К ВОПРОСУ О СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

МАЛАШЕНКО В. М.

Кафедра автоматизации Будапештского Технического Университета

Поступило: 8 ноября 1974

Представлено проф. Ф. Чаки

1. Введение

В практике анализа и синтеза линейных систем автоматического регулирования с переменными параметрами большое распространение получили методы моделирования таких систем на аналоговых и цифровых вычислительных машинах. Известно, что линейная система автоматического регулирования с переменными параметрами имеет две основные формы описания: или в виде одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, выражающего связь между «выходом» системы $y(t)$ и «входом» $\vartheta(t)$, то есть в виде

$$\frac{d^n y(t)}{dt} + \sum_{i=0}^{n=1} \alpha_i(t) \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n} \beta_i(t) \frac{d^i \vartheta(t)}{dt^i}, \quad t_0 \leqslant t < +\infty \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right|_{t=t_0} = y_{i0} = \text{const}, \quad i = 0,1, \ldots, n-1, \tag{1.2}$$

или в векторно-матричной дифференциальной форме (форме Коши)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)\vartheta(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 = \text{const} \tag{1.4}$$

В (1.3) $A(t)$ и $B(t)$ матрицы размера $(n \times n)$, $X(t)$ и $\vartheta(t)$ векторы-столбцы, а $C(t)$ и

$D(t)$ векторы-строки, то есть

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix};\ B(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix};x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix};\vartheta(t)=\begin{bmatrix} \vartheta_1(t) \\ \vdots \\ \vartheta_n(t) \end{bmatrix};$$

$$C(t)=[C_1(t),\dots,C_n(t)];\quad D(t)=[d_n(t),\dots,\ d(t)]$$

Вектор $X(t)$ носит название вектора состоянии системы, а его координаты $X_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ носят название переменных состояния.

Для целей моделирования более предпочтительным является описание системы в форме (1.3), так как например: при моделировании системы на АВМ нежелательно использовать дифференциаторы, которые являются устройствами, «притягиваящими» шумы. Поэтому возникает проблема разработки методов, позволяющих от описания системы в виде (1.1) переходить к эквивалентному описанию этой же системы в виде (1.3).

Данной проблеме уделяется внимание вработе [2]. Метод, предложенный в этой работе, состоит в том, что по уравнению (1.1) составляется структурная схема, содержащая дифференциаторы и интеграторы, и указывается приём переноса одного дифференциатора через цепь интеграторов. В результате получается структурная схема, содержащая на один дифференциатор меньше. В случае $\beta_\mu(t)\neq 0$ $[\mu=\max(1, 2, \dots, n)]$ в правой части (1.1), этот приём применяется μ-раз. Так как на каждом шаге применения этого метода требуется новый пересчёт всех коэффициентов системы, то три достаточно большом μ применение этого метода связано с громоздкой вычислительной работой. С точки зрения техники моделирования на АВМ это также довольно громоздкий метод, так как требуется большое количество интеграторов. Эти трудности отмечают и авторы [2].

В настоящей работе предлагаются другие алгоритмы перехода от описания (1.1) к описанию (1.3). Алгоритмы получены на основе развития метода, рассмотренного в [1]. Сущность метода состоит в следующем: предполагается, что в некотором пространстве состояний система, описывающаяся (1.1), описывается уравнением (1.3). Причём заметим, что так как «вход» системы есть скаляр $\vartheta(t)$, то $B(t)$ матрица-столбец, а $D(t)$ скалярная функция. Из (1.3) находятся производные $y^{(i)}(t)$ $(i=0, 1, \dots, n)$. Производные до $(n-1)$-го порядка включительно подставляются в уравнение (1.1) и таким образом выражается n-я производная $y(t)$. Эту производную приравнивают соответствующей производной, полученной из (1.3). Приравнивая соответствующие выражения при соответствующих координатах $X_i(t)$ и $\vartheta^{(j)}(t)$ получаем $2n+1$ уравнений относительно неизвестных переменных элементов матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и (Dt). Так как этих неизвестных будет $(n+1)^2$, то можно предположить, что решение этой задачи не обладает однозначностью, следовательно n^2 неизвестных можно задавать в некоторой степени произвольным образом. Ограничения, накладываемые на произвол выбора, содержатся в получении непротиворечивой системы уравнений.

В [1] рассматривается случай, когда

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_n(t) \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix};$$

$$C(t) = [1, 0, \dots, 0]; \qquad D(t) = b_0(t),$$

где неизвестные коэффициенты находятся по следующим формулам:

$$a_i(t) = -\alpha_{i-1}(t), \qquad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$b_0(t) = \beta_n(t)$$

$$b_k(t) = \beta_{n-k}(t) - \sum_{e=0}^{k-1} \alpha_{n-1-e}(t) \sum_{m=0}^{k-1-e} \binom{n-k+m}{n-k} \frac{d^m}{dt^m}[b_{k-m-e-1}(t)] - \sum_{m=1}^{k} \binom{n-k+m}{n-k} \frac{d^m}{dt^m}[b_{k-m}(t)],$$

$$k = 1, 2, \dots, n;$$

здесь и далее $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ — биноминальные коэффициенты.

Структурная схема для этого случая приведена на рис. 1.

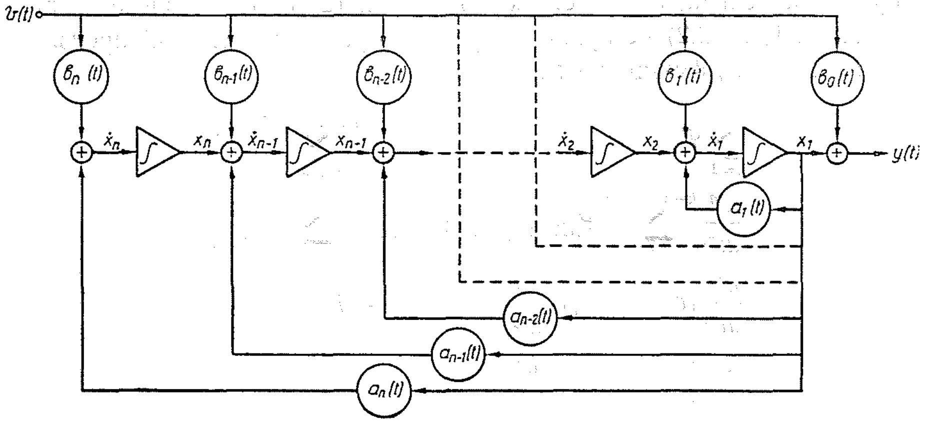

Рис. 1

2. Структурные преобразования линейных систем с переменными параметрами

АЛГОРИТМ 1

Пусть система регулирования задана в виде (1.1) с начальными условиями (1.2). В (1.3) положим, что неизвестные матрицы имеют следующий вид:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2(t) & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1}(t) & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_n(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_{n-1}(t) \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} C(t) = [1, \ 0, \ \ldots, \ 0], \\ D(t) = b_0(t), \end{matrix}$$

то есть, уравнения состояния выглядят следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_1(t)\,x_1(t) + x_2(t) + b_1(t)\,\vartheta(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_2(t)\,x_1(t) + x_3(t) + b_2(t)\,\vartheta(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= a_{n-1}(t)x_1(t) + x_n(t) + b_{n-1}(t)\vartheta(t) \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_n(t)x_1(t) + b_n(t)\vartheta(t) \end{aligned}\right\} . \tag{2.1}$$

$$y(t) = x_1(t) + b_0(t)(t). \tag{2.2}$$

Структурная схема, соответствующая (2.1) и (2.2), представлена на рис. 2.

Из (2.1) и (2.2) нетрудно получить выражение для k-й производной ($k = 1, 2, \ldots, n$) функции $y(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d^k y(t)}{dt^k} = {} & \sum_{i=1}^{k} \Psi_{[i]k-i}(t)\,x_i(t) + x_{k+1}(t) + \sum_{j=0}^{k-2} \left\{ \sum_{m=0}^{k-2-j} \binom{j+m}{j} \right. \\ & \frac{d^m}{dt^m} \sum_{i=1}^{k-1-j-m} \Psi_{[i]k-1-j-m-i}(t)\,b_i(t) + \sum_{m=0}^{k-j} \binom{j+m}{j} \\ & \left. \frac{d^m}{dt^m}\left[b_{k-m-j}(t)\right] \right\} \frac{d^j\vartheta(t)}{dt^j} + \left[b_1(t) + k\,\frac{db_0(t)}{dt} \right] \\ & \frac{d^{k-1}\vartheta(t)}{dt^{k-1}} + b_0(t)\,\frac{d^k\vartheta(t)}{dt^k}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$

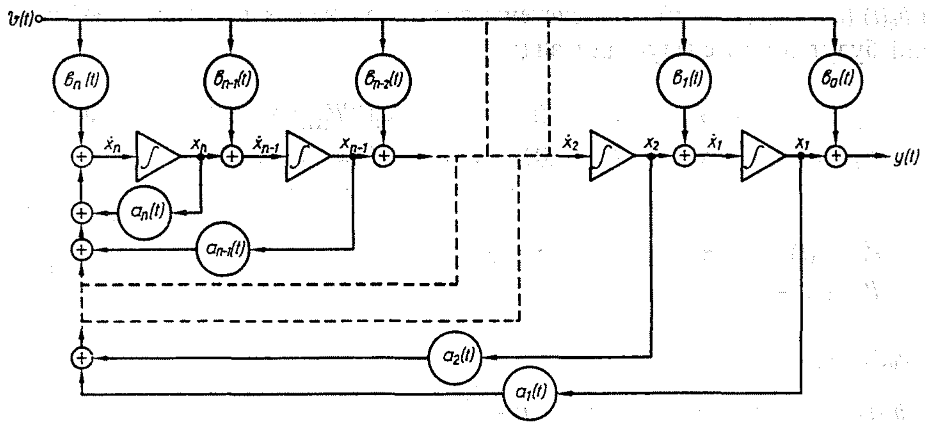

Рис. 2

где вспомогательные функции

$$\Psi_{[1]k-1}(t) = \frac{d\Psi_{]1]k-2}(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(t)\,\Psi_{[1]k-1-i}(t) + a_k(t) \tag{2.4}$$

$$\Psi_{[e]k-e}(t) = \Psi_{[e-1]\,k-e}(t) + \frac{d\,\Psi_{[e]k-e-1}(t)_1}{dt}, \quad e = 2, 3, \ldots, k-1; \tag{2.5}$$

с условием, что

$$\Psi_{[m]0}(t) = a_1(t), \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.6}$$

А n-я производная функции

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} = {} & \sum_{i=1}^{n} \Psi_{[i]n-i}(t)\, x_i(t) + \sum_{j=0}^{n-2} \left\{ \sum_{m=0}^{n-2-j} \binom{j+m}{j} \frac{d^m}{dt^m} \right. \\ & \sum_{i=1}^{n-1-j-m} \Psi_{[i]n-1-j-m-i}(t)\, b_i(t) + \\ & \left. \sum_{m=0}^{n-1} \binom{j+m}{j} \frac{d^m}{dt^m} \left[b_{n-m-j}(t)\right] \right\} \frac{d^j \vartheta(t)}{dt^j} \\ & + \left[b_1(t) + n\frac{db_0(t)}{dt} \right] \frac{d^{n-1}\vartheta(t)}{dt^{n-1}} + b_0(t)\frac{d^n\vartheta(t)}{dt^n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В (2.7) все вспомогательные функции $\Psi_{[i]n-i}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются также по формулам (2.4), (2.5) и (2.6), только вместо K берётся n.

Если теперь в (1.1) подставить (2.3) и приравнять (2.7), то получим следующие системы уравнений для определения неизвестных $a_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

и $b_k(t)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Эти системы после некоторых простых преобразований будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{[1]n-1}(t) = -\alpha_{n-1}(t)\,\Psi_{[1]n-2}(t) - \ldots - \alpha_2(t)\Psi_{[1]1}(t) - \alpha_1(t)a_1(t) - \alpha_0(t)\\
&\Psi_{[2]n-2}(t) = -\alpha_{n-1}(t)\,\Psi_{[2]n-3}(t) - \ldots - \alpha_2(t)a_1(t) - \alpha_1(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Psi_{[n-1]1}(t) = -\alpha_{n-1}(t)a_1(t) - \alpha_{n-2}(t)\\
&\Psi_{[n]0}(t) = -\alpha_{n-1}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_0(t) = \beta_n(t)\\
&b_1(t) = \beta_{n-1}(t) - \alpha_{n-1}(t)\,\beta_n(t) - n\,\frac{d\beta_n(1)}{dt}\\
&b_k(t) = \beta_{n-k}(t) - \alpha_{n-k}(t)\beta_n(t) - \alpha_{n-k+1}(t)\left[b_1(t) + (n-k+1)\,\frac{d\beta^n(t)}{dt}\right] -\\
&\quad - \sum_{m=1}^{k}\binom{n-k+m}{n-k}\frac{d^m}{dt^m}\,[b_{k-m}(t)] - \sum_{e=0}^{k-3}\alpha_{n-k+e+2}(t)\left\{\sum_{m=0}^{e}\binom{n-k+m}{n-k}\cdot\right.\\
&\quad\left.\cdot\,\frac{d^m}{dt^m}\sum_{i=1}^{e-m+1}\Psi_{[i]e+1-m-i}(t)b_i(t) + \sum_{m=0}^{e+2}\binom{n-k+m}{n-k}\frac{d^m}{dt^m}\,[b_{e+2-m}(1)]\right\} -\\
&\quad - \sum_{m=0}^{k-2}\binom{n-k+m}{n-k}\frac{d^m}{dt^m}\cdot\sum_{i=1}^{k-1-m}\Psi_{[i]k-1-m-i}(t)\,b_i(t)\,,\ k = 2, 3, \ldots, n.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Ясно, что для решения систем (2.8) и (2.9) нам необходимо определить неизвестные вспомогательные функции $\Psi_{[i]j}(t)$ ($i, j = 1, \ldots, n-1$). Для наглядности сведём их в следующую таблицу:

$$\uparrow\begin{bmatrix}
\Psi_{[1]n-1}(t)\,, & & & \\
\Psi_{[1]n-2}(t), & \Psi_{[2]n-2}(t)\,, & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
\Psi_{[1]1}(t)\,, & \Psi_{[2]1}(t)\,, \ \ldots, & \Psi_{[n-2]1}(t)\,, & \Psi_{[n-1]1}(t)
\end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Так как (2.5) можно переписать в некотором другом виде

$$\Psi_{[n-k-m]k}(t) = \Psi_{[n-k-m+1]k}(t) - \frac{d\Psi_{[n-k-m+1]k-1}(t)}{dt} \tag{2.11}$$

то, используя эту рекуррентную формулу и систему (2.8), с учётом (2.6), можно определить все неизвестные функции $\Psi_{[i]j}(t)$ ($i, j = 1, 2, \ldots n-1$) таблицы (2.10). Схематично это соответствует вычислению верхней строки по нижней слева направо.

После определения всех функций таблицы (2.10), используя (2.8) и (2.4) найдём коэффициенты $a_k(t)$ ($K = 1, 2, \ldots, n$).

$$\left.\begin{aligned} a_1(t) &= -\alpha_{n-1}(t) \\ a_k(t) &= \Psi_{[1]k-1}(t) - \frac{d\Psi_{[1]k-2}(t)}{dt} - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(t)\,\Psi_{[1]k-1-i}(t)\,,\; k = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

а $b_k(t)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) находим из (2.9).

Начальные условия для (2.1) определятся из (2.3) при $t = t_0$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t_0) &= y_{0,0} - b_0(t_0)\,\vartheta(t_0) \\ x_{k+1}(t_0) &= y_{k,0} - \sum_{i=1}^{k} \Psi_{[i]k-1}(t_0)\,x_i(t_0) - b_0(t)\left.\frac{d^k\vartheta(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0} - \\ &- \left[b_1(t) + k\frac{db_0(t)}{dt}\right]\left.\frac{d^{k-1}\vartheta(t)}{dt^{k-1}}\right|_{t=t_0} - \sum_{j=0}^{k-2}\left\{\sum_{m=0}^{k-2-j}\binom{j+m}{j}\right. \\ &\frac{d^m}{dt^m}\sum_{i=1}^{k-1-j-m}\Psi_{[i]k-1-j-m-1}(t)\,b_i(t) + \sum_{m=0}^{k-j}\binom{j+m}{j} \\ &\left.\frac{d^m}{dt^m}\left[b_{k-m-j}(t)\right]\right\}\left.\frac{d^j\vartheta(t)}{dt^j}\right|_{t=t_0}, \\ &(k = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Из всего вышесказанного вытекает следующий алгоритм нахождения неизвестных коэффициентов (2.1) и (2.2), по уравнению (1.1):

1. Составляется таблица (2.10) неизвестных функций $\Psi_{[i]j}(t)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n-1$) и эти функции находятся по рекуррентным формулам (2.11) и формулам (2.8), с учётом (2.6).

2. По формулам (2.12) определяем $a_k(t)$, ($k = 1, 2, \ldots, n$).

3. По формулам (2.9) определяем $B_k(t)$, ($k = 0, 1, \ldots, n$).

4. Начальные условия для (2.1) определяются из (2.13).

ПРИМЕР

Пусть имеется система 2-го порядка, описывающаяся уравнением

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha_1(t)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha_0(t)y(t) = \beta_2(t)\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \beta_1(t)\frac{d\vartheta(t)}{dt} + \beta_0(t)\vartheta(t) \quad (2.14)$$

с начальными условиями:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = y_{10}\,;\; y(t_0) = y_{00}\,.$$

Эта система будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_1(t)\,x_1(t) + x_2(t) + b_1(t)\,\vartheta(t)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_2(t)\,x_1(t) + b_2(t)\,\vartheta(t)\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$$y(t) = x_1(t) + b_0(t)\vartheta(t) \tag{2.16}$$

Для определения неизвестных коэффициентов в (2.15) и в (2.16) поступаем по найденному алгоритму. В этом случае таблица (2.10) будет состоять из одной функции $\Psi_{[1]1}(t)$.

Так как $a_1(t) = -\alpha_1(t)$, то из (2.8)

$$\Psi_{[1]1}(t) = -\alpha_1(t)a_1(t) - \alpha_0(t) = \alpha_1^2(t) - \alpha_0(t)$$

Далее по формуле (2.12)

$$a_2(t) = \Psi_{[1]1}(t) - \frac{da_1(t)}{dt} - a_1^2(t) = \frac{d\alpha_1(t)}{dt} - \alpha_0(t)$$

и из формул (2.9)

$$b_0(t) = \beta_2(t); \quad b_1(t) = \beta_1(t) - \alpha_1(t)\,\beta_2(t) - 2\frac{d\beta_2(t)}{dt};$$

$$b_2(t) = \beta_0(t) - \alpha_0(t)\,\beta_2(t) + \frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2} + \beta_2(t)\frac{d\alpha_1(t)}{dt}.$$

Используя формулы (2.13), находим начальные условия для (2.15).

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= y_{00} - \beta_2(t_0)\,\vartheta(t_0)\\ x_2(t_0) &= y_{10} + \alpha_1(t_0)\left[\beta_2(t_0)\,\vartheta(t_0) - y_{00}\right] +\\ &+ \left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} + \alpha_1(t)\,\beta_2(t) - \beta_1(t)\right]_{t=t_0} - \beta_2(t)\frac{d\vartheta(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}.\end{aligned}$$

АЛГОРИТМ 2

Теперь в (1.3) положим, что неизвестные матрицы имеют следующий вид:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_2(t) & 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n-1}(t) & 0 & 0 & \dots & 1\\ a_n(t) & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 1\end{bmatrix}; \quad \begin{aligned}&C(t) = [C_1(t),\ C_2(t),\ \dots,\\ &C_n(t)];\quad D(t) = b_0(t).\end{aligned}$$

То есть предположим, что наша система описывается следующими уравнениями переменных состояния

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_1(t)\,x_1(t) + x_2(t)\\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= a_2(t)\,x_1(t) + x_3(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= a_{n-1}(t)\,x_1(t) + x_n(t)\\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= a_n(t)\,x_1(t) \quad + \vartheta(t)
\end{aligned}\right\} . \qquad (2.17)$$

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu(t)\,x_\nu(t) + b_0(t)\,\vartheta(t) \qquad (2.18)$$

Уравнениям (2.17) и (2.18) соответствует структурная схема приведённая на рис. 3.

Из (2.17) и (2.18) с помощью введения неизвестных вспомогательных функций $\Psi_{[1]j}(t)$ нетрудно получить выражение для K-й производной функции $y(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{[i]k}(t)\,x_i(t) + \sum_{j=0}^{k-1}\left\{\sum_{l=0}^{k-1-j}\binom{j+e}{j}\frac{d^e}{dt^e}\left[\Psi_{[n]k-1-j-e}(t)\right] + \right.\\
\left. + \binom{k}{j}\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left[b_0(t)\right]\right\}\frac{d^j\vartheta(t)}{dt^j} + b_0(t)\frac{d^k\vartheta(t)}{dt^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned} \qquad (2.19)$$

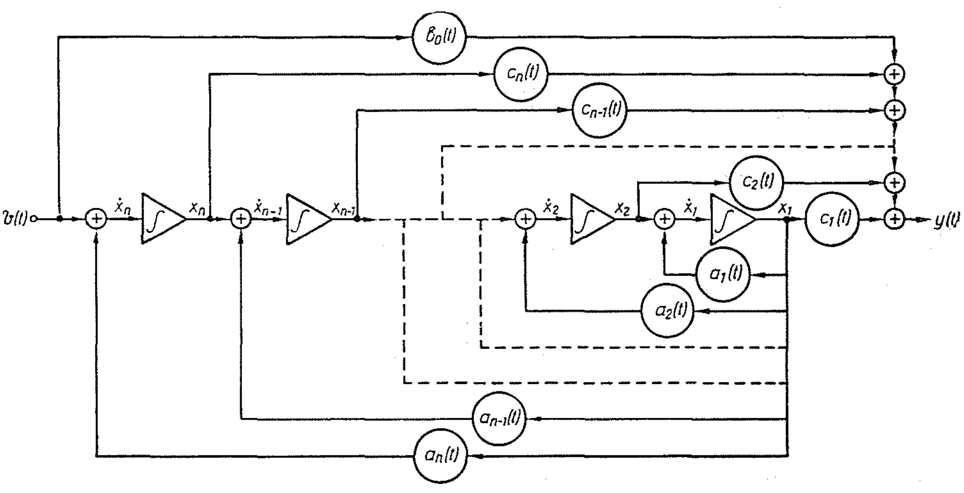

Рис. 3

где неизвестные вспомогательныя функции $\Psi_{[i]j}(t)$ определяются следующими соотношениями:

$$\Psi_{[1]k}(t) = \frac{d\Psi_{[1]k-1}(t)}{dt} + \sum_{r=1}^{n} a_r(t)\,\Psi_{[r]k-1}(t) \tag{2.20}$$

$$\Psi_{[e]k}(t) = \Psi_{[e-1]k-1}(t) + \frac{d\,\Psi_{[e]k-1}(t)}{dt,}\,, \; l=2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{2.21}$$

с учётом того, что

$$\Psi_{[m]0}(t) = C_m(t)\,, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{2.22}$$

Как и в предыдущем случае, подставляем (1.19) в (1.1), получим следующую систему уравнений, которая после некоторых простых преобразований будет выглядеть следующим образом (для удобства рассуждений разобьём нашу полученную систему на две части):

$$\Psi_{[i]n}(t) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(t)\,_{[i]\nu}(t)\,, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{2.23}$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_0(t) = \beta_n(t)\\
&\Psi_{[n]0}(t) = C_n(t) = \beta_{n-1}(t) - \alpha_{n-1}(t)b_0(t) - n\,\frac{db_0(t)}{dt}\\
&\Psi_{[n]i}(t) = \beta_{n-1-i}(t) - \alpha_{n-1-i}(t)b_0(t) - \binom{n}{i+1}\frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}[b_0(t)] -\\
&\quad - \sum_{m=1}^{i}\binom{n+m-i-1}{n-i-1}\frac{d^m}{dt^m}[\Psi_{[n]i-m}(t)] - \sum_{l=0}^{i-1}\alpha_{l+n-i}(t)\\
&\quad \left\{\sum_{j=0}^{l}\binom{n+j-i-1}{n-i-1}\frac{d^j}{dt^j}[\Psi_{[n]l-j}(t)] + \binom{n+l-i}{l+1}\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}[b_0(t)],\right.\\
&i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\ .
\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Из (2.24) определим функции $\Psi_{[n]i}(t)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Функцию $\Psi_{[n]n}(t)$, определим, используя (2.23)

$$\Psi_{[n]n}(t) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(t)\,\Psi_{[n]\nu}(t)\,. \tag{2.25}$$

Для вычисления остальных вспомогательных функций $\Psi_{[q]s}(t)$ $(s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ q = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ воспользуемся соотношениями (2.21), (2.22) и (2.23). Легко видеть, чтоэти неизвестные вспомогательные функции будут определяться следующими рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{[q-1]s}(t) = \Psi_{[q]s+1}(t) - \frac{d\Psi_{[q]s}(t)}{dt}, \quad s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\\
&\Psi_{[q-1]n}(t) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(t)\,\Psi_{[q-1]\nu}(t),\\
&\qquad q = n,\ n-1,\ \ldots,\ 3,\ 2).
\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Естественно, что при этом, учитывая (2.22), мы определим все коэффициенты $C_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Коэффициенты $a_r(t)$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ определяются из системы уравнений, которая получается с помощью (2.20)

$$\sum_{r=1}^{n} a_r(t)\,\Psi_{[r]k-1}(t) = \Psi_{[1]k}(t) - \frac{d\Psi_{[1]k-1}(t)}{dt}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.27}$$

Система (2.27) линейная алгебраическая система, относительно неизвестных $a_r(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, которую можно решить обычными методами линейной алгебры, например методом Гаусса.

Начальные условия для (2.17) определяются из соотношений (2.18) и (2.19):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} C_m(t_0)\,x_m(t_0) = y_{00} - b_0(t_0)\,\vartheta(t_0)\\
&\sum_{m=1}^{n} \Psi_{[m]k}(t_0)\,x_m(t_0) = y_{k0} - \sum_{j=0}^{k-1}\left\{\sum_{e=0}^{k-1-j}\binom{j+l}{j}\frac{d^l}{dt^l}\,[\Psi_{[n]k-1-j-l}(t)] + \right.\\
&\qquad \left. + \binom{k}{j}\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\,[b_0(t)]\right\}\frac{d^j\,\vartheta(t)}{dt^j}\bigg|_{t=t_0} - \left[b_0(t)\,\frac{d^k\vartheta(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0},\\
&\qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)
\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных коэффициентов в (2.17) и в (2.18) по уравнению (1.1), поступаем следующим образом:

1. *Коэффициент* $b_0(t) = \beta_n(t)$.
2. *Из (2.24)* и *(2.25) определяются функции* $\Psi_{[n]i}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
3. *По рекуррентным формулам (2.26) определяются функции* $\Psi_{[q]s}(t)$, $(s = 0, 1, \ldots, n)$ $(q = n, n-1, \ldots, 3, 2)$, *при этом учитывая и коэффициенты* $C_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.
4. *Коэффициенты* $a_r(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ *определяются из системы (2.27).*
5. *Начальные условия для (2.17) определяются из системы (2.28).*

ПРИМЕР

Рассмотрим систему 2-го порядка ($n=2$), то есть

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha_1(t)\frac{dy(t)}{dt}+\alpha_0(t)\,y(t)=\beta_2(t)\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2}+\beta_1(t)\frac{d\vartheta(t)}{dt}+\beta_0(t)\vartheta(t) \tag{2.29}$$

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0}=y_{10},\quad y(t_0)=y_{00} \tag{2.30}$$

Тогда по формулам (2.24) и (2.25)

$$\left.\begin{aligned}
&b_0(t)=\beta_2(t),\\
&\Psi_{[2]0}(t)\equiv C_2(t)=\beta_1(t)-\alpha_1(t)\,b_0(t)-2\frac{db_0(t)}{dt},\\
&\Psi_{[2]1}(t)=\beta_0(t)-\alpha_0(t)\,b_0(t)-\frac{d\Psi_{[2]0}(t)}{dt}-\frac{d^2b_0(t)}{dt^2}-\\
&\qquad-\alpha_1(t)\left[\Psi_{[2]0}(t)+\frac{db_0(t)}{dt}\right],\\
&\Psi_{[2]2}(t)=-\alpha_1(t)\,\Psi_{[2]1}(t)-\alpha_0(t)\,\Psi_{[2]0}(t).
\end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

По формулам (2.26), где ($q=2$)

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{[1]0}(t)\equiv C_1(t)=\Psi_{[2]1}(t)-\frac{d\Psi_{[2]0}(t)}{dt}\\
&\Psi_{[1]1}(t)=\Psi_{[2]2}(t)-\frac{d\Psi_{[2]1}(t)}{dt}\\
&\Psi_{[1]2}(t)=-\alpha_1(t)\,\Psi_{[1]1}(t)-\alpha_0(t)\,\Psi_{[1]0}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Из (2.31) и (2.32) получаем

$$b_0(t)=\beta_2(t)$$

$$\Psi_{[2]0}(t)\equiv C_2(t)=\beta_1(t)-\alpha_1(t)\,\beta_2(t)-2\frac{d\beta_2(t)}{dt}$$

$$\Psi_{[2]1}(t)=\beta_0(t)+\beta_2(t)\left[\alpha_1^2(t)-\alpha_0(t)\right]+\alpha_1(t)\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt}-\beta_1(t)\right]-$$

$$-\frac{d\beta_1(t)}{dt}+\frac{d}{dt}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right]+\frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2}$$

$$\Psi_{[2]2}(t) = -\alpha_1(t)\Big\{\beta_0(t) + \beta_2(t)\left[\alpha_1^2(t) - 2\alpha_0(t)\right] + \alpha_1(t)\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right] -$$
$$- \frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] + \frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2}\Big\} -$$
$$-\alpha_0(t)\left[\beta_1(t) - 2\frac{d\beta_2(t)}{dt}\right];$$

$$\Psi_{[1]0}(t) \equiv C_1(t) = \beta_0(t) + \beta_2(t)\left[\alpha_1^2(t) - \alpha_0(t)\right] + \alpha_1(t)\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right] -$$
$$-2\frac{d\beta_1(t)}{dt} + 2\frac{d}{dt}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] + 3\frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2};$$

$$\Psi_{[1]1}(t) = -\alpha_1(t)\Big\{\beta_0(t) + \beta_2(t)\left[\alpha_1^2(t) - 2\alpha_0(t)\right] + \alpha_1(t)\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right] -$$
$$- \frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] + \frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2}\Big\} -$$
$$-\alpha_0(t)\left[\beta_1(t) - 2\frac{d\beta_2(t)}{dt}\right] - \frac{d}{dt}\Big\{\beta_2(t)\left[\alpha_1^2(t) - \alpha_0(t)\right] +$$
$$+\alpha_1(t)\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right]\Big\} - \frac{d^2}{dt^2}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] -$$
$$-\frac{d\beta_0(t)}{dt} + \frac{d^2\beta_1(t)}{dt^2} - \frac{d^3\beta_2(t)}{dt^3},$$

$$\Psi_{[1]2}(t) = \left[\alpha_1^2(t) - \alpha_0(t)\right]\Big\{\beta_0(t) + \beta_2(t)\left[\alpha_1^2(t) - \alpha_0(t)\right] + \alpha_1(t) \times$$
$$\times\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] - \frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2}\Big\} -$$
$$-\alpha_1(t)\Big\{\alpha_0(t)\left[2\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right] - \frac{d}{dt}\beta_2(t)\left(\alpha_1^2(t) - \alpha_0(t)\right) +$$
$$+\alpha_1(t)\left[\frac{d\beta_2(t)}{dt} - \beta_1(t)\right] - \frac{d^2}{dt^2}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] - \frac{d\beta_0(t)}{dt} +$$
$$+\frac{d^2\beta_1(t)}{dt^2} - \frac{d^3\beta_2(t)}{dt^3}\Big\} + \alpha_0(t)\Big\{\frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\alpha_1(t)\beta_2(t)\right] +$$
$$+2\frac{d^2\beta^2(t)}{dt^2}\Big\} - \alpha_1^2(t)\alpha_0(t)\beta_2(t).$$

То есть, все вспомогательные функции определились через коэффициенты системы (2.29).

Система уравнений для определения коэффициентов $a_1(t)$ и $a_2(t)$, учитывая (2.27), запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_1(t)\,c_1(t) + a_2(t)\,c_2(t) &= \Psi_{[1]1}(t) - \frac{dc_1(t)}{dt} \\ a_1(t)\,\Psi_{[1]1}(t) + a_2(t)\Psi_{[2]1}(t) &= \Psi_{[1]2}(t) - \frac{d\Psi_{[1]1}(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{\Psi_{[2]1}(t)\left[\Psi_{[1]1}(t) - \dfrac{dc_1(t)}{dt}\right] + c_2(t)\left[\dfrac{d\Psi_{[1]1}(t)}{dt} - \Psi_{[1]2}(t)\right]}{c_1(t)\,\Psi_{[2]1}(t) - c_2(t)\,\Psi_{[1]1}(t)} \\ a_2(t) &= \frac{\Psi_{[1]1}(t)\left[\dfrac{dc_1(t)}{dt} - \Psi_{[1]1}(t)\right] + c_1(t)\left[\Psi_{[1]2}(t) - \dfrac{d\Psi_{[1]1}(t)}{dt}\right]}{c_1(t)\,\Psi_{[2]1}(t) - c_2(t)\,\Psi_{[1]1}(t)} \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

Таким образом, (2.29) с начальными условиями (2.30) можно описать следующими уравнениями в пространстве состояний:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_1(t)x_1(t) + x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_2(t)\,x_1(t) + \vartheta(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

$$y(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + b_0(t)\,\vartheta(t) \tag{2.37}$$

Начальные условия для (2.36) определяются из системы

$$\left.\begin{aligned} c_1(t_0)x_1(t_0) + c_2(t_0)x_2(t_0) &= y_{00} - b_1(t_0)\,\vartheta(t_0) \\ \Psi_{[1]1}(t_0)\,x_1(t_0) + \Psi_{[2]1}(t_0)\,x_2(t_0) &= y_{10} - c_2(t_0)\,\vartheta(t_0) - \frac{d}{dt}\,[b_0(t)\,\vartheta(t)]_{t=t_0} \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

3. Стуктурные преобразования линейных систем автоматического регулирования с переменными параметрами и запаздыванием

Известно, что в общем виде система автоматического регулирования с переменными параметрами и западыванием описывается следующим дифференциально-разностным уравнением:

$$\frac{d^n y(t)}{dt} + \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{j,i}(t)\,\frac{d^i y(t-\tau_j)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{n} \beta_{k,l}(t)\,\frac{d^l\vartheta(t-\Delta_k)}{dt^l} \tag{3.1}$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N; \qquad 0 = \Delta_0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_M$
и $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau_N \leq t \leq t_0$. (3.2)

Наша задача состоит в расширении метода, рассмотренного в первой части статьи и на системы с запаздыванием вида (3.1). Однако, представление (3.1) в нормальной форме Коши, в общем случае с N запаздываниями, является сложной проблемой, неразрешимой в общем виде. Поэтому, в дальнейшем, мы рассмотрим системы вида (3.1) с одним запаздыванием и некоторые частные случаи с двумя запаздываниями.

Так как общее решение (3.1) будет равно сумме решений от воздействий, стоящих в правой части (3.1) [3], то есть от воздействий

$$F_k(t - \Delta_k) = \sum_{l=0}^{n} \beta_{k,l}(t) \frac{d^l \vartheta(t - \Delta_k)}{dt^l}$$

то очевидно, не умаляя общности, мы можем решать задачу приведения (3.1) к нормальной форме Коши только для одного воздействия типа $F_k(t - \Delta_k)$, причём можно положить $\Delta_k = 0$.

Система n-го порядка с одним запаздыванием

Пусть система описывается следующим дифференциально-разностным уравнением:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{0,i}(t) \frac{d^i y(t)}{dt^i} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{1,j}(t) \frac{d^j y(t-\tau)}{dt^j} = \sum_{l=0}^{n} \beta_l(t) \frac{d^l \vartheta(t)}{dt^l} \tag{3.3}$$

где $\tau > 0$, а $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ (3.4)
Предположим, что (3.3) описывается следующим векторно-матричными дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-\tau) + B_0(t)\,\vartheta(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t)\,\vartheta(t - i\tau) \tag{3.5}$$

$$y(t) = x_1(t) + b_{0,1}(t)\vartheta(t) \tag{3.6}$$

где

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \\ a_{0,1}(t) & a_{0,2}(t) & \cdots & a_{0,n}(t) \end{bmatrix}; \quad A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \end{bmatrix};$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix};\ B_0(t)=\begin{bmatrix} b_{1,1}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n,1}(t) \end{bmatrix};\ B_i(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_{i,i+2}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n,i+2}(t) \end{bmatrix},\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Или, перепишем (3.5) в развёрнутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + b_{1,1}(t)\,\vartheta(t) + b_{1,2}(t)\,\vartheta(t-\tau) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) + b_{2,1}(t)\,\vartheta(t) + b_{2,2}(t)\,\vartheta(t-\tau) + b_{2,3}(t)\,\vartheta(t-2\tau) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= x_n(t) + b_{n-1,1}(t)\,\vartheta(t) + b_{n-1,2}(t)\,\vartheta(t-\tau) + \ldots \\
&\qquad \ldots + b_{n-1,n}(t)\,\vartheta\,[t-(n-1)\tau] \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}(t)\,x_i(t-j\tau) + b_{n,1}(t)\,(t) + b_{n,2}(t)\,\vartheta(t-\tau) + \ldots \\
&\qquad \ldots + b_{n,n+1}(t)\,\vartheta(t-n\tau)
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Структурная схема (3.6) и (3.7) представлена на рис. 4.

Из (3.6) и (3.7) нетрудно получить

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} = x_{k+1}(t) + \sum_{r=0}^{k}\sum_{i=1}^{k-r} \frac{d^i\,\vartheta(t-r\tau)}{dt^i} \sum_{m=0}^{k-r-i} \binom{m+i}{i} \frac{d^m}{dt^m}\,[b_{k-i-m,r-1}(t)], \quad k=0, 1, \ldots, n-1, \tag{3.8}$$

n-я производная $y(t)$, с учётом последнего уравнения (3.7), имеет вид,

$$\begin{aligned}
\frac{d^n y(t)}{dt^n} &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}(t)\,x_i(t-j\tau) + \\
&+ \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-r} \frac{d^i\,\vartheta(t-r\tau)}{dt^i} \sum_{m=0}^{n-r-i} \binom{m+i}{i} \frac{d^m}{dt^m}\,[b_{n-i-m,r+1}(t)]\,.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставляя (3.8) в (3.3) и приравнивая подобные члены с (3.9), получим систему уравнений, из которой легко получить формулы для расчёта неизвест-

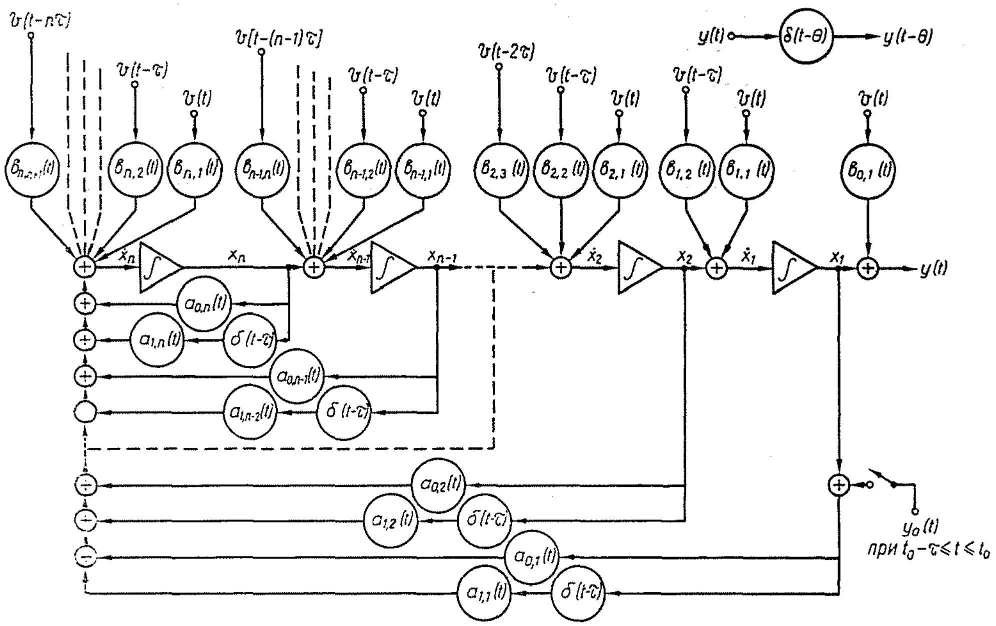

Рис. 4

ных коэффициентов в (3.6) и в (3.7)

$$a_{i,\mu}(t) = -\alpha_{i,\mu-1}(t) \quad i=0,1;\ \mu=1,2,\ \ldots,\ n \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_{0,1}(t)=\beta_n(t)\\
&b_{k,1}(t)=\beta_{n-k}(t)-\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{0,n-1-l}(t)\sum_{m=0}^{k-1-l}\binom{n-k+m}{n-k}\frac{d^m}{dt^m}\left[b_{k-1-m-l,1}(t)\right]-\\
&\qquad-\sum_{m=1}^{k}\binom{n-k+m}{n-k}\frac{d^m}{dt^m}\left[b_{k-m,1}(t)\right],\qquad k=1,2,\ \ldots,\ n.
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_{i,i+1}(t)=-\alpha_{1,n-1}(t)\,b_{i-1,i}(t-\tau)\\
&b_{i+m,i+1}(t)=-\sum_{l=0}^{m-1}\alpha_{0,n-1-l}(t)\sum_{k=0}^{m-l-1}\binom{n-i-m+k}{n-i-m}\frac{d^k}{dt^k}\left[b_{m+i-1-l-k,i+1}(t)\right]-\\
&\qquad-\sum_{l=0}^{m}\alpha_{1,n-1-l}(t)\sum_{k=0}^{m-l}\binom{n-i-m+k}{n-i-m}\frac{d^k}{dt^k}\left[b_{m+i-1-l-k,i}(t-\tau)\right]-\\
&\qquad-\sum_{l=1}^{m}\binom{n-i-m+l}{n-i-m}\frac{d^l}{dt^l}\left[b_{i+m-l,i+1}(t)\right],\quad m=1,2,\ldots,n-i\\
&\qquad(i=1,2,\ \ldots,\ n)
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Из формул (3.10), (3.11) и (3.12) нетрудно видеть, что если (3.3) не имеет запаздывания, то есть $\alpha_{1,\mu-1}(t) = 0$, ($\mu = 1, 2, \ldots, n$), то в этом случае $a_{1,\mu}(t) = 0$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$), и все $b_{i+m,i+2}(t) = 0$ ($m = 1, 2, \ldots, n-i$; $i = 1, 2, \ldots, n$) и полученный алгоритм приводит к хорошо известному алгоритму, описанному во введении.

Таким образом, система n-го порядка с одним запаздыванием, описываемая уравнением (3.3), может быть описана системой уравнений (3,6) и (3.7), у которой неизвестные коэффициенты могут быть найдены по формулам (3.10), (3.11)и (3.12). Заметим, что в (3.6) и (3.7) $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$.

Пример

Систему 2-го порядка с одним запаздыванием, описываемую следующим дифференциально-разностным уравнением:

$$\begin{gathered}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha_{0,1}(t)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha_{0,0}(t)y(t) + \alpha_{1,1}(t)\frac{dy(t-\tau)}{dt} + \\ + \alpha_{1.0}(t)y(t-\tau) = \sum_{l=0}^{2}\beta_l(t)\frac{d^l\vartheta(t)}{dt^l}\end{gathered} \tag{3.13}$$

$\tau > 0$ и $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$; можно описать следующей системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + b_{1,1}(t)\vartheta(t) + b_{1,2}(t)(t-\tau)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{2}a_{j,i}(t)x_i(t-j\tau) + b_{2,1}(t)\vartheta(t) + b_{2,2}(t)\vartheta(t-\tau) + \\ &\quad + b_{2,3}(t)\vartheta(t-2\tau)\\ y(t) &= x_1(t) + b_{0,1}(t)\vartheta(t)\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

где $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$.

Структурная схема (3.14) приведена на рис. 5. Коэффициенты (3.14), применяя для их вычисления описанный выше алгоритм, имеют следующий вид:

$$a(_{j,i}t) = -\alpha_{j,i-1}(t), \quad j = 0,\ 1; \quad i = 1,\ 2;$$

$$b_{0,1}(t) = \beta_2(t),$$

$$b_{1,1}(t) = \beta_1(t) - \alpha_{0,1}(t)\beta_2(t) - 2\frac{d\beta_2(t)}{dt},$$

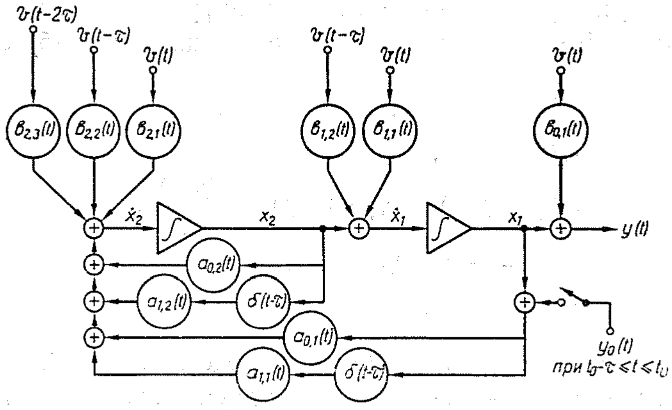

Рис. 5

$$\beta_{2,1}(t) = \beta_0(t) - \alpha_{0,1}(t)\,[\beta_1(t) - \alpha_{0,1}(t)\beta_2(t)] -$$

$$- \beta_2(t)\left[\alpha_{0,0}(t) + \frac{d\alpha_{0,1}(t)}{dt}\right] - \frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2},$$

$$b_{1,2}(t) = -\alpha_{1,1}(t)\,\beta_2(t-\tau),$$

$$b_{2,2}(t) = \alpha_{1,1}(t)\left[2\,\frac{d\beta_1(t-\tau)}{dt} - \beta_1(t-\tau)\right] + \beta_2(t-\tau)$$

$$\left\{\alpha_{1,1}(t)\,[\alpha_{0,1}(t) + \varphi_{0,1}(t-\tau)] - \alpha_{1,0}(t) + \frac{d\alpha_{1,1}(t)}{dt}\right\},$$

$$b_{2,3}(t) = \alpha_{1,1}(t)\,\alpha_{1,1}(t-\tau)\,\beta_2(t-2\tau).$$

Системы с двумя запаздываниями

а) Пусть имеем систему 1-го порядка с двумя запаздываниями, описываемую следующим дифференциально-разностным уравнением

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha_{0,0}(t)y(t) + \alpha_{1,0}(t)\,y(t-\tau_1) + \alpha_{2,0}(t)\,y(t-\tau_2) = \beta_1(t)\frac{d\vartheta(t)}{dt} + \beta_0(t)\vartheta(t) \tag{3.15}$$

$0 < \tau_1 < \tau_2$ и $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau_2 \leqslant t \leqslant t_0$ Тогда, эту систему можно описать следующими уравнениями состояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \sum_{j=0}^{2} a_{j,1}(t)\,x_1(t-\tau_j) + b_1(t)\,\vartheta(t) + b_2(t)\,\vartheta(t-\tau_1) + b_3(t)\vartheta(t-\tau_2), \\ y(t) &= x_1(t) + b_0(t)\,\vartheta(t), \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2$ и $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau_2 \leqslant t \leqslant t_0$ Коэффициенты (3.16) выражаются через коэффициенты (3.15) следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{j,1}(t) &= -\alpha_{j,0}(t), \quad j = 0,\ 1,\ 2;\\
b_0(t) &= \beta_1(t),\\
b_1(t) &= \beta_0(t) - \alpha_{0,0}(t)\,\beta_1(t) - \frac{d\beta_1(t)}{dt},\\
b_2(t) &= -\alpha_{1,0}(t)\beta_1(t-\tau_1),\\
b_3(t) &= -\alpha_{2,0}(t)\beta_1(t-\tau_2).
\end{aligned}$$

Структурная схема моделирования (3.16) приведена на рис. 6.

б) Если имеем систему 2-го порядка с двумя запаздываниями, описываемую уравнением

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sum_{j=0}^{2}\sum_{i=1}^{1}\alpha_{j,i}(t)\frac{d^i y(t-\tau_j)}{dt^i} = \sum_{l=0}^{2}\beta_l(t)\frac{d^l\vartheta(t)}{dt^l} \tag{3.17}$$

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2$ и $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau_2 \leqslant t \leqslant t_0$ то эту систему можно описать следующими уравнениями состояний:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + b_{1,0}(t)\,\vartheta(t) + b_{1,1}(t)\,\vartheta(t-\tau_1) + b_{1,2}(t)\,\vartheta(t-\tau_2),\\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= \sum_{j=0}^{2}\sum_{i=1}^{2} a_{j,i}(t)\,x_i(t-\tau_j) + b_{2,0}(t)\,\vartheta(t) + b_{2,1}(t)\,\vartheta(t-\tau_1) +\\
&\quad + b_{2,2}(t)\,\vartheta(t-\tau_2) + b_{2,3}(t)\,\vartheta(t-2\tau_1) + b_{2,4}(t)\vartheta(t-2\tau_2) +\\
&\quad + b_{2,5}(t)\,\vartheta(t-\tau_1-\tau_2),\\
y(t) &= x_1(t) + b_{0,0}(t)\,\vartheta(t),
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2$ и $y(t) = y_0(t)$ — фиксированная функция при $t_0 - \tau_2 \leqslant t \leqslant t_0$

Коэффициенты в (3.18) выражаются через коэффициенты (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{j,i}(t) &= -\alpha_{j,i-1}(t), \quad j = 0, 1, 2; \qquad i = 1, 2\\
b_{0,0}(t) &= \beta_2(t);\\
b_{1,0}(t) &= \beta_1(t) - \alpha_{0,1}(t)\,\beta_2(t) - 2\frac{d\beta_2(t)}{dt};\\
b_{2,0}(t) &= \beta_0(t) + \alpha_{0,1}(t)\left[2\frac{d\beta_2(t)}{dt} + \alpha_{0,1}(t)\,\beta_2(t) - \beta_1(t)\right] +\\
&\quad + \beta_2(t)\left[\frac{d\alpha_{0,2}(t)}{dt} - \alpha_{0,0}(t)\right] - \frac{d\beta_1(t)}{dt} + \frac{d^2\beta_2(t)}{dt^2};
\end{aligned}$$

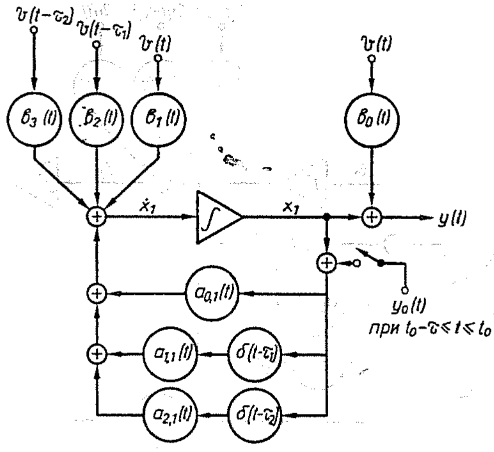

Рис. 6

$$b_{1,1}(t) = \alpha_{1,1}(t)\,\beta_2(t-\tau_1);$$

$$b_{2,1}(t) = \alpha_{0,1}(t)\,\alpha_{1,1}(t)\,\beta_2(t-\tau_1) + \alpha_{1,1}(t)\Big[\,2\,\frac{d\beta_2(t-\tau_1)}{dt} + \alpha_{0,1}(t-\tau_1)\,\beta_2(t-\tau_1) - \beta_1(t-\tau_1)\Big] + \beta_2(t-\tau_1)\left[\frac{d\alpha_{1,1}(t)}{dt} - \alpha_{1,0}(t)\right];$$

$$b_{1,2}(t) = -\,\alpha_{2,1}(t)\,\beta_2(t-\tau_2);$$

$$b_{2,2}(t) = \alpha_{0,1}(t)\,\alpha_{2,1}(t)\,\beta_2(t-\tau_2) + \alpha_{2,1}(t)\Big[\,2\,\frac{d\beta_2(t-\tau_2)}{dt} + \alpha_{0,1}(t-\tau_2)\,\beta_2(t-\tau_2) - \beta_1(t-\tau_2)\Big] + \beta_2(t-\tau_2)\left[\frac{d\alpha_{2,1}(t)}{dt} - \alpha_{2,0}(t)\right];$$

$$b_{2,3}(t) = \alpha_{1,1}(t)\,\alpha_{1,1}(t-\tau_1)\,\beta_2(t-2\tau_1);$$

$$b_{2,4}(t) = \alpha_{2,1}(t)\,\alpha_{2,1}(t-\tau_2)\,\beta_2(t-2\tau_2);$$

$$b_{2,5}(t) = [\alpha_{1,1}(t)\alpha_{2,1}(t-\tau_1) + \alpha_{1,1}(t-\tau_2)\alpha_{2,1}(t)]\beta_2(t_1-\tau_1-\tau_2).$$

Структурная схема моделирования (3.18) представлена на рис. 7.

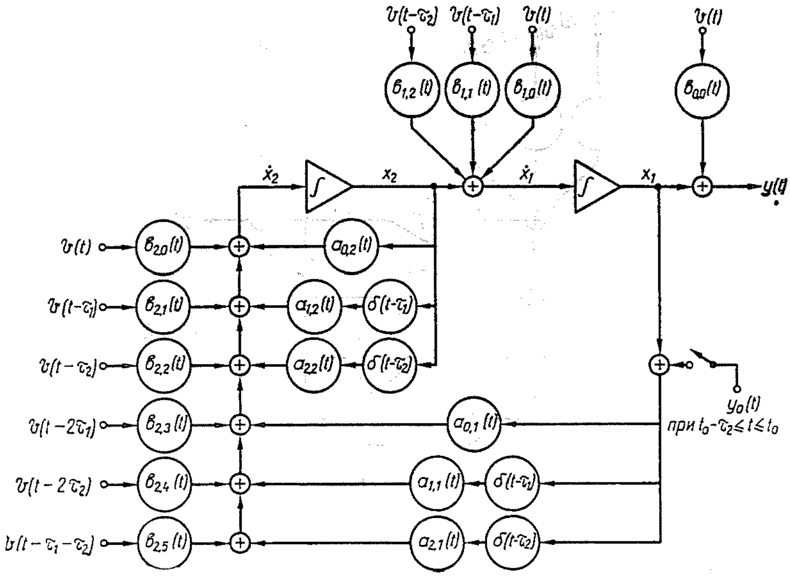

Рис. 7

Выводы

В данной работе получены алгоритмы структурных преобразований линейных систем автоматического регулирования с переменными параметрами. Рассмотрены случаи систем без запаздывания и систем с запаздыванием. Полученные алгоритмы перехода от одномерного описания системы к описанию в пространстве состояний можно использовать при моделировании этих систем на аналоговых и цифровых вычислительных машинах.

Резюме

При моделировании линейных систем автоматического регулирования с переменными параметрами (нестационарных систем) на аналоговых и цифровых вычислительных машинах наиболее предпочтительным описанием этих систем является описание в пространстве состояний. Данная работа посвящена получению алгоритмов перехода от одномерного описания системы к описанию этой системы в пространстве состояний. Рассмотрены случаи систем без запаздывания и систем с запаздыванием. Предложенные алгоритмы расширяют возможности структурных преобразований нестационарных систем на аналоговых и цифровых вычислительных машинах.

Литература

1. П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. Пространство состояний в теории управления (для инжнеров). «Наука», Москва, 1970.
2. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. «Наука», Москва, 1971.
3. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Элсгольц Л. Э. Математические основы управляемых систем. «Наука», Москва, 1969.

В. М. Малашенко Н 1521 Будапешт