} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \\ \\ n-1 \\ n \end{array} \tag{31}$$

В формулах (29)—(31) используются следующие обозначения:

$$L_{so}=L_s-L_{ks}, \qquad L_s{}^+=L_{s-}=L_s+\left(\frac{n}{2}-1\right)L_{ks} \tag{^{po}}$$

$$Л_{ro}=L_r-L_{kr}, \qquad L_{r+}=L_{r-}=L_r+\left(\frac{m}{2}-1\right)L_{kr} \tag{33}$$

где L_{ks} и L_{kr} являются максимумами статорных и роторных обмоток, соответственно, и

$$L_{srt} = \frac{L_{sr}}{2}\sqrt{mn}\,. \tag{34}$$

Матрица $\mathbb{F}$ определяется при помощи вышеполученных результатов. Можно доказать, что матрица $\mathbb{F}$ может быть диагональной [7], и так как по (22), она комплексная кососимметричная, состоит из мнимых чисел. Если

$$e^{\mathbf{F}\alpha} = \langle e^{\mathbf{F}_s\alpha}, e^{\mathbf{F}_r\alpha}\rangle = \langle e^{j\alpha\langle f_1, f_2, \dots f_n\rangle}, e^{j\alpha\langle f'_1, f'_2, \dots f'_m\rangle}\rangle \tag{35}$$

тогда можно написать относительно блокам матрицы (28), зависимых от угла α, что

$$e^{\mathbf{F}_s^*\alpha}\mathbb{S}_n^*\mathbb{L}_{sr}\mathbb{S}_m\,e^{\mathbf{F}_r\alpha} = L_{srt}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\alpha(1-f_2+f'_2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{-j\alpha(1+f_n-f'_m)} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Условие независимости от α элементов вышеуказанной матрицы является:

$$1-f_2+f'_2=0,\ 1+f_n-f'_m=0 \tag{37}$$

и остальные параметры f_i и f'_i могут быть любые; в дальнейшем они считаются нолем. Кроме этого пусть

$$f_2 = -f_n = f \tag{38}$$

итак

$$f'_2 = -f'_m = f-1. \tag{39}$$

В случае постоянной угловой скорости

$$\alpha = \omega t \tag{40}$$

и

$$f\omega = \omega_f \tag{41}$$

и также

$$(f-1)\omega = \omega_f - \omega. \tag{42}$$

Используя этими формулами блоки преобразующей матрицы получаются в форме:

$$\mathbb{C}_s = \mathbb{S}_n e^{\mathbb{F}_s \alpha} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega_f t} & 1 & \dots & 1 & e^{-j\omega_f t} \\ 1 & e^{j(\omega_f t - \gamma_s)} & e^{-j2\gamma_s} & \dots & e^{-j(n-2)\gamma_s} & e^{-j(\omega_f t + (n-1)\gamma_s)} \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & e^{j(\omega_f t - (n-1)\gamma_s)} & e^{-j2(n-1)\gamma_s} & \dots & e^{-j(n-1)(n-2)\gamma_s} & e^{-j(\omega_f t + (n-1)^2\gamma_s)} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$\mathbb{C}_r = \mathbb{S}_m e^{\mathbb{F}_r \alpha} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j(\omega_f t - \alpha)} & 1 & \dots & 1 & e^{-j(\omega_f t - \alpha)} \\ 1 & e^{j(\omega_f t - \alpha - \gamma_r)} & e^{-j2\gamma_r} & \dots & e^{-j(m-2)\gamma_r} & e^{-j(\omega_f t - \alpha + (m-1)\gamma_r)} \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & e^{j(\omega_f t - \alpha - (m-1)\gamma_r)} & e^{-j2(m-1)\gamma_r} & \dots & e^{-j(m-2)(m-1)\gamma_r} & e^{-j(\omega_f t - \alpha + (m-1)^2\gamma_r)} \end{bmatrix} \tag{44}$$

Преобразования, употребляемые при анализе электрических машин, задаются как специальные случаи вышенаписанного общего преобразования. Например матрица преобразования $(0, f, b)$, применяющая при трёхфазных машинах получается подставляя $m=3$ и $\omega_f=0$ в матрицу (44):

$$\mathbb{C}_{(0,f,b)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\alpha} & e^{j\alpha} \\ 1 & e^{-j\alpha} e^{-j120^\circ} & e^{j\alpha} e^{-j240^\circ} \\ 1 & e^{-j\alpha} e^{-j240^\circ} & e^{j\alpha} e^{-j120^\circ} \end{bmatrix} \tag{45}$$

Резюме

Статья занимается с освоением преобразований, употребляемых в общей теории электрических машин. При расчёте рабочих режимов затруднение вызывается тем, что индуктивность обмоток машины зависит от угла α, характеризующего повёртывания ротора. Освоение преобразований, — элиминирующих параметры — зависящих от угла происходит как правило, главным образом на основе физических соображений, но необходимо исследовать задний план преобразующих методов с математическими процедурами. В статье показывается, что при обычных условиях матрица преобразования имеет форму $\mathbf{C} = \mathbf{S} e^{\mathbf{F}\alpha}$, де $\mathbf{S}$ комплексная унитарная, а $\mathbf{F}$ комплексная кососимметрическая матрица с постоянными элементами. В статье конкретно приведено определение преобразующей матрицы при симметричных $n-m$ фазных машинах.

Литература

1. Retter, Gy.: Az egységes villamosgépelmélet. (Общая теория электрических машин) Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1976.
2. Hancock, N. N.: Matrix analysis of electrical machinery Pergamon Press, 1974.
3. Willems, J. L.: A system theory approach to unified electrical machine analysis, Int. J. Control, vol. 15 (1972) No. 3. 401. 418. pp.
4. Ф. Р. Ганмахер: Теория матриц. Наука, Москва 1966 г.
5. Rózsa, P.: Lineáris algebra és alkalmazásai (Линеарная алгебра и её применение) Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1974.
6. Ш. Сили: Электромеханическое преобразование энергии. (перевод с английского языка) Энергия, Москва 1968 г.
7. Sebestyén, I.: Nonreciprok kétkapukat tartalmazó hálózati modellek alkalmazása villamosgépek és géprendszerek üzemviszonyainak számításában. Kandidátusi értekezés, 1979. (Применение цепных моделей, содержащих невзаимные 2-Р цепи при расчёте рабочих режимов электрических машин и систем машин. Кандидатская диссертация 1979.)

Имре Шебештьен, H-1521 Будапешт