

DIE STATIONÄRE TEMPERATURVERTEILUNG ELEKTRISCHER MASCHINEN ALS FUNKTION DER PARAMETER DES ÄQUIVALENTEN WÄRMEQUELLENNETZES

Von

E. TORBIK

Lehrstuhl für Elektrische Maschinen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 16. September, 1976)

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. RETTER

Die Berechnung der stationären Erwärmung elektrischer Maschinen ist eine sehr umständliche Aufgabe. Das Hauptproblem ist, zu bestimmen, wie die Erwärmung von Wicklungen der elektrischen Maschine durch die Erwärmung der einzelnen Teile beeinflusst wird.

Es ist bekannt, daß für diese Zwecke die Berechnung mit Hilfe eines Wärmequellennetzes gut geeignet ist. Das ist ein praktisches Mittel zur hinreichend genauen und möglichst alle in Betracht kommenden Einflüsse berücksichtigenden Bestimmung der stationären Erwärmung von elektrischen Maschinen.

Die Gesetze der Analogie sind bekannt. Die Zweigströme entsprechen den Wärmeströmen ($q_{i,k}$) zwischen den einzelnen Maschinenteilen und die Knotenpunktspannungen den mittleren Temperaturen der Maschinenteile. Diese sind eigentlich Übertemperaturen im Verhältnis zu einer als Null gewählten Temperatur (meistens die Umgebungstemperatur), und im folgenden werden sie nur einfach Temperaturen genannt. Einige Knotenpunkte sind Wärmequellen. Zu allen diesen Knotenpunkten müßte je ein idealer Stromgenerator eingezeichnet werden, wie Abb. 1 zeigt, aber dadurch würden die Bilder sehr unübersichtlich werden, darum sind die Generatoren weggelassen.

Die Bedeutung der einzelnen, hier angewendeten Buchstaben ist weiter unten angegeben.

Es ist bekannt, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems für die Bestimmung der Knotenpunkttemperaturen, die Wärmeleitungs matrix genannt wird, nur dann symmetrisch ist, wenn keine, durch gemeinsamen Kühlstrom gekühlten Knotenpunkte vorhanden sind.

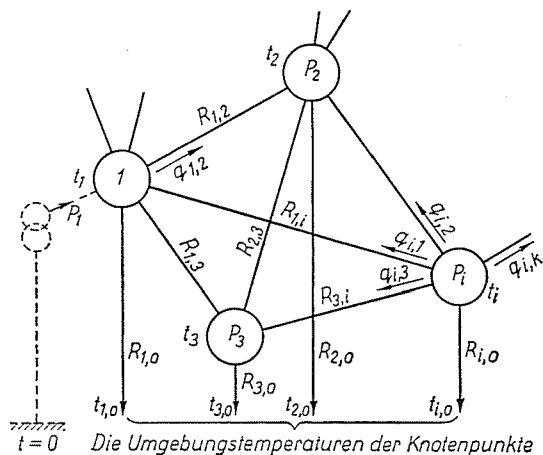


Abb. 1

1. Die Temperatur von Knotenpunkten als Funktion der einzelnen Wärmewiderstände ohne gemeinsame Kühlströme

Wie bekannt, gehört in diesem Fall zum Wärmequellen-Netz mit »n« Knotenpunkten das folgende, in Matrizenform geschriebene, lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} A_1 & -Y_{1,2} & -Y_{1,3} & \dots & -Y_{1,n} \\ -Y_{1,2} & A_2 & -Y_{2,3} & \dots & -Y_{2,n} \\ -Y_{1,3} & -Y_{2,3} & A_3 & \dots & -Y_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Y_{1,n} & -Y_{2,n} & \cdot & \cdot & A_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ P'_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{wo } Y_{i,k} = \frac{1}{R_{i,k}} = \frac{1}{R_{k,i}} = Y_{k,i}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k)$$

der reziproke Wärmewiderstand zwischen dem i -ten und dem k -ten Knotenpunkt ist. Dieser kann analog zu dem entsprechenden elektrotechnischen Begriff Zweigwärmleitung genannt werden, obwohl es sich physikalisch nicht immer um effektive Wärmeleitung handelt und die Größe im allgemeinen die Dimension $W/^\circ C$ hat. A_i hat folgende Bedeutung:

$$A_i = \frac{1}{R_{i,1}} + \frac{1}{R_{i,2}} + \dots + \frac{1}{R_{i,n}} + \frac{1}{R_{i,0}} - \alpha_i P_{i,0} \quad (2)$$

wo $\alpha_i P_{i,0}$ nur dann auftritt, wenn die i -te Quelle temperaturabhängig ist. Dabei sind: α_i (1/°C) der Temperaturkoeffizient, $P_{i,0}$ die auf eine Grundtemperatur bezogene Leistung (Wärmestrom oder Verlust) der i -ten Quelle, $R_{i,0}$ der Wärmewiderstand, der in die Umgebung mit der Temperatur $t_{i,0}$ mündet, t_i Temperatur des i -ten Knotenpunktes und

$$P_i' = P_{i,0} + \frac{t_{i,0}}{R_{i,0}} \quad (3)$$

das Element des Spaltenvektors auf der rechten Seite (Abb. 1).

Man sieht, daß die Koeffizientenmatrix symmetrisch ist. Ein solches lineares Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten kann, wie bekannt, mit Hilfe eines Digitalrechners, zum Beispiel auf Grund einer Gauß-Elimination aufgelöst werden.

Es kommt in der Praxis oft vor, daß sich nur ein Wärmewiderstand (oder eine Wärmeleitung) ändert, während die anderen konstant bleiben oder wenigstens annähernd als konstant anzusehen sind. Dieser Fall liegt zum Beispiel dann vor, wenn sich der Luftspalt-Wärmewiderstand oder der Anpassungswärmewiderstand zwischen Statoreisen und Maschinenhaus ändern. Manchmal muß man darum eine Änderung (einen Fehler) bei einigen Wärmewiderständen annehmen, weil sie aus Messungen oder aus Modellversuchen ungenau bestimmt sind.

Darum ist es wichtig festzustellen, wie sich die einzelnen Knotenpunkttemperaturen mit der Änderung von einzelnen Wärmewiderständen ändern.

Da es sich um ein lineares Netz mit ohmschen Widerständen handelt, kann man die Sätze solcher Netze anwenden. Nach dem Nortonschen Satz ergibt sich, daß sich mit der Änderung einer Zweig-Wärmeleitung die einzelnen Knotenpunkttemperaturen nach dem Gesetz der gebrochener linearer Funktion ändern.

Dieses Ergebnis kann man aber auch unmittelbar, auf mathematischen Weg gewinnen. Nach der Cramerschen Regel ergeben sich die einzelnen Knotenpunkttemperaturen aus der folgenden Formel:

$$t_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

D ist die Determinante des Gleichungssystems (der Koeffizientenmatrix), und D_i ist eine Determinante, welche sich in der i -ten Spalte von D unterscheidet, wo die Elemente des auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehenden Spaltenvektors sind.

Man kann sich auf Grund der Laplaceschen Determinantenentwicklungsregel davon überzeugen, daß beide Determinanten von einer bestimmten

Zweig-Wärmeleitung $Y_{l,k}$ linear abhängig sind. Das soll hier nicht ausführlich dargelegt werden. So ist:

$$t_i = \frac{E_{l,k,i} Y_{l,k} + F_{l,k,i}}{G_{l,k,i} Y_{l,k} + H_{l,k,i}} \quad (5)$$

$E_{l,k,i}, \dots$ sind konstant, wenn außer $Y_{l,k}$ alle Wärmeleitungen und alle Leistungen der Wärmequellen konstant sind. Dividiert man den Zähler und den Nenner mit einer der vier Konstanten, so bleiben nur drei Konstanten, die gegebenenfalls zu bestimmen sind.

Dieselbe Methode kann für die Bestimmung der Parameterabhängigkeit der Knotenpunkttemperaturen angewandt werden, wenn von einem gemeinsamen Kühlstrom gekühlte Knotenpunkte vorhanden sind. In diesem Fall kann kein ausschließlich aus passiven Elementen bestehendes elektrisches Analognetz verwendet werden.

Weil $Y_{l,k} = 1/R_{l,k}$ ist, kann (5) auch wie folgt geschrieben werden:

$$t_i = \frac{E_{l,k,i} + F_{l,k,i} R_{l,k}}{G_{l,k,i} + H_{l,k,i} R_{l,k}} \quad (6)$$

was die i -te Knotenpunkttemperatur als Funktion von $R_{l,k}$ ergibt.

t_i hängt von $Y_{l,0}$ bzw. von $R_{l,0}$ in ähnlicher Weise ab, das heißt, die Beziehung ist in beiden Fällen eine gebrochene lineare Funktion, und die entsprechenden Diagramme sind Hyperbeln (Abb. 2 und 3).

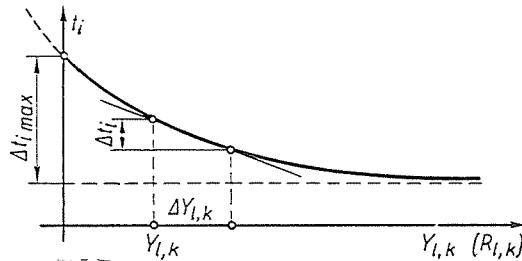


Abb. 2

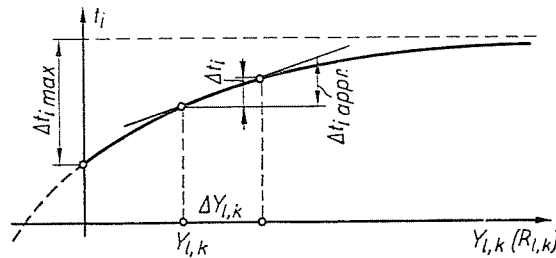


Abb. 3

Es ist leicht, die Änderung einer Knotenpunkttemperatur t_i , in der Umgebung eines $Y_{l,k}$ -Wertes auszurechnen. Es genügt, den $Y_{l,k}$ -Wert um einen geringen prozentualen Wert (z. B. 1%) abzuändern, auf dem Digitalrechner die neue Lösung des Gleichungssystems auszurechnen, und aus den zwei t_i -Werten die Differenz Δt_i zu bestimmen.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta Y_{l,k}}$$

ist der angenäherte Wert der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial t_i}{\partial Y_{l,k}}$$

der Funktion

$$t_i = t_i(Y_{1,2}, \dots, Y_{l,k}, \dots, Y_{n-1,n}, P_{1,0}, \dots, P_{l,0}, \dots, P_{n,0})$$

Die Hyperbelkurven in den Abb. 2 und 3 sind leicht aufzuzeichnen, wenn die Werte von t_i beim Wert $Y_{l,k} = 0$, bei $Y_{l,k} \rightarrow \infty$ und bei einem Zwischenwert von $Y_{l,k}$ bekannt sind.

2. Die Knotenpunkttemperaturen als Funktionen der einzelnen Verluste

2a. Wie aus dem Gleichungssystem (1) leicht abzuleiten ist, sind die einzelnen Knotenpunkttemperaturen lineare Funktionen der einzelnen Verluste, wenn die Wärmequellen temperaturabhängig sind (Abb. 4).

$$t_i = M_{l,i}P_l + N_{l,i} \quad (i, l = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

2b. Wenn auch temperaturabhängige Wärmequellen vorhanden sind, so ist die lineare Abhängigkeit nicht mehr gültig. Durch die Untersuchung von Determinanten in dem Zusammenhang (4) kann man sich überzeugen,

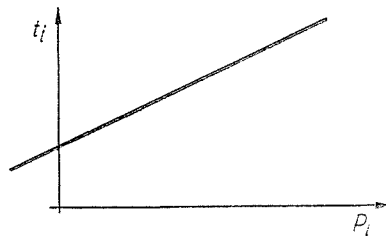


Abb. 4

daß der Zusammenhang zwischen Knotenpunkttemperaturen und Verlusten $P_{l,0}$ auch jetzt hyperbolisch ist

$$t_i = \frac{N_{l,0,i} P_{l,0} + S_{l,0,i}}{U_{l,0,i} P_{l,0} + Z_{l,0,i}} \quad (8)$$

Der Hyperbelzweig verläuft aber jetzt nicht mehr nach den Diagrammen der Abb. 2 und 3, sondern nach Abb. 6.

Um die Verhältnisse besser zu verstehen, nehmen wir eine temperaturabhängige Wärmequelle, mit der Temperatur t_1 , welche durch ein Kühlmittel mit der Temperatur $t_{1,0}$ gekühlt ist (Abb. 5).

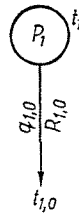


Abb. 5

Die Gleichung des Wärmegleichgewichtes lautet:

$$P_{1,0}(1 + \alpha t_1) = \frac{t_1 - t_{1,0}}{R_{1,0}}$$

Geordnet und nach t_1 gelöst:

$$t_1 = \frac{P_{1,0} + \frac{t_{1,0}}{R_{1,0}}}{\frac{1}{R_{1,0}} - \alpha P_{1,0}}$$

Also wächst die Temperatur t_1 nicht nur mit $P_{1,0}$, sondern auch darum, weil P_1 temperaturabhängig ist ($-\alpha P_{1,0}$). Der Nenner hat einen Nullpunkt als Funktion von $P_{1,0}$, namentlich wenn $P_{1,0} = 1/\alpha R_{1,0}$ ist.

Wenn sich $P_{1,0}$ diesem Wert nähert, wächst t_1 asymptotisch über alle Grenzen nach dem hyperbolischen Gesetz. Wird nicht nur der stationäre Zustand, sondern die transiente Erwärmung dieses einfachen Systems untersucht, kann bewiesen werden, daß ein stabiler Zustand nur unter $P_{1,0} = 1/\alpha R_{1,0}$ existiert.

Wenn $P_{1,0}$ diesen kritischen Wert annimmt, oder über diesem Wert liegt, dann ist das System instabil, und t_1 wächst über alle Grenzen, bzw. nimmt physikalisch sinnlose negative Werte an.

Ähnliche Verhältnisse liegen bei dem Wärmequellenetz mit »n« Knotenpunkten vor, wenn temperaturabhängige Quellen vorhanden sind (Abb. 6).

Die angenäherten Werte $\Delta t_i / \Delta P_{1,0}$ von partiellen Ableitungen können auch hier leicht berechnet werden.

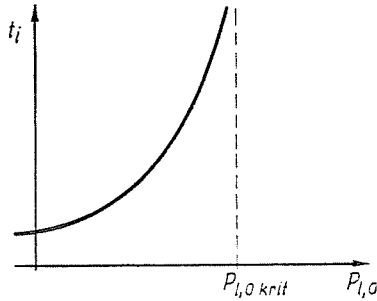


Abb. 6

3. Die Änderung von Knotenpunkttemperaturen, wenn sich mehrere Wärmeleitungen und Verluste gleichzeitig ändern

In diesem Fall lautet die totale Änderung von t_i

$$\Delta t_i \approx \sum_p \frac{\partial t_i}{\partial Y_{l,k}} \Delta Y_{l,k} + \sum_r \frac{\partial t_i}{\partial P_{l,0}} \Delta P_{l,0} \quad (9)$$

wo die Summen im allgemeinen auf Wärmeleitungen der Zahl p und auf Verluste der Zahl r zu erstrecken sind.

Wie wir gesehen haben, können die angenäherten Werte dieser partiellen Ableitungen auf einem Digitalrechner leicht berechnet werden. Sie geben wichtige Informationen über die Wirkung einzelner Parameter auf die Knotenpunkttemperaturen.

4. Die Knotenpunkttemperaturen als Funktionen der einzelnen Wärmeleitungen im Fall gemeinsamer Kühlströme

Wenn mehrere Knotenpunkte durch einen gemeinsamen Kühlstrom gekühlt sind, bringt der Kühlstrom Wärmemengen von den einzelnen Wärmequellen mit sich und so fließt die Wärme im allgemeinen von der Stelle mit niedrigerer Temperatur zu der Stelle mit höherer Temperatur. So kann dieser Teil der Maschine mit Hilfe eines analog-elektrischen passiven Netzes nicht nachgebildet werden.

Die Wärmeleitungsmatrix ist asymmetrisch [7] und [8]. Die Asymmetrie ist bei den Koeffizienten von Temperaturen zu finden, deren Knotenpunkte durch einen gemeinsamen Kühlstrom gekühlt sind.

Diese Koeffizienten werden mit zunehmender Zahl solcher Knotenpunkte immer verwickelter.

Es ist besser, im Kühlstrom sogenannte »fiktive Knotenpunkte« aufzunehmen, weil dann die Wärmeleitungsmatrix einfacher wird. Als Beispiel betrachten wir den Fall durch gemeinsamen Kühlstrom gekühlter vier Knotenpunkte in Abb. 7. Die Temperatur der eintretenden Kühlluft ist als Bezugstemperatur $t_0 = 0$ gewählt.

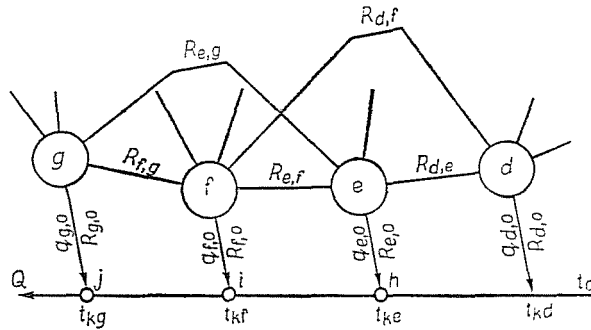


Abb. 7

Der erste gekühlte Knotenpunkt (oder die Wärmequelle) ist mit d bezeichnet. Für diesen lautet die Knotenpunktgleichung für die Leistungen (Wärmeströme, Verluste):

$$\sum_{l=1}^n \frac{t_d - t_l}{R_{d,l}} + \frac{t_d - t_0}{R_{d,0} + R_Q} = P_{d,0}(1 + \alpha_d t_d) \tag{10}$$

wenn insgesamt n Knotenpunkte vorhanden sind, und wo der Zweigstrom im allgemeinen

$$\frac{t_d - t_l}{R_{d,l}}$$

ist. $q_{d,0}$ ist der Wärmestrom zwischen dem Knotenpunkt d und dem Kühlstrom.

$q_{d,0}$ kann folgendermaßen abgeleitet werden:

$$q_{d,0} = c_v Q \Delta t_{Q,d},$$

wobei c_v die spezifische Wärme der Luft (in Ws/m^3) und Q die Kühlluftmenge (m^3/s) bedeuten. Wird eine lineare Änderung der Temperatur längs der gekühl-

ten Fläche des Knotenpunktes vorausgesetzt, ist die mittlere Temperaturerhöhung des Kühlmittels

$$\frac{\Delta t_{Q,d}}{2} = t_{kd} - t_0 = q_{d,0} \frac{1}{2c_v Q} = q_{d,0} R_Q$$

$t_{k,d}$ ist die mittlere Temperatur der Kühlluft längs der Fläche des Knotenpunktes d und $R_Q = 1/2c_v Q$ ist eine Größe mit der Dimension eines Wärmewiderstandes ($^{\circ}C/W$).

R_Q kann Konvektionswärmewiderstand genannt werden.

Der totale Temperaturabfall zwischen dem Knotenpunkt d und der eintretenden Kühlluft ist

$$(t_d - t_{kd}) + t_{kd} - t_0 = q_{d,0}(R_{d,0} + R_Q)$$

und

$$t_d - t_{kd} = q_{d,0} R_{d,0}$$

Trägt man die Bezeichnungen $Y_{l,d} = 1/R_{d,l}$ und $Y_{d,0} = 1/(R_{d,0} + R_Q)$ ein, nimmt Gleichung (10), weil $t_0 = 0$ ist, folgende Form an:

$$t_d \left(\sum Y_{d,l} + Y_{d,0} - \alpha_d P_{d,0} \right) - \sum_{l=1}^n t_l Y_{d,l} = P_{d,0} \quad (11)$$

Im Vergleich zu dem Fall ohne Kühlstrom ändert sich also nur das Element in der Hauptdiagonale der Wärmeleitungsmatrix.

Der nächste gekühlte Knotenpunkt hat die Bezeichnung e . Für diesen lautet die Knotenpunktgleichung:

$$\sum_{l=1}^n \frac{t_e - t_l}{R_{e,l}} + \frac{t_e - t_{ke}}{R_{e,0}} = P_{e,0}(1 + \alpha_e t_e)$$

Verwendet man die beim Knotenpunkt d benutzten Bezeichnungen sinnmäßig auch hier, nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$t_e \left(\sum_{l=1}^n Y_{e,l} + Y_{e,0} - \alpha_e P_{e,0} \right) - \sum_{l=1}^n Y_{e,l} t_l - Y_{e,0} t_{ke} = P_{e,0} \quad (12)$$

Die Abweichung gemäß der Gleichung für den Knotenpunkt d (11) ist t das letzte Glied der linken Seite. Nach diesem Glied erscheint der Punkt mit der Temperatur t_{ke} des Kühlstromes formmäßig so, als ob er zu einem »fiktiven« Knotenpunkt gehören würde. Die zu diesem Knotenpunkt gehörende Knotenpunktgleichung kann in folgender Weise abgeleitet werden:

Aus dem Vorhergehenden mit

$$t_{kd} = t_0 + R_Q q_{d,0} = t_0 + R_Q \frac{t_d - t_{kd}}{R_{d,0}}$$

und mit $t_0 = 0$ folgen

$$t_{kd} = \frac{R_Q t_d}{R_{d,0} + R_Q} = R_Q t_d Y_{d,0} \quad (13)$$

und

$$t_{ke} = t_0 + 2(t_{kd} - t_0) + R_Q q_{e,0},$$

wo $q_{e,0}$ der Wärmestrom zwischen dem Knotenpunkt »e« und der Kühlluft ist. Mit der Beziehung (13) und $t_0 = 0$ ergibt sich

$$t_{ke} = 2R_Q t_d Y_{d,0} + R_Q \frac{t_e - t_{ke}}{R_{e,0}}$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit R_Q dividiert und die Wärmeleitung $Y_e = 1/R_{e,0}$ einführt,

$$t_{ke} \left(\frac{1}{R_Q} + Y_{e,0} \right) - t_e Y_{e,0} - 2t_d Y_{d,0} = 0 \quad (14)$$

Der neue (fiktive) Knotenpunkt sei mit h bezeichnet, so ist

$$t_h A_h - t_e Y_{e,0} - 2t_d Y_{d,0} = 0 \quad (15)$$

die Gleichung für Knotenpunkt h , wo

$$t_h = t_{ke} \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{R_Q} + Y_{e,0}.$$

In ähnlicher Weise können die Gleichungen für die fiktiven Knotenpunkte »i« und »j« abgeleitet werden:

$$t_i A_i - t_f Y_{f,0} + 2t_d Y_{d,0} - \frac{2}{R_Q} t_h = 0 \quad (16)$$

und

$$t_j A_j - 2t_d Y_{d,0} + \frac{2t_h}{R_Q} - \frac{2t_i}{R_Q} - t_g Y_{g,0} = 0 \quad (17)$$

Es ist zweckmäßig, die Gleichungen des Knotenpunktes d und der drei fiktiven Knotenpunkte in dem Gleichungssystem an die letzten Stellen zu stellen. Die Reihenfolge der Gleichungen sei g, f, e, d, h, i, j . Die Asymmetrie erstreckt sich nur auf die letzten drei Zeilen und Spalten der Wärmeleitungsmatrix. Das kann auch aus Tab. I. abgelesen werden, die ein Teil der Wärmeleitungsmatrix ist.

Tabelle I

...	$\sum_{l=1}^n Y_{g,l} + Y_{g,0} - \alpha P_{g,0}$	$-Y_{g,f}$	$-Y_{g,c}$	$-Y_{g,d}$	0	0	$-Y_{g,0}$	g
...	$-Y_{g,f}$	$\sum_{l=1}^n Y_{f,l} + Y_{f,0} - \alpha P_{f,0}$	$-Y_{f,e}$	$-Y_{f,d}$	0	$-Y_{f,0}$	0	f
...	$-Y_{g,e}$	$-Y_{f,e}$	$\sum_{l=1}^n Y_{e,l} + Y_{e,0} - \alpha P_{e,0}$	$-Y_{e,d}$	$-Y_{e,0}$	0	0	e
...	$-Y_{g,d}$	$-Y_{f,d}$	$-Y_{e,d}$	$\sum_{l=1}^n Y_{d,l} + Y_{d,0} - \alpha P_{d,0}$	0	0	0	d
...	0	0	$-Y_{e,0}$	$-2Y_{d,0}$	$\frac{1}{R_Q} + Y_{e,0}$	0	0	h
...	0	$-Y_{f,0}$	0	$2Y_{d,0}$	$-\frac{2}{R_Q}$	$\frac{1}{R_Q} + Y_{f,0}$	0	i
...	$-Y_{g,0}$	0	0	$-2Y_{d,0}$	$\frac{2}{R_Q}$	$-\frac{2}{R_Q}$	$\frac{1}{R_Q} + Y_{g,0}$	j

Zu den fiktiven Knotenpunkten gehören bestimmte Stellen des Kühlstromes, wo die Temperatur (z. B. mit einem Thermoelement) gemessen werden kann.

Aus Tab. I. sieht man, daß sich alle Wärmeleitungen $Y_{d,0}$, $Y_{e,0}$, ... welche die Knotenpunkte mit dem Kühlstrom verbinden, immer nur in zwei Zeilen oder Spalten befinden.

Und so kann man sich mit Hilfe des Laplaceschen Determinantenentwicklungssatzes überzeugen (wie früher bei Punkt 1), daß sich die Knotenpunkttemperaturen mit der Änderung einer solchen Wärmeleitung $Y_{d,0}$, $Y_{e,0}$, ... auch nach dem Gesetz der gebrochenen linearen Funktion ändern.

5. Berechnungen mit Hilfe der inversen Wärmeleitungsmatrix

Bei der Berechnung der Temperaturänderungen Δt_i , die mit der Änderung der einzelnen Wärmeleitungen Y_{lk} verbunden sind, ist die wiederholte Lösung des Wärmeleitungsgleichungssystems sehr umständlich und zeitraubend, selbst auf dem Digitalrechner. Das kann folgenderweise vermieden werden.

Mit Hilfe des Nortonschen Satzes ist die Temperaturänderung länges des Zweiges mit der Wärmeleitung $Y_{l,k}$ (Abb. 8)

$$t_l - t_k = \frac{q_z}{Y_{l,k} + Y_h} \quad (18)$$

Hier bedeuten q_z den Kurzschlußstrom bei dem Kurzschluß des Zweiges und Y_h die von dem l -ten und dem k -ten Knotenpunkt gemessene Eingangsadmittanz (bzw. Wärmeleitung) des Netzes, wenn die Stromgeneratoren unterbrochen sind. Nach Abb. 9 ist

$$\frac{q_{l,k}}{Y_{l,k}} = \frac{q_z}{Y_{l,k} + Y_h} \quad (19)$$

Wenn die Zweigwärmleitung $Y_{l,k}$ sich mit $\Delta Y_{l,k}$ ändert (Abb. 10), ändert sich der Zweigstrom mit $\Delta q_{l,k}$, und man schreibt:

$$t + \Delta t = \frac{q_z}{Y_h + Y_{l,k} + \Delta Y_{l,k}}.$$

Die Temperaturdifferenz zwischen den Endpunkten der Wärmeleitung $Y_{l,k}$, das heißt $t_l - t_k$, wird kurz mit t und deren Änderung mit Δt bezeichnet.

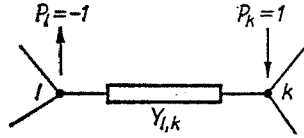


Abb. 8

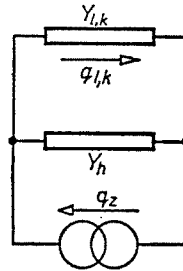


Abb. 9

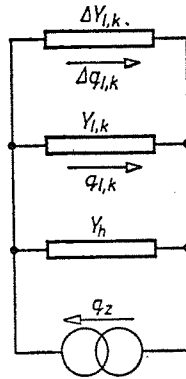


Abb. 10

Mit (18) ist

$$\Delta t = -t + \frac{q_z}{Y_h + Y_{l,k} + Y\Delta_{l,k}} = -\frac{q_z}{Y_h + Y_{l,k}} + \frac{q_z}{Y_h + Y_{l,k} + \Delta Y_{l,k}}$$

das heißt

$$\Delta t = -\frac{q_z}{Y_h + Y_{l,k}} \cdot \frac{\Delta Y_{l,k}}{Y_h + Y_{l,k} + \Delta Y_{l,k}}$$

Wenn $\Delta Y_{l,k}$ prozentual klein ist, wird es im Nenner des letzten Bruches weggelassen, und unter Anwendung von (19) ist

$$\Delta t = -q_{l,k} \frac{\Delta Y_{l,k}}{Y_{l,k}} \cdot \frac{1}{Y_{l,k} + Y_h} \tag{20}$$

Die Temperaturänderung hängt von ursprünglichem Zweigstrom, von den ursprünglichen Wärmeleitungen (Arbeitspunkt) und von der relativen

Änderung der Zweigwärmeleitung $Y_{l,k}$ ab. Es ist auch ersichtlich (Abb. 11), daß, wenn bei dem k -ten und l -ten Knotenpunkt ein Strom der Größe $q_{l,k} \Delta Y_{l,k} / Y_{l,k}$ eingespeist bzw. abgeführt wird, die Temperaturdifferenzen zwischen den Knotenpunkten des Netzes gleich denjenigen sein werden, welche ausschließlich deshalb entstehen, weil sich die Knotenpunkttemperaturen um $\Delta Y_{l,k}$ ändern.

Die effektive Berechnung dieser Temperaturdifferenzen geschieht folgenderweise:

Die Gleichung (1) in Matrizenform lautet

$$Yt = P.$$

Hier sind Y die Wärmeleitungsmatrix, t der Spaltenvektor der Temperaturen und P der Spaltenvektor der Verluste. Wenn man von links mit der inversen Wärmeleitungsmatrix (im Arbeitspunkt) multipliziert, ergibt sich:

$$t = Y^{-1}P$$

Auf Grund dieses Zusammenhanges und des Gesagten ist die Richtigkeit der folgenden Schritte einzusehen.

Zuerst bilden wir einen speziellen Spaltenvektor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(das } k\text{-te Element } + \text{ Eins} \\ \text{und das } l\text{-te Element } - \text{ Eins)} \end{matrix} \quad (21)$$

Dieser Spaltenvektor wird mit der inversen Wärmeleitungsmatrix multipliziert. Die inverse Matrix ist mit den Werten des Arbeitspunktes gebil-

det. Es ist zweckmäßig (wie später dargelegt wird), das Resultat zu speichern. Schließlich ist der erhaltene Spaltenvektor mit der skalaren Größe $q_{l,k} \Delta Y_{l,k} / Y_{l,k}$ zu multiplizieren, wodurch man den gewünschten Temperaturspaltenvektor gewinnt. Dieser Spaltenvektor besitzt als Elemente diejenigen Δt_i , welche dadurch entstehen, daß sich die $Y_{l,k}$ Wärmeleitung um $\Delta Y_{l,k}$ ändert.

Diese Δt_i mit $\Delta Y_{l,k}$ dividiert, gewinnt man den angenäherten Wert der entsprechenden partiellen Ableitungen.

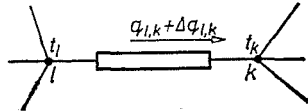


Abb. 11

Wenn sich einer der Verluste um den Wert ΔP_l ändert, kann die Temperaturänderung Δt_i der Knotenpunkte nach dem Superpositionsprinzip so berechnet werden, daß man die inverse Wärmeleitungsmatrix mit dem Spaltenvektor

$$\Delta P = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \Delta P_l \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

nach der Gleichung $\Delta t = Y^{-1} \Delta P$ multipliziert. Die gesuchten Δt_i sind die Elemente des entstehenden Spaltenvektors. Dividiert man diese Δt_i mit ΔP_l , so entstehen die angenäherten Werte der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial t_i}{\partial P_l}$$

Der Vorteil dieser Rechnungsart ist, daß die inverse Wärmeleitungsmatrix bei der Veränderung der einzelnen Wärmeleitungen oder Verluste nur einmal gerechnet wird. Im weiteren wird sie nur mit den speziellen Spaltenvektoren multipliziert, und so wird die Maschinenzeit bei den zu den Verände-

rungen mehrerer Wärmeleitungen oder Verluste gehörenden Berechnungen im Vergleich mit der Berechnung, wo das Gleichungssystem wiederholt gelöst wird, wesentlich vermindert.

Interessieren auch Änderungen der Knotenpunkttemperaturen, die mit einer größeren Änderung der Wärmeleitung $Y_{l,k}$ verbunden sind, können wir folgenderweise verfahren:

Die einzelnen Knotenpunkttemperaturen ändern sich nach (5)

$$t_i = \frac{E_{l,k,i} Y_{l,k} + F_{l,k,i}}{G_{l,k,i} Y_{l,k} + H_{l,k,i}}$$

oder wenn man im Zähler und Nenner mit $G_{l,k,i}$ dividiert,

$$t_i = \frac{A_{l,k,i} Y_{l,k} + B_{l,k,i}}{Y_{l,k} + D_{l,k,i}} \quad (22)$$

wo $A_{l,k,i}$, $B_{l,k,i}$, $D_{l,k,i}$ neu eingeführte Konstanten sind. $D_{l,k,i}$ muß gleich Y_h sein, wo Y_h die von dem l -ten und dem k -ten Knotenpunkt gemessene Eingangswärmeleitung des Netzes ist. Strebt nämlich $Y_{l,k}$ gegen die fiktive negative Wärmeleitung $-Y_h$ dann strebt die Summe der Wärmeleitungen $Y_{l,k}$ und Y_h gegen 0, und die Temperatur t_i gegen unendlich. Da die übrigen Knotenpunkte vom l -ten nicht isoliert sind, streben ihre Temperaturen auch gegen unendlich. Nach Gleichung (22) ist das aber nur möglich, wenn $Y_{l,k} \rightarrow -D_{l,k,i}$ und daher $D_{l,k,i} = Y_h$ ist.

Die Wärmeleitung ist bestimmbar. Zu diesem Zweck setzen wir in den Verlust-Spaltenvektor $P_k = 1$ und $P_l = -1$ (also fließt bei dem k -ten Knotenpunkt Einheitsstrom ein und bei dem l -ten Knotenpunkt ab.) Multiplizieren

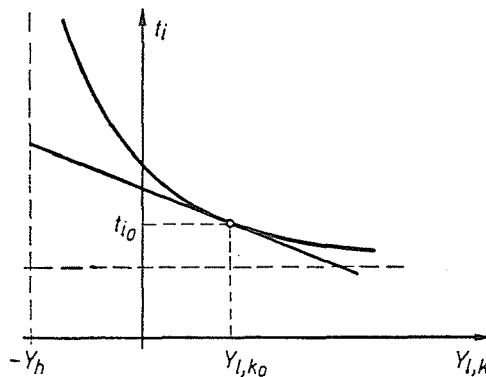


Abb. 12

wird beide Seiten von links mit der inversen Wärmeleitungsmatrix:

$$Y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$t_k - t_l = \frac{1}{Y_h + Y_{l,k}}$$

Dieses Produkt wurde schon einmal gebildet (21), jetzt kann es wieder verwendet werden. Die Temperaturdifferenz $t_k - t_l$ kann mit Hilfe des Einheitsstromes und der Wärmeleitungen $Y_{1,k}$ und Y_h ausgedrückt werden:

Aus dieser Gleichung ist Y_h bestimmbar. Die Hyperbelkurve (Abb. 12) der Funktion $t_i = f(Y_{l,k})$ läßt sich aufzeichnen. Im Besitz des Arbeitspunktes $(Y_{l,k}; t_i)$ und der dort ausgerechneten partiellen Ableitung zeichnen wir die zu diesem Punkt gehörende Tangente auf. Es ist als Hyperbeleigenschaft bekannt, daß der Berührungspunkt den Abschnitt der Tangente zwischen den zwei Asymptoten halbiert. Auf Grund dieser Eigenschaft wird die Tangente an der Stelle $Y_{l,k} = -Y_h$ mit der senkrechten Asymptote geschnitten, der Abschnitt zwischen diesem Punkt und dem Arbeitspunkt wird in entgegengesetzter Richtung aufgemessen, und durch diesen so erhaltenen Punkt wird die waagerechte Asymptote aufgezeichnet.

Der funktionelle Zusammenhang kann rechnerisch wie folgt bestimmt werden:

Auf Grund der Beziehung der Temperatur $t_{i,0}$

$$t_{i,0} = \frac{A_{l,k,i} Y_{l,k,0} + B_{l,k,i}}{Y_{l,k,0} + Y_h}$$

und der partiellen Ableitung

$$\left[\frac{\partial t_i}{\partial Y_{l,k}} \right]_0 = \frac{A_{l,k,i} Y_h - B_{l,k,i}}{(Y_{l,k,0} + Y_h)^2}$$

(Index 0 bedeutet, daß die Größen im Arbeitspunkt angenommen sind.) können die Konstanten $A_{l,k,i}$ und $B_{l,k,i}$ bestimmt werden. Damit ist der hyperbolische Zusammenhang bekannt.

Die eben geschilderte Rechnungsart mit Hilfe der inversen Wärmeleitungsmatrix kann mit geringen Ergänzungen auch in solchen Fällen angewandt werden, wenn einige (den Wicklungen entsprechende) Wärmequellen temperaturabhängig sind.

Wird die Temperaturabhängigkeit berücksichtigt, haben die Elemente der Hauptdiagonale der Wärmeleitungsmatrix in den Zeilen, welche zu den temperaturabhängigen Wärmequellen gehören, ein $-\alpha_l P_{l,0}$ förmiges Glied (2.) Dieses Glied hat Wärmeleitungsdimension, und man kann es im Netz durch eine zwischen der temperaturabhängigen Wärmequelle und dem Punkt mit der Temperatur 0 (Umgebung) eingeschaltete negative Wärmeleitung mit dem Absolutwert $\alpha_l P_{l,0}$ in Betracht ziehen.

In diesem Fall lautet das Gleichungssystem für die Bestimmung der Knotenpunkttemperaturen:

$$\mathbf{Y} t = P_0 \quad (23)$$

wo die Temperaturabhängigkeit bei der Wärmeleitungsmatrix \mathbf{Y} berücksichtigt worden ist. P_0 ist, der auf kalten Zustand bezogene Verlustspaltenvektor.

Wenn eine Zweigwärmeleitung sich verändert, verändern sich die Wärmeleitungsmatrix um $\Delta \mathbf{Y}$ und der Temperaturspaltenvektor um Δt , und es gilt

$$(\mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}) (t + \Delta t) = P_0$$

Wird das Glied $\Delta \mathbf{Y} \Delta t$, welches kleine Elementen zweiter Ordnung besitzt, vernachlässigt erhält man unter Berücksichtigung von (23)

$$\mathbf{Y} \Delta t = -\Delta \mathbf{Y} t$$

Nach Multiplikation auf beiden Seiten von links mit \mathbf{Y}^{-1} erhält man

$$\Delta t = -\mathbf{Y}^{-1} (\Delta \mathbf{Y} t)$$

Aus der Deutung der Matrix \mathbf{Y} folgt, daß bei der Veränderung einer Zweigwärmeleitung, die Matrix $\Delta \mathbf{Y}$ nur vier von Null verschiedene Elemente hat.

Wenn zum Beispiel $\Delta Y_{l,k}$ prozentual 1 (1%), und so $\Delta Y_{l,k}/Y_{l,k} = 0,01$ (ein Hundertstel) ist, dann gilt:

$$-\Delta Y t =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0,01 Y_{l,k} & \dots & -0,01 Y_{l,k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -0,01 Y_{l,k} & \dots & 0,01 Y_{l,k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_l \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= -0,01 \begin{bmatrix} \vdots \\ Y_{l,k}(t_i - t_l) \\ \vdots \\ Y_{l,k}(t_l - t_i) \\ \vdots \end{bmatrix} = -\frac{\Delta Y_{l,k}}{Y_{l,k}} q_{l,k} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dieser Spaltenvektor wird mit Y^{-1} multipliziert. Man sieht, daß der Berechnungsgang dem, im Fall temperaturunabhängiger Wärmequellen gleich ist. Nur ist zu beachten, daß die Berechnung mit der jetzt dargelegten (für den Fall temperaturabhängiger Wärmequellen abgeleiteten) Matrix Y^{-1} durchgeführt wird.

Die Ableitung ist auch für den Spezialfall temperaturunabhängiger Wärmequellen gültig. So haben wir eine andere Begründung für die im vorhergehenden besprochene Berechnungsart.

Wenn sich ein, auf kalten Zustand bezogener Verlust $P_{l,0}$ ändert, wird die Berechnung der Änderungen der Knotenpunkttemperaturen in einer etwas anderen Form verlaufen. (Index 0 verweist auf kalten Zustand.)

Mit der Änderungen $\Delta P_{l,0}$ ändern sich auch die Wärmeleitungsmatrix um ΔY und die Knotenpunkttemperaturen um Δt . So erhält man statt der Gleichung (23):

$$(Y + \Delta Y)(t + \Delta t) = P_0 + \Delta P_0$$

Bei kleinen Änderungen kann wiederum das Glied $\Delta Y \Delta t$ vernachlässigt werden, und mit Berücksichtigung der Gleichung (23) gilt:

$$Y \Delta t = \Delta P_0 - \Delta Y t$$

Nach Multiplikation auf beiden Seiten mit Y^{-1}

$$\Delta t = Y^{-1}(\Delta P_0 - \Delta Y t)$$

Die inverse Matrix Y^{-1} ist wiederum dieselbe wie im vorhergehenden, und so muß sie nur einmal berechnet werden.

Auf der rechten Seite steht nicht nur $Y^{-1} \Delta P_0$, wie im Fall temperaturunabhängiger Wärmequellen. Das Glied $\Delta Y t$ ist aber leicht auszurechnen.

Aus der Deutung der Matrix Y folgt, daß die Matrix ΔY nur ein von Null verschiedenes Element besitzt, wenn sich ein Verlust $P_{l,0}$ ändert, u. zw. $-\alpha_l P_{l,0}$ in der Hauptdiagonale der l -ten Zeile und damit ist

$$\Delta Y t = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & -\alpha_l \Delta P_{l,0} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -\alpha_l \Delta P_{l,0} t_l \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der kritische Wert von $P_{l,0}$ ist auch auf folgender Weise berechenbar:

Man kann sich überzeugen, daß der Nortonsche Satz auch dann gültig ist, wenn zwischen den Wärmeleitungen auch solche mit dem Charakter $-\alpha_l P_{l,0}$ vorhanden sind. Wird der Nortonsche Satz auf die Berechnung des Temperaturabfalls längs der negativen Wärmeleitung $-\alpha_l P_{l,0}$ angewandt, erhält man eine Ersatzschaltung nach Abb. 13. Hier bedeuten $q'_z + P_{l,0}$ den Kurzschlußstrom bei dem Kurzschluß des Zweiges mit der negativen Wärmeleitung $-\alpha_l P_{l,0}$ und $Y_{h,l,0}$ die Eingangswärmeleitung (Eingangsdmittanz).

Zur Bestimmung der Wärmeleitung $Y_{h,l,0}$ bilden wir

$$Y^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

wo Y^{-1} wieder der vorher berechnete Wert ist. Nach der Berechnung von t_l schreibt man

$$t_l = \frac{1}{Y_{h,l,0} - \alpha_l P_{l,0}}$$

woraus $Y_{h,l,0}$ berechenbar ist. Wenn jetzt der Wert von $P_{l,0}$ so lang zunimmt, bis $\alpha_l P_{l,0} = Y_{h,l,0}$ wird, strebt die Summe der zwei Admittanzen in Abb. 13. gegen unendlich, und die Temperatur t_l nimmt über alle Grenzen zu. Der kritische Wert des Verlustes $P_{l,0}$ ist also

$$P_{l,0, \text{krit}} = \frac{Y_{h,l,0}}{\alpha_l}$$

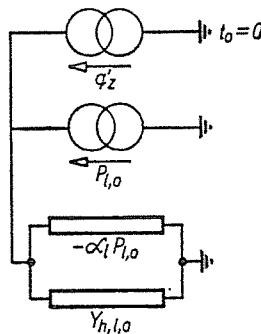


Abb. 13

Die Berechnungen mit der inversen Wärmeleitungsmatrix stimmen mit den auf anderem Weg durchgeführten Berechnungen gut überein.

Einige Anwendungen

Die im vorhergehenden beschriebenen Gesetzmäßigkeiten sind vielfältig verwendbar.

Als erste Anwendung kann die angenäherte Bestimmung solcher Fehler erwähnt werden, welche deshalb entstehen, weil die Wärmeleitungen nicht genau bestimmt werde. Können die Fehlerschranken abgeschätzt werden, so sind die Fehler der Knotenpunkttemperaturen annähernd berechenbar.

Ein anderes Anwendungsgebiet ist die indirekte Bestimmung der Wärmeleitungen, wenn nur einige Wärmeleitungen bekannt sind, und die übrigen an Hand des Gleichungssystems (1) und der auf der fertigen Maschine gemessenen Temperaturen mit Hilfe einer Iterationsrechnung bestimmt werden.

Als dritte Anwendung kann man die Untersuchung anführen, auf Grund welcher festgestellt wird, wie durch große Veränderungen der einzelnen Wärmeleitungen oder Verluste die Knotenpunkttemperaturen beeinflusst werden. Auf diese Weise können die Wirkungen der Veränderungen in der Konstruktion oder in den Abmessungen, bzw. die Belastbarkeit der Maschine bestimmt werden.

Zusammenfassung

Bei der Erwärmungsberechnung elektrischer Maschinen mit Hilfe eines Wärmequellen-netzes stellt sich die wichtige Frage, wie sich die Temperaturen der, den einzelnen Maschinenteilen entsprechenden Knotenpunkte als Funktionen der einzelnen Zweigwarmeleitungen des Netzes bzw. der in bestimmten Knotenpunkten (Wärmequellen) entstehenden Verluste ändern.

Der Artikel beschäftigt sich mit den Gesetzmäßigkeiten dieser Frage. Der Fall der Knotenpunkte mit gemeinsamem Kühlstrom wird getrennt ausführlich behandelt. Für den Fall, wenn mehrere Parameter sich gleichzeitig ändern, wird auf die Näherungsberechnungen hingewiesen. Mit Hilfe der inversen Wärmeleitungsmatrix beschäftigt sich der Artikel auch mit Berechnungen, welche die Maschinenzeit für die Berechnungen verkürzen.

Schließlich werden einige wichtige Anwendungen erwähnt.

Literatur

1. HAK, J.: Wärmequellen-Netze elektrischer Maschinen E und M 76, S. 236 (1959)
2. KEVE, TH.: Anwendung des Digitalrechners und Methoden zur Bestimmung der Parameter für die Erwärmungsrechnung der Asynchronmotoren mit Oberflächenkühlung. CONTI Elektro-Berichte Jan./Juni, S. 42. (1967)
3. HAK, J.: Möglichkeiten und Aussichten einer unbeschränkten Lösung des Wärmeproblems von elektrischen Maschinen. E und M 74, S. 305 (1957)
4. HAK J.: Einfluß der Unsicherheit der Berechnung von einzelnen Wärmewiderständen auf die Genauigkeit des Wärmequellen-Netzes. Arch. f. Elektrotechn. 47, S. 109 (1964)
5. KESSLER, A.: Zur Theorie des Wärmequellen-netzes. Arch. f. Elektrotechn. 49, S. 109 (1964)
6. PERRIER, M. F.: Quelques applications de l'homographie aux courants continu et alternatif. Revue générale de l'électricité 58, No. 2. (1949)
7. HAK, K.: Lösung eines Wärmequellen-Netzes mit Berücksichtigung der Kühlströme. Arch. f. Elektrotechn. 52, S. 137 (1956)
8. ISTVÁNFY, GY.: Aszimmetriák vizsgálata hővezetési mátrixos melegeké számításnál. Elektrotechnika 63, 12. szám (1970)
9. ISTVÁNFY GY.—TORBIK, E.: Villamosgépek melegedésének meghatározása számítógéppel. Elektrotechnika 65, 8—9. szám. (1972)

Ernő TORBIK, H-1521 Budapest