EINIGE BEMERKUNGEN ZUR FREIHEITSGRADREDUKTION VON LINEAR-ELASTISCHEN MECHANISCHEN MODELLEN

Von

GY. CZEGLÉDI

Forschungsgemeinschaft der Lehrstühle für Technische Mechanik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 5. März, 1975.)

(Vorgelegt von Prof. Dr. Á. BOSZNAY)

1. Einleitung

Die dynamischen Eigenschaften von Maschinen und Einrichtungen können, entsprechend einem bestimmten gesetzten Ziel, an geeignet gewählten mathematischen Modellen untersucht werden. Die Technik der Modellfindung soll hier nicht näher behandelt werden, das Augenmerk wird auf das gewählte Modell gerichtet.

Bei den Untersuchungen erscheint es oft nicht zweckmäßig, mit sämtlichen Freiheitsgraden des Modells zu arbeiten. Die Zahl der in Rechnung gestellten Freiheitsgrade darf kleiner als die Zahl der Freiheitsgrade des Modells sein. Im weiteren soll der Begriff der Freiheitsgradreduktion in diesem Sinne benutzt werden, was selbstverständlich keine Änderung der wirklichen Anzahl der Freiheitsgrade des Modells bedeutet.

Die Reduktion wird für Modelle mit endlichen bzw. unendlichen Freiheitsgraden durch unterschiedliche Gründe gerechtfertigt.

Im ersteren Fall sind in der Regel Bequemlichkeitsrücksichten vorherrschend oder man will die Zusammenhänge, die das physikalische Wesen des Problems besser beleuchten, stärker herausstellen. Es ist weiterhin wesentlich, daß die Aufgabe, die sämtliche Freiheitsgrade enthält, immer aufgestellt werden kann, und oft wird die Freiheitsgradreduktion an dieser mit Hilfe von mathematischen Operationen durchgeführt. Ein derartiges Beispiel soll in Abschnitt 3 gezeigt werden.

Bei Modellen mit unendlichen Freiheitsgraden ist die exakte Formulierung der sämtliche Freiheitsgrade enthaltenden Aufgabe aus rechentechnischen Gründen nicht möglich. Nur die Formulierung der Aufgabe mit Freiheitsgradreduktion ist möglich, daher stößt man immer wieder auf die später ausführlich darzulegenden Schwierigkeiten.

2. Modelle mit endlichen Freiheitsgraden

Der Freiheitsgrad des untersuchten ungedämpften, linear elastischen Modells sei N. Das Modell sei durch äußere Sinuskräfte mit der Kreisfrequenz ω der Zahl N erregt, deren Amplituden in einen Kraftwirkungsvektor f mit reellen Elementen zusammengefaßt werden. Die auf Wirkung von f entstehenden Verschiebungen in einem Vektor x geordnet, läßt sich die Bewegungsgleichung des Modells mit den die Elastizitäts- und Massenkennwerte des Systems enthaltenden quadratischen Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}$ in der wohlbekannten Form anschreiben:

$$\mathbf{M}\ddot{x} = -\mathbf{C}x + f \sin \omega t\,. \tag{1}$$

Wir nehmen an, daß die Differentialgleichung (1) eine Lösung der Form $x = s \sin \omega t$ hat, wo s die Amplituden der Sinusverschiebungen enthält. Nach Einsetzen und Kürzung mit $\sin \omega t$ lautet die Gl. (1):

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\, s = f\,; \tag{2}$$

die Matrizen N-ter Ordnung $\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}$ sind symmetrisch und positiv definit und haben reelle Elemente. Wir wollen die Bezeichnung

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \tag{3}$$

einführen, wo $\mathbf{S}$ die sog. dynamische Steifigkeitsmatrix des Modells darstellt:

$$\mathbf{S}s = f\,. \tag{4}$$

Da die Zahl der Elemente von s mit den Freiheitsgraden N des Modells übereinstimmt, ist $\mathbf{S}$ die *volle dynamische Steifigkeitsmatrix*, deren Elemente lineare Funktionen von ω^2 sind.

Im Falle von $\det \mathbf{S} \neq 0$ läßt sich auch die inverse Beziehung von (4) herstellen:

$$s = \mathbf{F}\, s.$$

wo $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1}$, die *volle dynamische Deformationsmatrix* ist.

Bei freier Schwingung ist in (4) $f = O$, die Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen ω bedeutet die Lösung des wohlbekannten linearen Eigenwertproblems

$$\mathbf{S}\, s = O. \tag{5}$$

Wird der den absoluten Ruhestand bedeutende Fall $s = O$ daraus ausgeschlossen, erhält man die Frequenzgleichung

$$\det \mathbf{S} = 0. \tag{6}$$

Gemäß den genannten Eigenschaften von **C** und **M** hat Gl. (6) für ω^2 N reelle positive Wurzeln, deren Menge alle Quadrate der Eigenkreisfrequenzen des gewählten Modells, so auch seine Eigenfrequenzen liefert.

Im weiteren soll der Fall geprüft werden, wo der Vektor f nur n von Null unterschiedliche Elemente hat ($n < N$), und diese seien zu einem Vektor q zusammengefaßt. Durch Zeilen- und Spaltenwechsel wird (4) in folgender Weise partitioniert:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ O \end{bmatrix}, \tag{7}$$

oder

$$\mathbf{S}_{11}\, u + \mathbf{S}_{12}\, v = q \tag{7a}$$

$$\mathbf{S}_{21}\, u + \mathbf{S}_{22}\, v = O\,. \tag{7b}$$

wo q und u Vektoren n-ter Ordnung sind und der Vektor v N-n-ter Ordnung zu dem Nullvektor O gleicher Ordnung gehört. Wenn nur die Verschiebungsamplituden an den Orten der Erregung von Interesse sind, erhält man bei det $\mathbf{S}_{22} \neq 0$ aus Gl. (7b) v ausgedrückt und in (7b) eingesetzt

$$(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\, \mathbf{S}_{22}^{-1}\, \mathbf{S}_{21})\, u = q, \tag{7c}$$

oder in kürzerer Form

$$\mathbf{S}_r\, u = q, \tag{8}$$

wo $\mathbf{S}_r = \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\, \mathbf{S}_{22}^{-1}\, \mathbf{S}_{21}$ die *reduzierte dynamische Steifigkeitsmatrix* ist. Neben der Erfüllung der Relation det $\mathbf{S}_r \neq 0$ besteht auch die inverse Beziehung von (8)

$$\mathbf{Q}_r q = u, \tag{9}$$

wo $\mathbf{Q}_r = \mathbf{S}_r^{-1}$ die *reduzierte dynamische Deformationsmatrix* ist.

Mit Hilfe von (9) erhält man eine direkte Beziehung zwischen den Amplituden der sinusförmigen Erregerkraftwirkungen und den Amplituden der sinusförmigen Verschiebungen an den Erregungsorten. Dasselbe läßt sich selbstverständlich auch anhand der inversen Beziehung von (4) errechnen, dann wäre jedoch das erhaltene Ergebnis nicht so augenfällig.

Die Gleichungen (8) und (9) enthalten von den N Freiheitsgraden des Modells nur n in expliziter Form. Daher kann die mit diesen zusammenhängende Aufgabe als reduziert bezeichnet werden. Sollen die Eigenkreisfrequenzen bestimmt werden, erhält man in (8) $q = O$ eingesetzt die Gleichung

$$\mathbf{S}_r\, u = O. \tag{10}$$

Die Gleichheit kann in zwei verschiedenen Weisen erfüllt werden: entweder

$$\det S_r = 0, \tag{11a}$$

oder

$$u = 0. \tag{11b}$$

Nun kann auch bei Gültigkeit der letzten Gleichung Schwingung vorhanden sein, weil u nicht sämtliche Freiheitsgrade des Modells enthält. Diese Frequenzen können — wenn solche existieren — aus den mit den Substitutionen $u = 0$ und $q = 0$ angeschriebenen Gleichungen (7a)—(7b) berechnet werden. Es ist jedoch überflüssig, so zu verfahren, weil dieses Vorgehen viel zusätzlichen Rechenaufwand erfordert. Im übrigen ist leicht einzusehen, daß bei $u = 0$ S_r nicht erklärt ist.

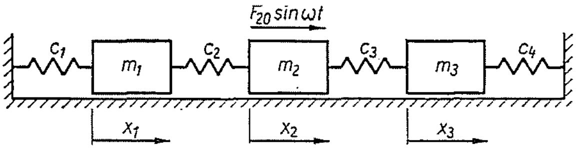
Gesetzt den Fall, daß die ursprüngliche Aufgabe nicht bekannt ist, nur die reduzierte. Als Frequenzgleichung steht also nur (11a) zur Verfügung. Aus der Deutung von S_r in (7c) ist zu erkennen, daß die Elemente keine linearen Funktionen von ω^2 mehr sind, sondern als Quotienten aus den Polynomen von ω^2 zu errechnen sind, wo die höchste Gradzahl im Zähler $N-n+1$, im Nenner $N-n$ ist. Die numerische Lösung der Frequenzgleichung ist aber keine leichte Aufgabe. Praktisch wird meistens die sog. schrittweise Technik angewandt, nach der zu in gewissen Schrittintervallen angesetzten ω-Werten die Vorzeichen der Determinantenfunktion ermittelt und nach den Vorzeichenänderungen die Nullstellen der Funktion bestimmt werden. Technische Schwierigkeiten werden durch die stellenweise hohe Wertänderungsgeschwindigkeit, die Pole der Funktion verursacht. Bei automatischem Durchrechnen muß besonders untersucht werden, ob die Funktion bei Vorzeichenumkehr eine Nullstelle oder Diskontinuität hat.

Die Ordnungszahlreduktion besitzt eine spezifische Eigenschaft. Bei der Berechnung mit der reduzierten dynamischen Steifigkeitsmatrix können in der Eigenfrequenzmenge »Lücken« zurückbleiben, d. h. Gl. (11a) ergibt nicht sämtliche Eigenfrequenzen. Man könnte erwarten, daß die fehlenden aus (11b) ermittelt werden können, obwohl dazu die volle dynamische Steifigkeitsmatrix bekannt sein muß.

Im allgemeinen liefert jedoch auch Gl. (11b) nur die triviale Lösung, d. h. sie ergibt zusammen mit $u = 0$ $v = 0$. Sie hat nur dann auch eine nichttriviale Lösung, wenn eine Eigenfrequenz existiert, zu der eine Schwingungsform gehört, wo die Amplituden der Koordinaten in u gleich Null sind. Ob dieser Ausnahmefall besteht, läßt sich jedoch in der Regel vor der endgültigen Lösung der Aufgabe nicht erkennen.

3. Ein einfaches Beispiel

Um die genannten Eigenschaften der reduzierten Aufgabe zu zeigen, wurde ein einfaches Zahlenbeispiel ausgearbeitet. Abb. 1 zeigt die wohlbekannte Schwingungskette mit 3 Freiheitsgraden. Auf die zweite Masse wirkt eine Sinuserregung mit der Amplitude F_{20}. Die Untersuchung wird nach dem in Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren begonnen. Die konkrete Aufstellung



$m_1 = 3\ \mathrm{kp\,s^2 m^{-1}}$ $c_1 = 1 \cdot 10^2\ \mathrm{mkp^{-1}}$
$m_2 = 2$ " $c_2 = 0{,}5 \cdot 10^2$ "
$m_3 = 1{,}5$ " $c_3 = 2 \cdot 10^2$ "
$c_4 = 1 \cdot 10^2$ "

Fig. 1

der Bewegungsgleichung der Form (1) weggelassen, lautet die der Gl. (4) entsprechende Gleichung

$$\mathbf{S}\, s = f, \tag{12}$$

wo

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - m_1\omega^2 & -\frac{1}{c_2} & 0 \\ -\frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - m_2\omega^2 & -\frac{1}{c_3} \\ 0 & -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} - m_3\omega^2 \end{bmatrix},$$

$$s = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{20} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Aufgabe (12) enthält sämtliche Freiheitsgrade des Modells. Im weiteren wird eine Freiheitsgradreduktion in der Weise durchgeführt, daß die erste Komponente des Amplitudenverteilungsvektors s eliminiert wird. Nach den bereits beschriebenen mathematischen Umformungen erhält man eine der Gl. (8) entsprechende Gleichung, also

$$\mathbf{S}_r\, u = q,$$

wo im vorliegenden Fall

$$u = \begin{bmatrix} x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} F_{20} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$a_{11} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - m_2\omega^2 - \left(\frac{1}{c_2}\right)^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - m_1\omega^2\right)^{-1},$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{c_3},$$

$$a_{22} = \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} - m_3\omega^2 .$$

Bei freier Schwingung ist $q = O$, die Eigenkreisfrequenzen können aus der Frequenzgleichung

$$\det \mathbf{S}_r = 0 \tag{13}$$

bestimmt werden. Der mit den zahlenmäßigen Daten in Abb. 1 erhaltene Wertverlauf der Determinantenfunktion (13) in Abhängigkeit von ω ist in Abb. 2 dargestellt. Aus dem Diagramm ist zu erkennen, daß die Funktion zwei Nullstellen hat: $\omega_1 = 5\ \mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_2 = 10\sqrt{2}\ \mathrm{s}^{-1}$. Bei $\omega = 10$ ist die Funktion nicht erklärt und bei $\omega > 10\sqrt{2}$ gilt $\det \mathbf{S}_r > 0$. Aus Gl. (13) kann eine der Eigenkreisfrequenzen des Modells mit 3 Freiheitsgraden nicht berechnet werden. Nach Gl. (12) ist leicht einzusehen, daß auch die Bedingung $u = O$ ($x_{20} = 0$, $x_{30} = 0$) nur die triviale Lösung liefern würde, d. h. $x_{10} = 0$.

Bei einer weiteren Freiheitsgradreduktion wird in Gl. (12) auch das dritte Element von s, x_{30} eliminiert. Dadurch werden sowohl der Vektor u als auch der Vektor q nur je ein einziges Element haben, damit erhält man eine direkte Beziehung zwischen der Erregeramplitude F_{20} und der Schwin-

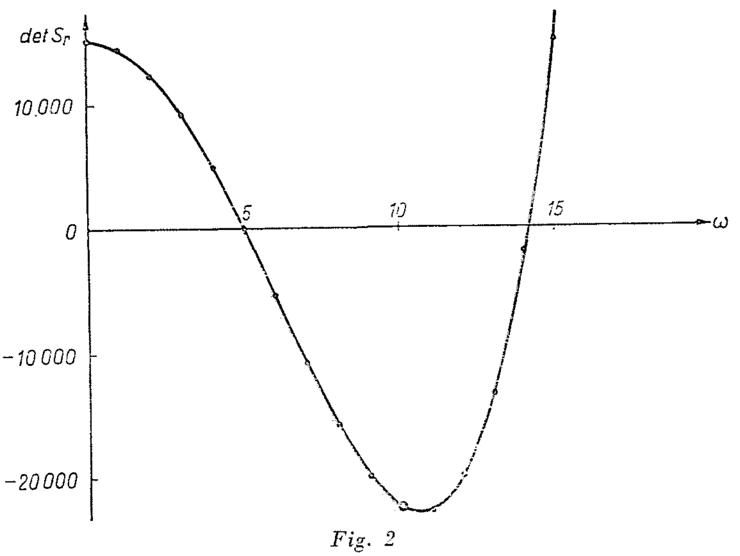


Fig. 2

gungsamplitude der zweiten Masse. Aus der Matrizengleichung (8) wird eine Skalargleichung:

$$S_r\, x_{20} = F_{20},$$

wo

$$S_r = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - m_2\omega^2 - \left(\frac{1}{c_2}\right)^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - m_1\omega^2\right)^{-1} - \\ - \left(\frac{1}{c_3}\right)^2 \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} - m_3\omega^2\right)^{-1},$$

oder wenn x_{20} ausgedrückt wird,

$$x_{20} = \frac{1}{S_r} F_{20}\,.$$

Der Verlauf von S_r in Abhängigkeit von ω ist in Abb. 3 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß bei $\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ die zweite Masse auch bei einer beliebig großen Erregerwirkung im Ruhezustand verbleibt, weil an dieser Stelle die Funktion S_r unendlich wird.

Bei freier Schwingung ist $F_{20} = 0$ und damit auch

$$S_r\, x_{20} = 0.$$

Die Gleichung kann auch in diesem Fall auf zweierlei Art befriedigt werden, entweder

$$S_r = 0, \tag{14a}$$

oder

$$x_{20} = 0. \tag{14b}$$

Aus (14a) können dieselben beiden Eigenkreisfrequenzen des Systems mit 3 Freiheitsgraden wie früher, d. h. $\omega_1 = 5\ \mathrm{s}^{-1}$ und $\omega_2 = 10\sqrt{2}\ \mathrm{s}^{-1}$, ermittelt werden (siehe Abb. 3). Im vorliegenden Falle führt auch die Gl. (14b) zu einem Ergebnis, weil sich aus Gl. (12) $\omega_3 = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ ergibt; bei dieser Frequenz sind die Funktionen in den Abbildungen 2 und 3 nicht erklärt.

Auch aus den Abbildungen 2 und 3 ist ersichtlich, daß die Eigenschaften der Determinantenfunktionen durch die durchgeführte Freiheitsgradreduktion stark beeinflußt werden. Aus den Polen der Funktionen bzw. aus der Existenz derselben dürfen keine weitgehenden Schlußfolgerungen gezogen werden, da Pole nicht nur bei im Laufe der Berechnung weggelassenen Eigenfrequenzen vorhanden sein können, worauf im nächsten Abschnitt hingewiesen wird.

Zusammenfassend darf festgestellt werden, daß es sich empfiehlt, bei Modellen mit endlichen Freiheitsgraden immer mit sämtlichen Freiheits-

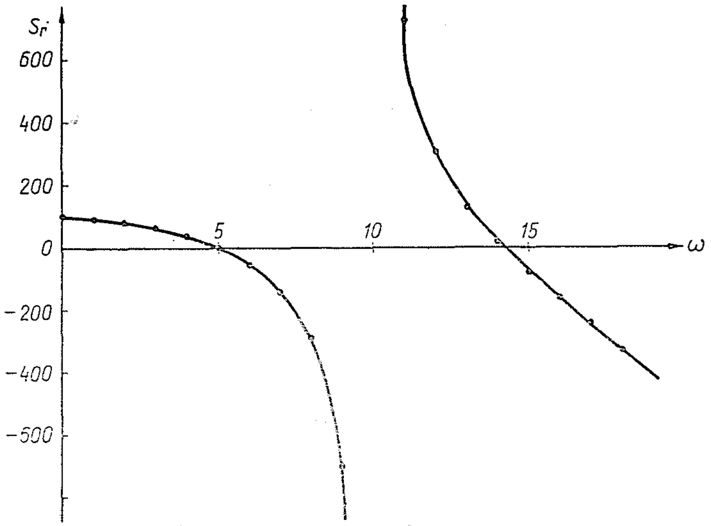


Fig. 3

graden, also mit der vollen dynamischen Steifigkeits- bzw. Deformationsmatrix zu arbeiten, da die Freiheitsgradreduktion zu Lücken in der Frequenzmenge führen kann. Für ein Modell mit unendlichen Freiheitsgraden ist es unmöglich, die sämtliche Freiheitsgrade erfassenden (vollen) dynamischen Matrizen aufzuschreiben, daher ist man gezwungen, deren reduzierte Formen anzuwenden, die jedoch mit den erwähnten Lücken behaftet sind.

4. Modelle mit unendlichen Freiheitsgraden

Der Freiheitsgrad der Kontinuummodelle ist unendlich. Eine der möglichen Näherungsmethoden zur Schwingungsuntersuchung von komplizierteren Kontinua ist die folgende. Das Modell wird mit Hilfe von Knotenpunkten in Teile zerlegt, die sich durch Anschlußpunkte an die Knotenpunkte anschließen, wobei die Feldfunktionen zur Beschreibung der freien oder der bei stationärem Zustand erregten Schwingungen dieser Teile zur Verfügung stehen und einfacher als die ursprünglichen sind. Mit Hilfe der Feldfunktionen können die Verschiebungen und Verdrehungen der Anschlußpunkte, die die Folgen der Sinuskraftwirkungen mit der Kreisfrequenz ω sind, welche wiederum auf die Anschlußpunkte wirken und in Hinsicht auf den betreffenden Teil äußere sind, bestimmt werden. In dieser Phase des Verfahrens wurde die Freiheitsgradreduktion durchgeführt, in den Gleichungen steht im weiteren nämlich nur der Freiheitsgrad der Anschlußpunkte. Nach Aufstellung der Anschlußbedingungen zwischen den Teilen wird folgende Gleichung angesetzt:

$$\mathrm{S}_k\, s = f,$$

wo S_k die dynamische Steifigkeitsmatrix ist, während s die sinusförmigen Verschiebungsamplituden der Knotenpunkte und f die Amplituden der äußeren Sinuskraftwirkungen auf die Knotenpunkte enthalten.

Bei freier Schwingung ist $f = 0$, daher kann die Eigenfrequenz des Modells aus der Frequenzgleichung

$$\det S_k = 0 \tag{15}$$

errechnet werden. S_k ist aus den reduzierten dynamischen Steifigkeitsmatrizen der Teile aufgebaut, daher kann die aus (15) berechnete Eigenfrequenzmenge Lücken enthalten. Die dynamische Steifigkeitsmatrix eines Teils — so auch S_k — ist nämlich bei den Kreisfrequenzen nicht erklärt, wo bei der Schwingung alle Anschlußpunkte des Teils im Ruhezustand sind. Hat das Modell eine mit dem genannten ω zusammenfallende Eigenfrequenz, so kann diese aus (15) nicht berechnet werden.

Von W. H. Wittrick und F. W. Williams wurde zur Bestimmung der ausfallenden Eigenkreisfrequenzen eine Methode empfohlen [1]. Die allgemeine Brauchbarkeit dieses Verfahrens wird jedoch durch die mangelhafte prinzipielle Untermauerung einzelner Teile der Theorie in Frage gestellt [2].

Auch mit Hilfe der Feldgleichungen des durch Knotenpunkte zerlegten Modells können dynamische Untersuchungen durchgeführt werden. Das Wesen des Verfahrens besteht darin, daß es ohne Freiheitsgradreduktion mit Hilfe der für die Anschlußpunkte angeschriebenen Übergangs- und Gleichgewichtsgleichungen sowie der Randbedingungen des Modells die Feldgleichungen zueinander in Beziehung bringt, wodurch ein lineares algebraisches Gleichungssystem ermöglicht wird, in dessen Koeffizientenmatrix die Elemente trigonometrische, jedoch keine Bruchfunktionen der Kreisfrequenz ω der Schwingung sind. Bei der Berechnung der Eigenfrequenzen ist des Gleichungssystem homogen, die Determinantenfunktion in der Frequenzgleichung ist eine stetige Funktion von ω. Die numerischen Schwierigkeiten, die bei der Berechnung mit dynamischen Matrizen vorliegen, stellen sich hier nicht ein, die Frequenzmenge weist keine Lücken auf. Die Anwendung dieser Methode auf ein räumliches Stabwerk wurde in [3] behandelt.

Abschließend sei es mir gestattet, Herrn Prof. Dr. Ádám Bosznay meinen Dank auszusprechen, der durch seine wertvollen Ratschläge meine Arbeit förderte.

Zusammenfassung

Der Freiheitsgrad in den Berechnungen darf den Freiheitsgrad des für die dynamische Analyse von Maschinen und Einrichtungen gebräuchlichen mathematischen Modells unterschreiten. Im Beitrag wird der Begriff der Freiheitsgradreduktin in diesem Sinne benutzt.

Während die Freiheitsgradreduktion bei einem Modell mit endlichen Freiheitsgraden vor allem durch Bequemlichkeitsrücksichten gerechtfertigt wird, ist es gar nicht möglich, für Modelle mit unendlichen Freiheitsgraden die sämtliche Freiheitsgrade enthaltenden Gleichungen konkret aufzustellen. Die Reduktion verursacht jedoch bei den dynamischen Berechnungen — besonders bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen — gewisse Schwierigkeiten. Der Verfasser weist auf deren Ursachen und auf die etwaige Möglichkeit der Umgehung hin. Zur Veranschaulichung der theoretischen Ausführungen wird ein Zahlenbeispiel angeführt.

Literatur

1. WITTRICK, W. H.—WILLIAMS, F. W.: A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XXIV, Pt. 3 (1971) S. 263—284
2. SZERVÁNSZKY, GY.: Einige Bemerkungen zur Eigenfrequenzberechnung von elastischen Kontinua.* I. Forschungsgemeinschaft der Lehrstühle für Technische Mechanik an der TU Budapest. Material einer Wissenschaftlichen Tagung, 1974, Budapest, S. 215—220.
3. CZEGLÉDI, GY.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen von Stabwerken. Per. Pol. Electrical Engineering, Vol. 18. H. 2. S. 191—202

Gyula CZEGLÉDI, H-1521. Budapest

* In ungarischer Sprache