

# ÜBER DIE BEMESSUNG DER INDUKTIVITÄT VON EINLAGIGEN SPULEN

Von

L. KOLLER

Institut für Starkstromtechnik, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 15 Mai 1979

Vorgelegt von Prof. Dr.O. P. GESZTI

## Einleitung

Ziel dieser Arbeit war die Errechnung der Induktivität von einlagigen leeren Spulen. Die Spule, deren perspektivisches Bild in Abb. 1. ersichtlich ist, wurde aus einem nicht magnetisierbaren Leiterband mit ablangem Querschnitt mit gleichmäßiger Gewindesteigung hergestellt. Die der Stromzuführung dienenden Teile liegen mit der Spulenachse parallel oder winkelrecht.

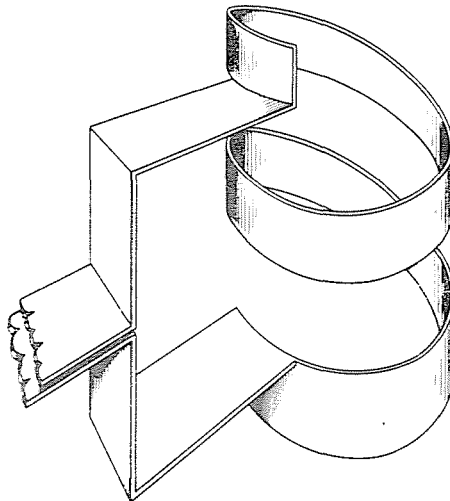


Abb. 1

Bis jetzt hat man die Spuleninduktivität ( $L$ ) von Spulen mit definierter Länge — mit besonderer Rücksicht auf die induktive Erwärmung — aus der Induktivität ( $L_0$ ) von den unendlich „verdünnten“ Spulen ( $d_1/l_1 \rightarrow 0$ ) mit Hilfe des Nagaoka-Faktors ( $\alpha_{LN}$ ) berechnet [1 – 10, 12 – 17]:

$$L = L_0 \cdot \alpha_{LN} \quad [\text{H}] \quad (1)$$

$$L_0 = \frac{\mu_0 d_1^2 \pi}{4 l_1} N^2 \quad [\text{H}] \quad (2)$$

wo

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [Vs/Am] die Permeabilität des Vakuums,

$d_1$ : den äquivalenten Durchmesser der Spule [m],

$l_1$ : die Länge der Spule [m],

$N$ : die Windungszahl der Spule bedeuten.

Die Verwendbarkeit des Nagaoka-Faktors wird durch den Umstand beschränkt bzw. verunsichert, daß er die Gewindeform der einzelnen Windungen, die Zwischenräume der Spule und den Einfluß der Stromzufuhr nicht den Tatsachen entsprechend berücksichtigt. Weiterhin wird der äquivalente Durchmesser der Spule — der bei der Anwendung des Nagaoka-Faktors den Durchmesser eines Rohres mit unendlich dünner Rohrwand bedeutet — nicht in jedem Fall, und wenn dann auch nicht richtig festgestellt. Dies erhöht weiter die Unsicherheit.

Die hier folgende Berechnungsmethode ist geeignet durch die Beseitigung dieser Mangelhaftigkeit die Bemessungssicherheit zu verbessern.

### Berechnungsmodell

Die Bestimmung des Berechnungsmodells bedeutet eigentlich das Berechnen der äquivalenten Maße. Zuerst wird der anlange Spulenleiter von begrenzten Maßen zu einem unendlich dünnen Band umgestaltet, wodurch die aus den Flußverkettungen des in dem Leiter fließenden elektrischen Stromes berechenbaren inneren Induktivitäten und Reaktanzen gleich Null werden. Die Reaktanz der aus dem unendlich dünnen Band hergestellten Spule muß mit derjenigen der wahrhaftigen Spule übereinstimmen. Demzufolge kann das richtige Prinzip der Bestimmung der äquivalenten Maße nur dasjenige sein, daß das aus den Umänderungen zu gleichen Maßen sich ergebende Reaktanz-Wachstum mit den inneren Reaktanzen gleich sei.

Der sich zeitlich wechselnde Spulenstrom verteilt sich im Raume nicht gleichmäßig, weshalb die der Verteilung entsprechende Flußverkettung, d.h. die inneren Reaktanzen, die äquivalenten Maße und dadurch die Induktivität der Spule von der Frequenz abhängig ist. In diesem Falle ist es zweckmäßiger statt von der Induktivität der Reaktanz zu reden.

Im Falle eines sinusförmig wechselnden Spulenstromes werden die inneren Reaktanzen aus einem eindimensionalen Modell unter Annahme eines mit der Oberfläche des Leiters parallelen magnetischen Feldes, d.h. eines definiten Teiles von einem endlos langen Induktor und von einer endlos breiten Zuleitung festgelegt. Die Rechtmäßigkeit der Approximation wird durch die Tatsache unterstützt, daß die zur Berechnung der äquivalenten Maße

gebrauchten inneren Reaktanzen nur einen ganz kleinen Teil der vollen Reaktanz der Spule bilden, weshalb der durch den Gebrauch des wirklichkeitsfremden eindimensionalen Modells begangene Fehler ebenfalls sehr gering sein wird. Zur Bestätigung alldessen wollen wir von einer endlos langen zu-leitungslosen Spule einen begrenzten Abschnitt von Länge  $l$  und Windungszahl  $N_l$  untersuchen (Abb. 2.)

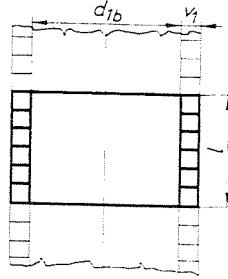


Abb. 2

Die Reaktanz des Luftspalts beträgt

$$X_1 = \frac{\omega \mu_0 d_{1b}^2 \pi}{4l} \quad [\text{Ohm}] \quad (3)$$

wo

$\omega$ : die Kreisfrequenz des Spulenstromes [1/s] ist.  
Die innere Reaktanz der Spule ist

$$X_b = \frac{\rho_1 d_{1b} \pi N_l}{\delta_1 \cdot l} \cdot K_{x1} \quad [\text{Ohm}] \quad (4)$$

wo

$\rho_1$ : den spezifische Widerstand des Spulenmaterials [Ohm. m]  
 $\delta_1$ : die Eindringungstiefe [m]  
 $K_{x1}$ : die imaginäre Komponente der Widerstandfunktion bedeuten.  
Die an den Klemmen der Spule gemessene Reaktanz:

$$X_t = X_1 + X_b \quad [\text{Ohm}]. \quad (5)$$

Die Reaktanz der Spule dividiert durch die innere Reaktanz ermöglicht die Einführung der  $\kappa$  Verhältniszahl:

$$\kappa = \frac{X_t}{X_b} = 1 + \frac{\frac{\omega \mu_0 d_{1b}^2 \pi}{4l}}{\frac{\rho_1 d_{1b} \pi N_l}{\delta_1 l} \cdot K_{x1}} \quad (6)$$

Die Formel

$$\rho_1 = \frac{\delta_1^2 \omega \mu_0}{2} \quad (7)$$

und die Formel

$$x_{1b} = \frac{d_{1b}}{\sqrt{2\delta_1}} \quad (8)$$

in die Gleichung (6) eingesetzt, erhalten wir nach Reduzierung:

$$\kappa = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2K_{x1}}}{x_{1b}}} \quad (9)$$

Im Falle des asymptotischen Zusammenhanges  $x_{1b} \geq 10$  zur Bestimmung der Widerstandsfunktion  $K_{x1}$  in der Gleichung (9):

$$K_{x1} = \frac{\text{sh } 2\varepsilon_1 - \sin 2\varepsilon_1}{\text{ch } 2\varepsilon_1 - \cos 2\varepsilon_1} \quad (10)$$

wo

$$\varepsilon_1 = \frac{v_1}{\delta_1} \quad (11)$$

In Anbetracht, daß die Spulen zum Erreichen des Minimums des effektiven Wechselstromwiderstandes  $\varepsilon_1 \approx \pi/2$  bemessen werden, können wir  $K_{x1}$  ( $K_{x1} = 0,9172$ ) als konstant annehmen. Die Verhältniszahl  $\kappa$  ist also nur von dem Parameter  $x_{1b}$  abhängig. In Abb. 3. ist  $\kappa$  in Abhängigkeit von  $x_{1b}$  dargestellt, woraus festzustellen ist, daß sich in der Praxis zwischen der vollen und der inneren Reaktanz der Spule Unterschiede von Größenordnungsdifferenzen ergeben.

In der Profildarstellung (Abb. 4.) ist das unendlich verdünnte Leiterband mit einer dicken Linie gezeichnet.

Die Bezeichnungen der Abb. 4. anwendend ist der äquivalente Durchmesser der Spule nach [2]:

$$d_1 = d_{1b} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2K_{x1}}}{x_{1b}}} \quad (12)$$

Der aus dem obigen Prinzip reduzierbare Zusammenhang der äquivalenten Entfernung der Zuleitung beträgt

$$l_4 = l_{4b} + \delta_1 K_{x1} \cdot \quad (13)$$

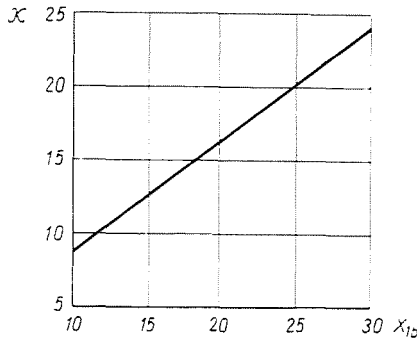


Abb. 3

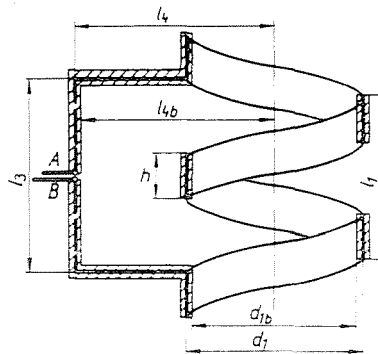


Abb. 4

Die mit  $l_3$  bezeichnete äquivalente Entfernung der Zuleitung wird bei der Bemessung der Spule unmittelbar nicht gebraucht, doch bei der Deduktion der Induktivitätsfaktoren mit dem Wert

$$l_3 = N \cdot c - h \quad (14)$$

beachtet, wo  $c$  die Steigung der Windungen bedeutet.

Nach Feststellung der äquivalenten Maße kann auch das Berechnungsmodell, in dessen Leiter die Verteilung der Stromdichte gleichmäßig ist, gezeichnet werden; durch die Anwendung des Eindimensionsmodells ergibt

sich nämlich, daß sich bei der Spule die Stromdichte nur radial, bei der Zuleitung aber nur in Richtung der Dicke des Leiters ändert. Diese Änderungen wurden jedoch durch die in das unendlich dünne Leiterband konzentrierten Ströme und durch die Berechnung der äquivalenten Maße behoben.

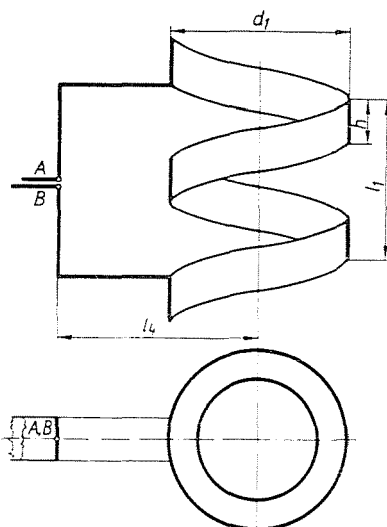


Abb. 5

Obwohl sich die Stromdichte in der Wirklichkeit auch longitudinal ändert, konnte dies, bei unserem Modell, ebenso, wie in der übrigen Fachliteratur nicht berücksichtigt werden. Für die Berechtigung der Approximation spricht der Umstand, daß die longitudinale Änderung nur in den äußeren Windungen wesentlich ist und durch die Lücke zwischen den Windungen, und bei der induktiven Erwärmung durch die Anwesenheit des Einsatzes gleichmäßiger wird [11].

### Bemessung

Die Induktivität der Spule bezogen auf die Klemmen A und B sind bei gegebener Frequenz und sinusoidalem Spulenstrom aus dem folgenden Zusammenhang zu berechnen:

$$L_{AB} = \frac{\mu_0 d_1^2 \pi}{4 l_1} \cdot N^2 \cdot \alpha_{L1} \quad [\text{H}] \quad (15)$$

wo

$$\alpha_{L1} = \alpha_{L1} \left( N; g; \frac{d_1}{l_1}; q \right)$$

der Selbstinduktivitätsfaktor des Induktors bezogen auf die Klemmen *A* und *B* ist.

Vergleicht man die Formel (15) mit der in der Fachliteratur gebrauchten Formel (1) so ist festzustellen, daß in der Formel (15)  $\alpha_{L1}$ , das statt des Nagaoka-Faktors angewandt wird,  $\alpha_{L1}$  außer  $d_1/l_1$  noch von weiteren 3 Parametern abhängig ist, und die Induktivität der Spule für die, zwischen den Zuleitungsklemmen *A* und *B* befindlichen Leiterschleifen berechnet ist ( $L_{AB}$ ).

Die Interpretation der unabhängigen Veränderlichen (der Hilfsparameter) des  $\alpha_{L1}$  Faktors und seine Berechnung sind die Folgenden:

*N*: Windungszahl der Spule

*g*: der Ausfüllungsfaktor der Spule, der das Verhältnis der mit Leiter ausgefüllten Spulenlänge ( $N \cdot h$ ) zur vollen Spulenlänge ( $l_1$ ) bedeutet, das heißt

$$g = \frac{N \cdot h}{l_1} \quad (16)$$

$\frac{d_1}{l_1}$ : das Durchmesser-Länge Verhältnis der Spule

*q*: die relative Distanz der Spulenzuleitung

$$q = \frac{2l_4}{d_1} \quad (17)$$

Die Bestimmung der Spuleninduktivität bedeutet also die Erfüllung der folgenden Aufgaben:

1. Wir berechnen die äquivalenten Maße der Spule und stellen die Hilfsparameter fest.
2. Wir bestimmen den Wert von  $\alpha_{L1}$  aus Tabelle oder Diagramm.
3. Wir setzen die Werte in die Formel (15) ein.

Im weiteren wird der Selbstinduktionskoeffizient der Spule bestimmt.

### Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten der Spule

Die zwischen Klemme *A* und *B* eine geschlossene Leiterschleife bildende Spule wird nach Abb. 6. in vier geometrisch trennbare Teile aufgeteilt. Es kann abgeleitet werden, daß die Selbstinduktivität der Spule bezogen auf Klemme *A* und *B* als die Summe von 5 Teilinduktivitäten berechnet werden kann. (Bei der Deduktion wurde die Symmetrie der Anordnung weiterhin der Umstand ausgenützt, daß wegen der Winkelrechtigkeit der Stromdichtevektoren der Teile 2.—3. und 3.—4. die entsprechenden Teilinduktivitäten Null ergeben):

$$L_{AB} = L_{11} + L_{33-44} + 2L_{13} + 4L_{14} + 2L_{24} \quad [H]. \quad (18)$$

Gleichung (18) dividiert durch Gleichung (2) ergibt Induktivitätskoeffizienten:

$$\alpha_{L1} = \alpha_{L11} + \alpha_{L33-44} + 2\alpha_{L13} + 4\alpha_{L14} + 2\alpha_{L24} \quad (19)$$

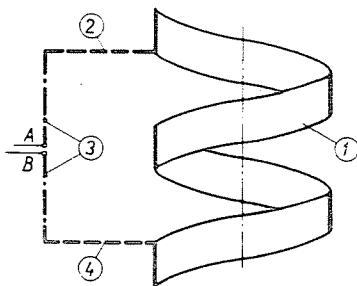


Abb. 6

wo

$\alpha_{L1} = \frac{L_{11}}{L_0}$ : der Selbstinduktivitätskoeffizient der Spule bezogen auf Klemme A und B ist. Durch Anwendung der Neumann-Formel berechneten Teilinduktivitätskoeffizienten sind:

$$\alpha_{L11} = \frac{l_1}{\pi^2 i^2 d_1^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}_1 \mathbf{J}'_1}{|\mathbf{r}_{11'}|} dV_1 dV'_1 \quad (20)$$

$$\alpha_{L33-44} = \frac{l_1}{\pi^2 i^2 d_1^2} \left[ \int_{V_3} \int_{V_3} \frac{\mathbf{J}_3 \mathbf{J}'_3}{|\mathbf{r}_{33'}|} dV_3 dV'_3 + 2 \int_{V_4} \int_{V_4} \frac{\mathbf{J}_4 \mathbf{J}'_4}{|\mathbf{r}_{44'}|} dV_4 dV'_4 \right] \quad (21)$$

$$\alpha_{L13} = \frac{l_1}{\pi^2 i^2 d_1^2} \int_{V_1} \int_{V_3} \frac{\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_3}{|\mathbf{r}_{13}|} dV_1 dV_3 \quad (22)$$

$$\alpha_{L14} = \frac{l_1}{\pi^2 i^2 d_1^2} \int_{V_1} \int_{V_4} \frac{\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_4}{|\mathbf{r}_{14}|} dV_1 dV_4 \quad (23)$$

$$\alpha_{L24} = \frac{l_1}{\pi^2 i^2 d_1^2} \int_{V_2} \int_{V_4} \frac{\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_4}{|\mathbf{r}_{24}|} dV_2 dV_4. \quad (24)$$



In den Formeln (20)—(24) sind

$i$ : die Spulenstromstärke in Längsrichtung des Leiters [A]

$\mathbf{J}_i$ ;  $\mathbf{J}'_i$  und  $dV_i$ ;  $dV'_i$  der Stromdichtevektor des Volumens  $V_i \left[ \frac{A}{m^2} \right]$  und

dessen Volumenelements [ $m^3$ ],

$|\mathbf{r}_{ik}|$  und  $|\mathbf{r}_{ii}'|$  die absoluten Werte der Distanz zwischen den Volumenelementen [ $m$ ].

Die in der Formel (18) und (19) vorkommenden  $L_{AB}$  und  $\alpha_{L1}$  Werte sind positiv, die Teilinduktivitäten und die denen entsprechenden Selbstinduktivitätskoeffizienten sind Werte mit Vorzeichen. Mit Berücksichtigung der Richtung der Stromdichten sind  $L_{11}$ ,  $L_{33-44}$ ,  $L_{14}$  sowie  $\alpha_{L11}$ ,  $\alpha_{L33-44}$ ,  $\alpha_{L4}$  positiv, doch  $L_{13}$ ,  $L_{24}$  und  $\alpha_{L13}$ ,  $\alpha_{L24}$  negativ.

Im weiteren wird  $\alpha_{L1}$  mit Hilfe der Formeln (19)—(24) bestimmt. Im Laufe der Deduktionen werden die folgenden — in den Bisherigen schon erwähnten — Annäherungen benützt:

— die die beiden Enden der Spule bedeutenden Klemmen  $A$  und  $B$  sind in einem Punkt zusammengeschlossen, — die spannungsinduzierende Wirkung der außer der Spule fließenden Ströme wird vernachlässigt,

— es wird angenommen, daß der Raum außerhalb der Spule nur mit Luft gefüllt ist, von der Anwesenheit jeglicher Elektrizitätsleiter, wird abgesehen,

— die Richtung des durch den Induktorenleiter fließenden Stromes von ständiger Dichte wird in der Längsrichtung des Leiters fließend interpretiert,

— die  $2 \times 90^\circ$  betragende Brechung (Winkel) des Leiters bei dem Anschluß der Teile 1.—2. und 1.—4. wird der Abb. 7. entsprechend in Betracht genommen d.h. die Länge der spiralwindigen Spule wird bis zur Symmetrieachse der 2. und 4. Teile gerechnet; von der Wirkung der gestrichelten Teile wird abgesehen.

Zu den Berechnungen werden die folgenden Parameter angewandt:

$$b = \frac{c}{2\pi} [m] \quad (25)$$

$$n = \frac{c}{2\pi a} \quad (26)$$

$$m = \frac{h}{a} \quad (27)$$

wo

$$a = \frac{d_1}{2} [m],$$

der Radius der Spule ist.

Die Parameter  $n$  und  $m$  sind auch von den Bemessungshilfsparametern der Spule zu berechnen:

$$m = \frac{2g}{N \cdot \frac{d_1}{l_1}} \quad (28)$$

und

$$n = \frac{N - g}{(N - 1)\pi N \frac{d_1}{l_1}} \quad (29)$$

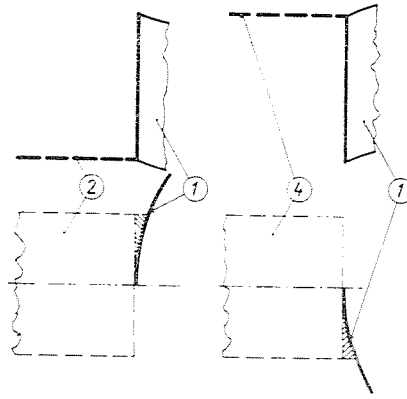


Abb. 7

Die mit Hilfe der obigen Parameter berechenbare geometrischen Daten sind

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}, \quad (30)$$

wo  $v$ : Winkel der Gewindesteigung [rad].

$$s = h \cdot \cos v = h \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} [m] \quad (31)$$

$$l_3 = 2N\pi b - h \quad (32)$$

$$f = a(q - 1) \quad (33)$$



wo  $\varepsilon$  den durch  $\bar{\mathbf{J}}_1$  und  $\bar{\mathbf{J}}'_1$  gebildenden Winkel bedeutet. Die auf die laufenden Punkte  $P_1$  und  $P'_1$  zielenden  $\bar{\mathbf{r}}_1$  und  $\bar{\mathbf{r}}'_1$  Ortsvektoren bestimmend, hat man

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = a \cos \varphi_1 \mathbf{i} + a \sin \varphi_1 \mathbf{j} + (b \varphi_1 + z_1) \mathbf{k} \quad (37/a)$$

$$\bar{\mathbf{r}}'_1 = a \cos \varphi_2 \mathbf{i} + a \sin \varphi_2 \mathbf{j} + (b \varphi_2 + z_2) \mathbf{k}, \quad (37/b)$$

$\bar{\mathbf{r}}_1$  nach  $\varphi_1$ , und  $\bar{\mathbf{r}}'_1$  nach  $\varphi_2$  differenziert ergibt:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \varphi_1} = -a \sin \varphi_1 \mathbf{i} + a \cos \varphi_1 \mathbf{j} + b \mathbf{k} \quad (38/a)$$

Da: 
$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}'_1}{\partial \varphi_2} = -a \sin \varphi_2 \mathbf{i} + a \cos \varphi_2 \mathbf{j} + b \mathbf{k} \quad (38/b)$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}'_1}{\partial \varphi_2}}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \varphi_1} \right| \cdot \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}'_1}{\partial \varphi_2} \right|}, \quad (39)$$

durch Anwendung der Formeln (38/a) und (38/b) nach der Vollendung des Reduzierens und des Transformierens

$$\cos \varepsilon = \frac{a^2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) + b^2}{a^2 + b^2}. \quad (40)$$

Der absolute Wert der Stromdichte-Vektoren nach der Substitution mit der Formel (31) ist

$$|\bar{\mathbf{J}}_1| = |\bar{\mathbf{J}}'_1| = \frac{i}{v \cdot s} = \frac{i}{v \cdot h \cdot \cos \nu}. \quad (41)$$

Wenn wir in die Formel (36) die Formel (40) und (41) einsetzen, erhalten wir das skalare Produkt der Stromdichte-Vektoren:

$$\bar{\mathbf{J}}_1 \cdot \bar{\mathbf{J}}'_1 = \frac{i^2 \cdot a^2 \cdot \cos (\varphi_2 - \varphi_1) + b^2}{v^2 \cdot h^2 \cdot \cos^2 \nu (a^2 + b^2)}. \quad (42)$$

Volumenelemente:

$$dV_1 = a d\varphi_1 \cdot dz_1 \cdot \cos \nu \quad (43/a)$$

und

$$dV'_1 = a d\varphi_2 \cdot dz_2 \cdot \cos \nu. \quad (43/b)$$

Abstand zwischen den beiden laufenden Punkten:

$$|\bar{\mathbf{r}}_{11}| = \sqrt{a^2 [2 - 2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)] + [b(\varphi_2 - \varphi_1) + z_2 - z_1]^2}. \quad (44)$$

In Anbetracht dessen, daß in den Formeln (42) und (44) die Exzesse  $\varphi_2 - \varphi_1$  und  $z_2 - z_1$  vorkommen, ist es zweckgemäß zu anderen Veränderlichen zu übergehen, wie folgt:

Alte Veränderlichen	Neue Veränderlichen
$\varphi_1$	$\varphi_1$
$\varphi_2$	$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$
$z_1$	$z_1$
$z_2$	$z = z_2 - z_1$

Die für die Veränderlichen aufgezeichnete Jakobi-Determinante ist einwertig. In Anbetracht dessen und die Werte der Formel (42)–(44) in die Formel (20) eingesetzt, ferner auf die den neuen Veränderlichen entsprechenden Integralgrenzen übergehend kann man, nach entsprechenden Vereinfachungen für  $\alpha_{L_{11}}$  das folgende vierfach Integral aufschreiben: (Das sechsfach Integral wurde wegen der Bandartigkeit des Leiters zu einem Vierfachen vereinfacht.)

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 h^2 (a^2 + b^2) N^2} \cdot \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} \int_{z_1=0}^h \int_{z=-z_1}^{h-z_1} \frac{a^2 \cos \varphi + b^2}{\sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (b\varphi + z)^2}} dz dz_1 d\varphi d\varphi_1. \tag{45}$$

Die Formel (45) nach der Veränderlichen  $z$  integriert:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 h^2 (a^2 + b^2) N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} \int_{z_1=0}^h (a^2 \cos \varphi + b^2) \cdot \left[ \operatorname{Arsh} \frac{b\varphi + z}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} \right]_{z=-z_1}^{h-z_1} dz_1 d\varphi d\varphi_1. \tag{46}$$

Nach der Einsetzung der Integralgrenzen:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 h^2 (a^2 + b^2) N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} \int_{z_1=0}^h (a^2 \cos \varphi + b^2) \cdot \tag{47}$$

$$\cdot \operatorname{Arsh} \frac{h-z_1+b\varphi}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + \operatorname{Arsh} \frac{z_1-b\varphi}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} dz_1 d\varphi d\varphi_1.$$

Nun soll nach der Veränderlichen  $z_1$  integriert werden:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 h^2 (a^2 + b^2) N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} (a^2 \cos \varphi + b^2) \cdot$$

$$\left[ \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (h-z_1+b\varphi)^2} - \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (b\varphi-z_1)^2} + \right.$$

$$\left. + (b\varphi_1-z_1) \operatorname{Arsh} \frac{b\varphi-z_1}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} - (h+b\varphi-z_1) \operatorname{Arsh} \frac{h+b\varphi-z_1}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} \right]_{z_1=0}^h d\varphi d\varphi_1. \quad (48)$$

Nach der Einsetzung der Integralgrenzen, nach vollzogenen Reduzierungen:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 h^2 (a^2 + b^2) N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} \left[ 2(a^2 \cos \varphi + b^2) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + b^2 \varphi^2} - \right.$$

$$\left. - (a^2 \cos \varphi + b^2) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (b\varphi + h)^2} - \right.$$

$$\left. - (a^2 \cos \varphi + b^2) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (b\varphi - h)^2} - \right.$$

$$\left. - 2(a^2 \cos \varphi + b^2) b\varphi \operatorname{Arsh} \frac{b\varphi}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + \right.$$

$$\left. + (a^2 \cos \varphi + b^2) (b\varphi + h) \operatorname{Arsh} \frac{b\varphi + h}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + \right.$$

$$+ (a^2 \cos \varphi + b^2)(b\varphi - h) \operatorname{Arsh} \frac{b\varphi - h}{2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} \Bigg] d\varphi d\varphi_1. \quad (49)$$

Die Bezeichnungen (26) und (27) einführend:

$$\begin{aligned} \alpha_{L_{11}} = & \frac{l_1}{4\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} \left\{ (\cos \varphi + n^2) \left[ 2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2 \varphi^2} - \right. \right. \\ & - \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2} - \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2} - \\ & - 2n\varphi \operatorname{Arsh} \frac{n\varphi}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + (n\varphi + m) \operatorname{Arsh} \frac{n\varphi + m}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + \\ & \left. \left. + (n\varphi - m) \operatorname{Arsh} \frac{n\varphi - m}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} \right] \right\} d\varphi d\varphi_1. \quad (50) \end{aligned}$$

Jetzt sollte die Integrierung nach der Veränderlichen  $\varphi$  erfolgen, das jedoch in geschlossener Form nicht möglich ist. Es würde zweckgemäß sein zuerst nach  $\varphi_1$  zu integrieren, da im Integrand der Formel (50)  $\varphi_1$  nicht vorkommt. Bezeichnen wird diesen Integrand mit  $F(\varphi)$ , so ist:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{\varphi=-\varphi_1}^{2N\pi-\varphi_1} F(\varphi) d\varphi d\varphi_1. \quad (51)$$

Zum Auftauschen der Integralgrenzen betrachte man Abb. 9.

Nach dieser läßt sich Formel (51) als Summe zweier Integrale aufschreiben:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \left[ \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi-\varphi} F(\varphi) d\varphi_1 d\varphi + \int_{\varphi=-2N\pi}^0 \int_{\varphi_1=-\varphi}^{2N\pi} F(\varphi) d\varphi_1 d\varphi \right] \quad (52)$$

Das in Klammern stehende zweite Integral umwandelnd erhält man:

$$\int_{\varphi=-2N\pi}^0 \int_{\varphi_1=-\varphi}^{2N\pi} F(\varphi) d\varphi_1 d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \int_{\varphi_1=\varphi}^{2N\pi} F(-\varphi) d\varphi_1 d\varphi. \quad (53)$$

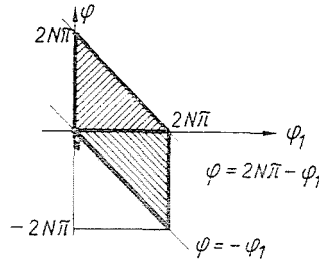


Abb. 9

Die Formel (53) in die Formel (52) einsetzend und nach  $\varphi_1$  integrierend bekommt man:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{4\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\varphi=0}^{2N\pi} (2N\pi - \varphi) [F(\varphi) + F(-\varphi)] d\varphi. \quad (54)$$

Die Werte  $F(\varphi)$  und  $F(-\varphi)$  in die Formel (54) einsetzend:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{l_1}{2\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \left\{ (2N\pi - \varphi) (\cos \varphi + n^2) \cdot \left[ 2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2 \varphi^2} - \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2} - \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2} - 2n\varphi \operatorname{Arsh} \frac{n\varphi}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + (n\varphi + m) \operatorname{Arsh} \frac{n\varphi + m}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} + (n\varphi - m) \operatorname{Arsh} \frac{n\varphi - m}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} \right] \right\} d\varphi. \quad (55)$$



Zur Überprüfung soll die Gleichung (55) in diesem speziellen Fall untersucht werden, wenn es keine Gewindesteigung gibt d.h.  $c=0$  und  $N=1$  ist. In diesem Fall ist Spulenhöhe ( $l_1$ ) mit der Breite des Leiters ( $h$ ) gleich ( $l_1=h$ ). Dieser Fall stimmt mit den Ausgangsbedingungen der Nagaoka-Faktor-Berechnung überein, wir müssen folglich die, bei der Deduktion des Nagaoka-Faktors erhaltene Endformel erhalten. Aus der Annahme  $c=0$  geht hervor, daß:

$$n = \frac{b}{a} = \frac{c}{2\pi a} = 0.$$

Aus der Bedingung  $l_1=h$  folgt, daß  $m = \frac{h}{a} = \frac{l_1}{a}$ , weitere Bedingung:  $N=1$ .

Nach der Einsetzung der obigen Werte in die Formel (55) und nach Ordnung hat man:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{1}{\pi^2 l_1 N^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ (2\pi - \varphi) \cos \varphi \left( l_1 \operatorname{Arsh} \frac{l_1}{2a \sin \frac{\varphi}{2}} - \sqrt{l_1^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2a \sin \frac{\varphi}{2}} \right) \right] d\varphi. \quad (56)$$

In dem Integrand der Formel (56) vorkommende Faktor  $(2\pi - \varphi)$  kann auch als  $2\pi - \varphi = \pi + (\pi - \varphi)$  geschrieben werden, den Rest des Integranden mit  $(\pi - \varphi)$  multiplizierend, beträgt der Wert des Integranden zwischen 0 und  $2\pi$  Null, weshalb:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{1}{\pi l_1 N^2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos \varphi \left( l_1 \operatorname{Arsh} \frac{l_1}{2a \sin \frac{\varphi}{2}} - \sqrt{l_1^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2a \sin \frac{\varphi}{2}} \right) \right] d\varphi. \quad (57)$$

Nach partieller Integrierung:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{1}{\pi l_1 N^2} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \left( \frac{l_1^2 a \cos \frac{\varphi}{2}}{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \frac{l_1^2}{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} + \right)$$

$$+ \frac{2a^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{l_1^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - a \cos \frac{\varphi}{2} \Big) d\varphi. \quad (58)$$

Nach Transformieren und Ordnen:

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{1}{\pi l_1 N^2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left( l_1^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2a \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi. \quad (59)$$

Es ist sichtbar, daß die Formel (59) mit dem bei der Deduktion des Nagaoka-Faktors erhaltenen Zusammenhang übereinstimmt [8] [12].

Zu der Untersuchung des Integrals (55) zurückkehrend ist es sichtbar, daß es in geschlossener Form nicht zu integrieren und auch nicht zu einem elliptischen Integral zurückführbar ist. Eine weitere Schwierigkeit bedeutet es, daß man es mit einem uneigentlichen Integral zu tun hat (an Stelle  $\varphi=0$  wird der Wert des Integranden unendlich). Das Integral wird auf numerischem Wege berechnet. Als erster Schritt werden die Arsh Funktionen enthaltenden Posten des Integranden (55) mit Hilfe einer  $\ln$  Funktion ausgedrückt, ferner zur Vergrößerung der Genauigkeit die quadratwurzelligen Posten, wie folgt, umgeändert:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2} - \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2} - \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2} = \\ & = \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2} - \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2} - \\ & - \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2} = \frac{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2 - 4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (n\varphi + m)^2}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2}} + \\ & + \frac{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2 - 4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (n\varphi - m)^2}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2\varphi^2} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2}}. \quad (60) \end{aligned}$$

Mit Anwendung der Formel (60) nach denselben Umänderungen und Vereinfachungen kann die Formel (55) auf die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{L_{11}} = & \frac{l_1}{2\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\phi=0}^{2N\pi} \left\{ (2N\pi - \phi)(\cos \phi + n^2) \cdot \right. \\
 & \left. \left[ \frac{2n\phi - m^2}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + n^2 \phi^2} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + (n\phi - m)^2}} - \frac{2n\phi + m^2}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + n^2 \phi^2} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + (n\phi + m)^2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + n\phi \ln \left[ \frac{n\phi + m + \sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + (n\phi + m)^2}}{\left( n\phi + \sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + n^2 \phi^2} \right)^2} \right] \right\} + \right. \\
 & \left. + (2N\pi - \phi)(\cos \phi + n^2)(n\phi - m) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \ln \left( n\phi - m + \sqrt{4\sin^2 \frac{\phi}{2} + (n\phi - m)^2} \right) \right\} d\phi. \tag{61}
 \end{aligned}$$

Das Integral in der Formel (61) ist noch uneigentlich, der letzte Posten seines Integranden wird an der Stelle  $\phi = 0$  unendlich. Um das zu eliminieren, wählen wir ein Integral (I), das mit dem Integral (61) gleiche Veränderlichen und Grenzen hat, dieses von dem Integral (61) subtrahierend besteht mehr kein uneigentliches Integral.

Dieses Integral kann mit Hilfe der approximativen Funktion —, genommen aus der Umgebung des letzten Postens des Integranden (61) —, geschrieben werden:

$$I = \frac{l_1}{2\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\phi=0}^{2N\pi} (2N\pi - \phi)(\cos \phi + n^2) \cdot$$

$$\cdot (n\varphi - m) \ln(-m + \sqrt{\varphi^2 + m^2})] d\varphi. \quad (62)$$

Das Integral  $I$  ist in seiner in der Formel (62) gegebenen Form, uneigentlich, darum muß es umgeändert werden:

$$I = \frac{l_1}{2\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \{(2N\pi - \varphi)(\cos \varphi + n^2)(n\varphi - m)\} \left[ \ln \varphi - \text{Arsh} \frac{m}{\varphi} \right] d\varphi. \quad (63)$$

Wenn wir die Teile in der Akkolade und in den eckigen Klammern als separate Faktoren betrachten, erhalten wir nach partieller Integration:

$$\begin{aligned} I = & \frac{l_1}{2\pi^2 m^2 (1+n) a^2 N^2} \left\{ (2N\pi - \varphi)(\cos \varphi + n^2)(n\varphi - m) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[ \varphi(\ln \varphi - 1) - \varphi \text{Arsh} \frac{m}{\varphi} - m \text{Arsh} \frac{\varphi}{m} \right] \right\}_{\varphi=0}^{2N\pi} + \\ & + \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \{(n\varphi - m)[(2N\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi + n^2] - \\ & - n(2N\pi - \varphi)(\cos \varphi + n^2)\} \cdot \\ & \cdot \left[ \varphi(\ln \varphi - 1) - \varphi \text{Arsh} \frac{m}{\varphi} - m \text{Arsh} \frac{\varphi}{m} \right] d\varphi \}. \quad (64) \end{aligned}$$

Es ist sichtbar, daß der Wert des ersten in der Akkolade befindlichen Teiles des Ausdruckes (64) nach der Einsetzung  $\varphi=0$  und  $2N\pi$  Null ergibt. Diesen Umstand ausnützend, ferner die Arsh Funktionen enthaltenden Posten in logarithmische Form zurückgeschreibend:

$$\begin{aligned} I = & \frac{l_1}{2\pi^2 m^2 (1+n^2) a N^2} \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \{(n\varphi - m)[(2N\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi + n^2] - \\ & - n(2N\pi - \varphi)(\cos \varphi + n^2)\} \left[ \varphi(\ln \varphi - 1) - \right. \quad (65) \end{aligned}$$

$$-\varphi \ln \left( \frac{m}{\varphi} + \sqrt{\frac{m^2}{\varphi^2} + 1} \right) - m \ln \left( \frac{\varphi}{m} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{m^2} + 1} \right) \Big] d\varphi. \quad (65)$$

Es ist sichtbar, daß das Integral  $I$  in seiner in Formel (65) ausgedrückten Form nicht uneigentlich ist. Wenn diese Form mit  $I_{(65)}$ , und die ursprüngliche Form mit  $I_{(62)}$  bezeichnet wird, dann ergibt den Wert von  $\alpha_{L_{11}}$  der folgende Zusammenhang:

$$\alpha_{L_{11}} = \alpha_{L_{11}} - I_{(62)} + I_{(65)} \quad (66)$$

Wenn in die Formel (66) die Ausdrücke (61), (62) und (65) eingesetzt werden, erhalten wir die Formel (68), in welcher bei numerischer Integrierung im Falle von  $n\varphi - m < 0$  es zweckmäßig ist, den mit gestrichelter Linie unterstrichenen Posten mit der folgenden Formel zu berechnen:

$$(n\varphi - m) \ln \left\{ \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\left[ -(n\varphi - m) + \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2} \right] (-m + \sqrt{\varphi^2 + m^2})} \right\} \quad (67)$$

$$\alpha_{L_{11}} = \frac{1}{2\pi^2 m \cdot g \cdot N(1+n^2)} \int_{\varphi=0}^{2N\pi} \left\{ (2N\pi - \varphi)(\cos \varphi + n^2) \cdot \right.$$

$$\left. \frac{2mn\varphi - m^2}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2 \varphi^2} + \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2}} - \frac{2mn\varphi + m^2}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2 \varphi^2} + \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2}} \right\} +$$

$$+ n\varphi \ln \left[ \frac{n\varphi + m + \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi + m)^2}}{\left( n\varphi + \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + n^2 \varphi^2} \right)^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + (n\varphi - m) \ln \left[ \frac{n\varphi - m + \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n\varphi - m)^2}}{-m + \sqrt{\varphi^2 + m^2}} \right] + \\
 & \text{-----} \\
 & + \{ (n\varphi - m) [(2N\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi + n^2] - \\
 & - n(2N\pi - \varphi)(\cos \varphi - n^2) \} \left[ \varphi(1n\varphi - 1) - \right. \\
 & \left. - \varphi \ln \left( \frac{m}{\varphi} + \sqrt{\frac{m^2}{\varphi^2} + 1} \right) - m \ln \left( \frac{\varphi}{m} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{m^2} + 1} \right) \right] d\varphi \tag{68}
 \end{aligned}$$

**Berechnung von  $\alpha_{L33-44}$ ,  $\alpha_{L13}$ ,  $\alpha_{L14}$  und  $\alpha_{L24}$**

Wir stellen die zur Berechnung dieser Teilinduktivitätsfaktoren dienenden Zusammenhänge in ihrer vierfachen Integralform vor. Wegen Raum-mangel können nämlich Endzusammenhänge bzw. ihre Deduktion nicht mitgeteilt werden.

$$\alpha_{L33-44} = \frac{l_1}{\pi^2 s^2 d_1^2 N^2} \int_{z_1=0}^{2f+l_3} \int_{z=-z_1}^{l_3-z_1+2f} \int_{y_1=0}^s \int_{y=-y_1}^{s-y_1} \frac{dz_1 dz dy_1 dy}{\sqrt{y^2 + z^2}} \tag{69}$$

$$\alpha_{L13} = \frac{b \cdot l_1}{\pi^2 h^2 d_1^2 N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{y_2=-s/2}^{s/2} \int_{z_1=0}^h \int_{z=2N\pi b-z_1}^{h-z_1} \cdot \tag{70}$$

$$\frac{d\varphi_1 dy_2 dz_1 dz}{\sqrt{l_4^2 + a^2 - 2al_4 \cos \varphi_1 - 2ay_2 \sin \varphi_1 + y_2^2 + (b\varphi_1 - z)^2}}$$

$$\alpha_{L14} = \frac{l_1}{2\pi^2 h^2 d_1 N^2} \int_{\varphi_1=0}^{2N\pi} \int_{y_2=-s/2}^{s/2} \int_{z_1=h}^0 \int_{x_2=l_4}^a \tag{71}$$

$$\frac{\sin \varphi_1 d\varphi_1 dy_2 dz_1 dx_2}{\sqrt{(y_2 - a \sin \varphi_1)^2 + (z_1 + b\varphi_1 - h)^2 + (x_2 - a \cos \varphi_1)^2}} \quad (71)$$

$$\alpha_{L24} = \frac{l_1}{\pi^2 s^2 d_1^2 N^2} \int_{x_1=0}^f \int_{x=f-x_1}^{-x_1} \int_{y_1=0}^s \int_{y=-y_1}^{s-y_1} \frac{dx_1 dx dy_1 dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + l_3^2}}. \quad (72)$$

Für  $\alpha_{L33-44}$  und  $\alpha_{L24}$  haben wir Formeln mit geschlossenem Format eingeführt. Für  $\alpha_{L13}$  und  $\alpha_{L14}$  sind ähnlich wie bei  $\alpha_{L11}$  einfachintegalförmige Endzusammenhänge einföhrbar, welche numerisch mit Anwendung der Simpson-Regel integriert werden können.

### Rechnungsergebnisse

Wir haben die aus den geschlossenen integralförmigen Formeln berechnete Teilinduktivitätsfaktoren nach Formel (19) summiert, und die Werte von  $\alpha_{L1}$  in Abhängigkeit von der Windungszahl bei verschiedenen  $d_1/l_1, g$  und  $q$  Parametern (Abb. 10) dargestellt. Da  $\alpha_{L1}$  in der Fachliteratur bei Berechnungen den Nagaoka-Faktor ersetzt, ist es zweckmäßig die zwei Werte durch Verwendung der den prozentualen Unterschied ergebenden Formel

$$h'_{L1} = \frac{\alpha_{L1} - \alpha_{LN}}{\alpha_{LN}} \cdot 100[\%] \quad (73)$$

zu vergleichen.

Der Nagaoka-Faktor wurde auf Grund der Annahme eines Induktors ohne Gewindesteigung und Lückenhaftigkeit berechnet. Das heißt, daß die Induktivität bzw. der Induktivitätsfaktor der Zuleitung von dem gewindeten Teil der Spule getrennt gehandhabt werden kann, das heißt, daß in diesem Falle die Induktivität der Spule mit Zuleitung mit den Faktoren

$$\alpha_{L1h} = \alpha_{LN} + \alpha_{L33-44} + 2\alpha_{L24}$$

berechnet werden sollte. Dagegen kommen in der Formel (19) statt  $\alpha_{LN}$   $\alpha_{L11}$  und noch zwei weitere Posten ( $2\alpha_{L13}$  und  $4\alpha_{L14}$ ) vor, deswegen kann auch ein anderer prozentualer Unterschied mit Anwendung der folgenden

$$h''_{L1} = \frac{\alpha_{L1}^* - \alpha_{LN}}{\alpha_{LN}} \cdot 100[\%] \quad (74)$$

Formel berechnet werden, wo

$$\alpha_{L1}^* = \alpha_{L11} + \alpha_{L13} + 4\alpha_{L14} \quad (75)$$

In Abb. 11. ist die Änderung von  $h'_{L1}$  und  $h''_{L1}$  in Abhängigkeit von  $N$  im Falle verschiedener Parameter  $d_1/l_1$ ,  $g$  und  $q$  zu sehen. Laut den Diagrammen in Abb. 10 und 11 (in welchen die zu verschiedenen Punkten gehörenden Werte anschaulichkeitshalber miteinander verbunden wurden) ergibt sich, daß  $\alpha_{L1}$  mit zunehmenden Werten von  $N$ ,  $g$ ,  $d_1/l_1$  weiterhin mit abnehmenden Werten von  $q$  abnimmt. Est ist ersichtlich, daß  $h'_{L1}$  positiv und  $h''_{L1}$  negativ sind, doch können diese bei in Abb. 11. nicht vorkommenden Parametern auch von entgegengesetzten Vorzeichen sein. Es kann beobachtet werden, daß die prozentualen Unterschiede bei geringen Werten von  $d_1/l_1$  und  $N$  beträchtliche Werte annehmen können.

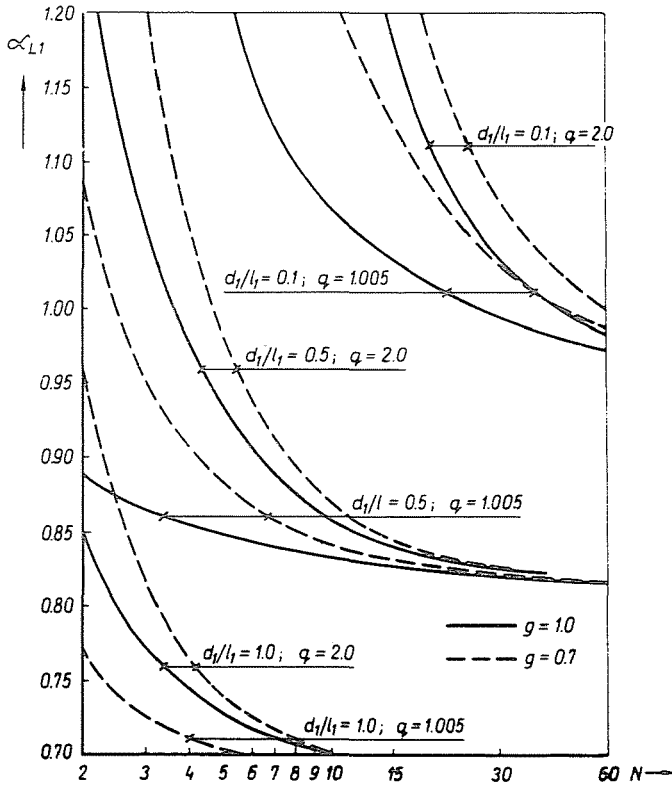


Abb. 10



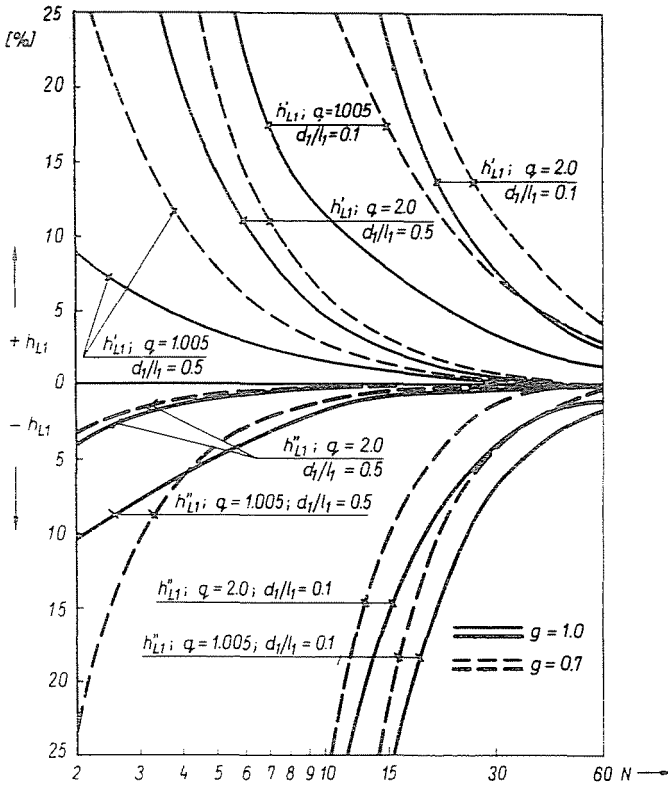


Abb. 11

Messungsergebnisse und Bewertung

An Spulenmodellen der Geometrie nach Abb. 1. wurden bei Zimmertemperatur Messungen unternommen. Das Material der Spulen war Cu, mit spezifischen Widerstand bei 293,2 K,  $\rho_1 = 1,749997 \cdot 10^{-8}$  [Ohmm]. Die Daten der Spulen sind der Tab. 1 zu entnehmen

Die zwei benutzten Spulenmodelle unterscheiden sich wesentlich nur im Werte von  $l_{4b}$  voneinander; bei der Spule „A“ befinden sich die Klemmen A und B fern von dem gewindeten Teil der Spule, bei der Spule „B“ nahe. Die Messungen wurden bei Frequenz  $f = 982$  [Hz] mit drei Spannungsmesssystemen und bei Frequenz  $f = 1592$  [Hz] mit der Brückenmethode vollzogen. Die gemessenen und mit der neuen Methode berechneten Reaktanzen ( $X$ ) wurden in Tab. 2. mit Hilfe des Zusammenhanges

$$\Delta = \frac{X_{ger.} - X_{aemes.}}{X_{aemes.}} \cdot 100 [\%] \tag{76}$$

verglichen. Enthalten sind dort auch die Werte des Messfehlers ( $|H|$ ), weiterhin die Werte von  $h'_{L1}$  und  $h''_{L1}$ .

Tabelle 1

Technische Daten	Spulentypus	
	„A“	„B“
$N$	7	7
$h$	$2,573 \cdot 10^{-2}$ [m]	$2,574 \cdot 10^{-2}$ [m]
$v$	$2,5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$2,5 \cdot 10^{-3}$ [m]
$d_{1b}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$ [m]	$7,5 \cdot 10^{-2}$ [m]
$l_1$	$3,26 \cdot 10^{-1}$ [m]	$3,30 \cdot 10^{-1}$ [m]
$l_{4b}$	$3,40 \cdot 10^{-1}$ [m]	$4,50 \cdot 10^{-2}$ [m]

Tabelle 2

$f$ [Hz]	Spulen- typ	$X[x \cdot 10^{-3} \text{ Ohm}]$		$\Delta[\%]$	$ H [\%]$	$h'_{L1}[\%]$	$h''_{L1}[\%]$
		berechnet	gemessen				
982	„A“	9,885203	9,977784	-0,93	< 1,7	103,03	20,26
	„B“	6,080628	6,128392	0,78	< 1,7	26,27	-6,42
1592	„A“	15,933927	15,71	1,43	1,32	102,47	20,16
	„B“	9,836979	9,74	1,00	1,51	26,32	-6,46

Es kann festgestellt werden, daß bei beiden leeren Spulentypen die gemessenen und berechneten Werte der induktiven Reaktanzen sehr gut übereinstimmen, das in Anbetracht der die extreme Eigenart der Modelle charakterisierenden Werte von  $h'_{L1}$  und  $h''_{L1}$  beachtenswert ist. Diese Tatsache beweist nicht nur die Genauigkeit von  $\alpha_{L1}$ , sondern auch die Berechtigtheit der Vernachlässigungen und Richtigkeit der Berechnungen der äquivalenten Maße.

#### Folgerungen:

1. Bei der Bestimmung der Induktivität der einlagigen leeren Spulen kann in gewissen praktischen Fällen die spiralartige Form, die Lückenhaftigkeit und die Zuleitung der Spule nicht außer Acht gelassen werden.

2. Durch die vorgeführte Methode läßt sich mit Hilfe des Faktors  $\alpha_{L1}$  die Induktivität der einlagigen Spulen mit großer Genauigkeit bestimmen.

3. Die Abweichung des neuartigen Induktivitätsfaktors  $\alpha_{L1}$  von dem Nagaoka-Faktor ist in bestimmten praktischen Fällen groß und von

verschiedenem Vorzeichen. Deswegen ist es zweckmäßig die Induktivität einer jeden einlagigen Spule statt  $\alpha_{LN}$  mit  $\alpha_{LI}$  zu berechnen.

4. Die neue Methode ist bei der Bemessung von zur induktiven Erwärmung gebrauchten Induktoren-Einsatz-Systemen und Luftkerntransformatoren, weiterhin von verschiedenen Spulen zB. Drosselspulen etc. gut brauchbar.

### Zusammenfassung

Die Induktivität der einlagigen leeren Spulen wurden mit Hilfe des Nagaoka-Faktors berechnet. Diese Methode ergab eine Unsicherheit, und in gewissen Fällen Vernachlässigungen, die große Fehlermöglichkeiten in sich trugen.

Das hier veröffentlichte Berechnungsverfahren berücksichtigt die spirale Form, die Lückenhaftigkeit und die Wirkung der Zuleitung der Spule. Ähnlich den bisherigen Verfahren bestimmt man die äquivalenten Maße der Spule durch Annahme eines Eindimensionsmodells, und setzt im Berechnungsmodell gleichmäßige Stromdichte voraus. Man berechnet statt des Nagaoka-Faktors einen neuen Induktivitätsfaktor.

Die auf diese Weise berechneten Werte stimmen sehr gut mit den Messergebnissen überein.

Dieses Verfahren ist bei der Bemessung von bei induktiven Erwärmungsverfahren gebrauchten Induktoren-Einsatz-Systemen, bei Transformatoren mit Luftkern und mit Drosselspulen sehr gut benützlich.

### Literatur

1. STANSEL, N. R.: Induction heating = Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York 1949.
2. RODIGIN, N. M.: Indukcionnij nagrev sztalnüh izgyelij tokami normalnoj csasztotü = Metallurgizdat 1950 Szverdlovszk—Moszkva.
3. SCHÖNBACHER, K.: Zur Berechnung von Induktionsöfen = Elektrotechnische Zeitschrift Ausg. A, Band 73, Heft 23. 1952 Dec. 1.
4. SZLUHOCKIJ, A. E.—RÜSZKIN, C. E.: Induktorü dlja indukcionnava nagreva masinosztroitel'nüh detalej = Masgiz 1954.
5. BRUNST, W.: Die Induktive Wärmebehandlung = Springer Verlag 1957.
6. SIEGERT, H.: Induktive Erwärmung = Technische Rundschau Nr. 13. 1961.
7. BEJI SZABÓ, D.: Induktive Erwärmung = Műszaki Könyvkiadó 1965.
8. SIMONYI, K.—FODOR, GY.—VAGÓ, I.: Beispiele zur theoretischen Elektrotechnik = Tankönyvkiadó Budapest 1967.
9. TEVAN, GY.: Eine Berechnungsmethode der elektrischen Parameter eines cylindrischen Induktoren-Einsatz-Systems = Elektrotechnika 62. évf. 1969. 12. szám.
10. KALANTAROV, P. L.—CEJTLIN, L. A.: Raszczet induktivnosztej = ENERGIJA 1970.
11. RYFF, P. F.: Current distribution in helical solenoids = IEEE Transactions on Industry Applications No. 4. Jülius/Augustus 1972.
12. TEVAN, GY.: Elektrische Erwärmung = Tankönyvkiadó, Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc 1973.
13. SZLUHOCKIJ, A. E.—RÜSZKIN, C. E.: Induktorü dlja indukcionnava nagreva = Energija, Leningradzkoe otgelénijje 1974.
14. LUPI, S.—MORINI, A.—NEMKOV, V.: A method of calculating the induction heating electrical parameters of sectionalized inductors = Elektrowärme International 33 (1975) B6. December.

15. NAGY, S.—TEVAN, GY.: Die Optimalisierung der Maße der Induktionstiegel-Öfen = Elektrotechnika 69. évf. 1976. 3. sz.
16. COMSA, D.—PAUTZ, J.: Über den Zusammenhang von Leistungsgrößen und geometrischen Abmessungen von Induktionstiegelöfen = Elektrowärme International 35 (1977) B6. December.
17. KEGEL, K.: Elektrowärme Theorie und Praxis = Műszaki Könyvkiadó 1978.

László KOLLER, H-1521. Budapest