# НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Ф. ЧАКИ

Кафедра Автоматизации Будапештского Технического Университета

Поступило: 10 июля 1973 г.

Как известно, в промышленных объектах мы часто сталкиваемся с многомерными системами. Примерами таких систем являются доменные печи, котлы, реакторы, дистилляционные колонны, колонны ректификации и т. д. В транспорте также имеется большое количество многомерных систем, например — корабли и самолеты. Этими обстоятельствами объясняется значение управления многомерными системами.

На значение многомерных систем указывает и тот факт, что Международным Комитетом по Автоматике, ИФАК, были организованы два симпозиума по этой тематике, в г. Дюссельдорф, в 1968 и 1971 г. г. В СССР также было организовано несколько конференций.

Теория управления многомерными системами развивается уже в течение двух десятилетий. В этой области первые работы были опубликованы лет 15—16 назад Мееровым, Мезаровичем, Каванагом. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы дать обзор главных направлений развития теории многомерных систем. Мы не сможем касаться здесь подробностей, так как объем специальной литературы по многомерным системам достигает объема небольшой библиотеки.

## 1. Методы многомерных систем

Перед тем как перейти к обсуждению анализа и синтеза многомерных систем, сначала дается определение многомерных систем. Многомерной называется система, имеющая более чем один вход (минимум два) и более чем один выход (минимум два). В то же время многомерная система представляет собой многократно связанную систему потому, что совокупность нескольких одномерных систем, независимых друг от друга, нельзя рассматривать как многомерную систему.

Многомерные системы могут быть недоопределенные, определенные и предопределенные, в зависимости от того, что количество входных сигналов меньше, равно или больше, чем количество выходных сигналов и переменных. Если об этом не оговорено отдельно, в настоящей работе рассматриваются определенные системы, при необходимости другие две системы отмечаются особо.

Для обсуждения проблем многомерных систем самым общим оказывается метод пространства состояний. В принципе, метод пространства состояний приемлем для обсуждения нелинейных, линейных систем и систем с изменяющимися параметрами. В самом общем случае уравнения состояний нелинейной непрерывной системы с изменяющимися параметрами имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор входных переменных, $\mathbf{y}$ — вектор выходных переменных, $\mathbf{x}$ — вектор состояний, $t$ — время, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — соответствующие однозначные нелинейные функции. Первое уравнение представляет собой векторное дифференциальное уравнение, а второе — так называемое выходное или дополнительное уравнение, обычное уравнение (если нелинейная система имеет постоянные параметры, то переменная $t$ не присутствует явно в функциях $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$). В том случае, когда система является линейной и имеет переменные параметры, уравнения состояний выражаются в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ соответствующие матрицы с соответствующими параметрами. Наконец, уравнения состояний линейной системы с постоянными коэффициентами имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ представляют собой матрицы с постоянными элементами.

В последнем случае имеется возможность для описания многомерной системы с помощью передаточной матрицы. Соотношение выражается следующим уравнением:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{W}(p)\mathbf{U}(p) \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{Y}(p)$ является преобразованием Лапласа выходного вектора $\mathbf{y}(t)$. Вектор $\mathbf{U}(p)$ является преобразованием Лапласа входного вектора $\mathbf{u}(t)$, а $\mathbf{W}(p)$ — передаточная матрица. Элементы передаточной матрицы представляют собой передаточные функции.

Передаточная матрица $\mathbf{W}(p)$ может быть определена на основе преобразования Лапласа уравнений состояний (3), как это показано в следующей формуле:

$$\mathbf{W}(p) = \mathbf{C}[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Подобно вышеуказанному дается уравнение состояний дискретных систем, которые в случае нелинейной системы с переменными параметрами имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}^*(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}^*(\mathbf{x}_k, u_k, k) \end{aligned} \tag{6}$$

Первое уравнение является разностным уравнением, а второе — обычное уравнение (если параметры системы постоянные, то переменная, обозначающая точку времени $t_k$ в нелинейных однозначных функциях $\mathbf{f}^*$ и $\mathbf{g}^*$, отдельно не присутствует).

Уравнения состояний дискретной системы, зависящей от времени, выражаются в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k^*\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k^*\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k^*\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k^* u_k \end{aligned} \qquad (7$$

Наконец, уравнения состояний дискретной системы с постоянными коэффициентами имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k^*\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k^*\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k^*\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k^*\mathbf{u}_k \end{aligned} \tag{8}$$

Дискретные многомерные системы могут быть описаны с помощью преобразования — $z$:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{U}(z) \tag{9}$$

где вектором $\mathbf{Y}(z)$ обозначается преобразование — $z$ вектора $\mathbf{y}(t)$, а вектором $\mathbf{U}(z)$ — преобразование — $z$ вектора $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{W}(z)$ представляет собой импульсную передаточную матрицу, элементы которой являются импульсными передаточными функциями.

Импульсная передаточная функция выражается на основе уравнений состояний (8) с помощью преобразования — $z$ в следующей форме:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{C}^*[z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*]^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^* \tag{10}$$

На основе сравнения уравнений (3) и (4), (8) и (9) получаем вывод, что для обсуждения линейных многомерных систем с постоянными коэффициентами имеются по два метода как для непрерывного, так и для дискретного случая.

Подчеркивается, что два метода равноценны между собой только в том случае, если многомерная система полностью наблюдаема и полностью управляема. Если в многомерной системе имеются неуправляемые и ненаблюдаемые подсистемы, то передаточной функцией выражаются свойства полностью наблюдаемой и управляемой подсистемы целой многомерной системы.

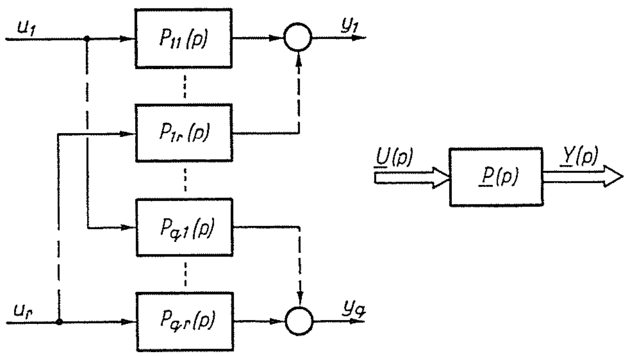
В настоящей работе рассматривается развитие обоих методов. В первую очередь внимание концентрируется на непрерывных системах, так как имеется существенная аналогия по виду между уравнениями непрерывных и дискретных систем, как это видно на основе сравнения формул (1) . . . (5) и (6) . . . (10), кроме того легко перенести выводы о непрерывных системах на дискретные системы. В то же время это не означает, что дискретные системы — особенно в связи с широким распространением ЦВМ — не имеют такое же или даже большее значение, чем непрерывные системы.

## 2. Развитие метода передаточной матрицы

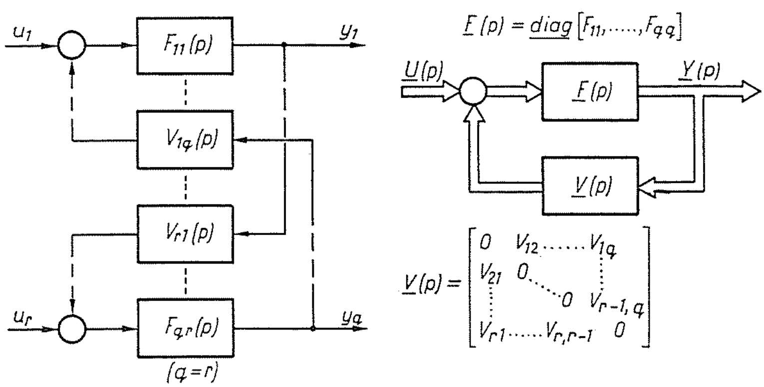
В области теории многомерных систем впервые был сформулирован метод передаточной матрицы. Хотя этот метод приемлем преимущественно только для линейных систем, не зависящих от времени, все-таки с помощью этого метода различные методы вычисления, известные из теории одномерных систем могут, быть перенесены на область многомерных систем путем несложных обобщений. Именно в этом и заключается большое преимущество данного метода. Действительно, на матрицах формально расчеты могут быть проведены таким же образом, как и на скалярных величинах, только обязательно следует соблюдать последовательность действий, т. к. коммутативное правило вообще не действительно для матриц. По моим сведениям, матричное исчисление впервые было применено Каванагом для исследования многомерных систем.

В отношении многомерных систем, как самый первый вопрос, возникает проблема структуры. Этот вопрос не имеет значения в одномерных системах, т. к. об одномерных системах всегда предполагается, что они имеют направленный характер, т. е. входной сигнал действует на выходной сигнал, но со стороны выходного сигнала нет никакого обратного влияния. В многомерных системах возникает проблема структуры, так как имеется такая возможность, что некоторые выходные параметры воздействуют на другие выходные сигналы, и, таким образом, могут возникать внутренние соединения. Если рассматривать многомерную систему как «черный ящик», то следует подчеркнуть, что путем наблюдения входных и выходных сигналов нельзя сделать никаких выводов о структуре системы. Наоборот, структура предполагается априорно заданной.

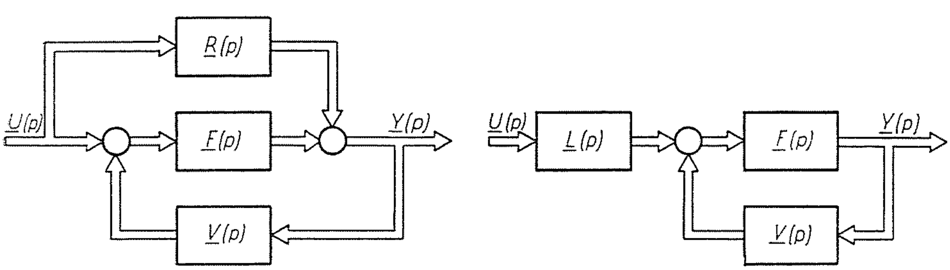
В работах Мезаровича структуры многомерных систем подразделяются на три группы (см. рис. 1, 2 и 3).




*Фиг. 1*




*Фиг. 2*




*Фиг. 3*

К первой группе принадлежит т. н. П-каноническая структура. При такой структуре каждый входной сигнал через передаточный элемент действует на каждый выходной сигнал. Если в системе имеются $r$ входов и $q$ выходов, то количество передаточных функций будет равно: $r \times q$. (Вообще $r = q$). Обычно необходимо, чтобы передаточная функция была физически реализуема, т. е. чтобы порядок числителя ни в коем случае не превышал порядок знаменателя, а в более строгом случае — чтобы порядок числителя был меньше, чем у знаменателя. Часто ставится такое требование, чтобы передаточные звенья сами были устойчивы, чтобы их полюсы были расположены в левой части комплексной плоскости.

Вторым типом возможных структур является В-каноническая структура. При такой структуре предполагается, что первый входной сигнал через передаточное звено действует на первый выходной сигнал, второй входной сигнал через передаточное звено — на второй выходной сигнал, и т. д., в то же время исключается такая возможность, чтобы, например, первый входной сигнал действовал непосредственно на второй, третий и т. д. выходные сигналы, а вместо этого предполагается, что выходные сигналы влияют обратно на отдельные входы и присутствуют при возникновении данного выходного сигнала.

Третья группа называется Х-канонической структурой. Такая структура применяется в тех случаях, когда количество входных сигналов отличается от количества выходных сигналов, и поэтому нельзя применять В-каноническую структуру для описания всей системы. В этом случае часть системы представляет собой П-структуру, а другая — В-каноническую структуру.

Отметим, что при В- и Х-структурах нельзя предъявить требования присутствия исключительно физически реализуемых и устойчивых передаточных функций, так как эти структуры несколько искусственны, в то время как вся система может быть физически реализуема и устойчива в целом.

Основное уравнение П-структуры имеет следующий вид:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{P}(p)\mathbf{U}(p) \tag{11}$$

а уравнение В-структуры:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)[\mathbf{U}(p) + \mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)] \tag{12}$$

и наконец Х-структура выражается следующим соотношением:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{R}(p)\mathbf{U}(p) + \mathbf{F}(p)[\mathbf{U}(p) + \mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)] \tag{13}$$

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)[\mathbf{L}(p)\mathbf{U}(p) + \mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)] \tag{14}$$

Переход от В-структуры к П-структуре выражается следующими матричными уравнениями:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)\mathbf{U}(p) + \mathbf{F}(p)\mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)$$

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\,\mathbf{F}(p)\mathbf{U}(p)$$

а путем сравнения с ур. (11):

$$\mathbf{P}(p) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\,\mathbf{F}(p) \tag{15}$$

И наоборот, если переходить от П-структуры к Х-структуре, то уравнения приобретают следующую форму:

$$\mathbf{F}(p) = \mathbf{diag}\left[\frac{1}{M_{11}}, \frac{1}{M_{22}}, \ldots, \frac{1}{M_{nn}}\right] \tag{16}$$

где

$$\mathbf{M}(p) = \mathbf{P}^{-1}(p) \tag{17}$$

и

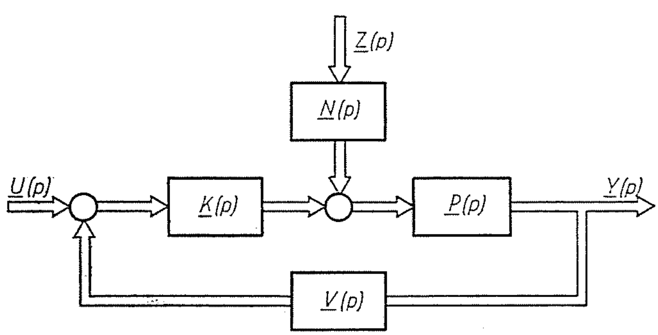
$$\mathbf{V}(p) = \mathbf{F}^{-1}(p) - \mathbf{P}^{-1}(p) \tag{18}$$

Особенно большое внимание было уделено советскими ученными вопросам неканонических структур. Сошлюсь на работы Меерова, Чинаева, Кулебакина, Петрова, Кухтенко и других. Например, в своей книге по данной тематике Чинаев рассматривает проблему: каким образом может быть применена теория четырехполюсников и многполюсников для описания многомерных систем.

Для анализа многомерных систем преимущественно могут быть применены результаты теории графов (сошлюсь здесь на книги Мишкина—Брауна и Шварца).

## 3. Синтез многомерных линейных систем

Синтез многомерных линейных систем с постоянными коэффициентами упрощается, если применять матричное исчисление. На рис. 4 представлена общая схема многомерной системы. Прежде чем переходить к обсуждению,




*Фиг. 4*

отметим, что в принципе имеются две возможности для изложения в зависимости от того, являются ли векторы параметров строчными матрицами или столбцовыми матрицами. Предыдущий вариант применялся Чаки, но последний (столбцовые векторы) применяется более часто, поэтому в настоящей работе мы используем для обозначения векторов столбцовые матрицы. Например, нетрудно описать связь между входными и выходным сигналами с помощью матричного исчисления в следующем виде:

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{I} + \mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\,\mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{U}(p) \tag{19}$$

или — соотношение между помехой и выходным сигналом представляется как

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{I} + \mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\,\mathbf{P}(p)\mathbf{N}(p)\mathbf{Z}(p) \tag{20}$$

В теории многомерных систем одной из главных проблем является проблема автономности, т. е. вопрос о том, каким образом следует включить соответствующий регулятор для того, чтобы осуществить разбиение многомерной системы на совокупность одномерных систем. Сама эта идея была выдвинута Боксембумом и Худом (для дифференциальных уравнений подобными проблемами занимался Вознесенский). Проблему автономности можно решить следующим образом. Для простоты предполагается, что матрица обратной связи $\mathbf{V}(p)$ представляет собой единичную матрицу, а в этом случае условием автономности является то, что матрица $\mathbf{P}(p)\,\mathbf{K}(p)$ должна быть диагональной. При заданной матрице $\mathbf{P}(p)$ элементы матрицы $\mathbf{K}(p)$ определяются на основе этого условия. К сожалению, ничем не обеспечивается физическая реализуемость и устойчивость элементов матрицы $\mathbf{K}(p)$. Поэтому и для того, чтобы регуляторы имели относительно простую конструкцию, обычно на практике стараются достичь не полной автономности, а только частичной. Тогда структура элементов матрицы $\mathbf{K}(p)$ предполагается предварительно известной, например, предполагается применение регуляторов типа ПИ или ПИД, и делается попытка определить параметры отдельных регуляторов при соблюдении вышеуказанного условия. Для решения задачи часто применяется моделирование на АВМ или ЦВМ. О проблемах автономности много работ публикуется и в настоящее время. Отметим, что для решения задачи автономности преимущественно применяется В-структура.

Для синтеза многомерных систем другим из основных вопросов является проблема устойчивости. В принципе решение об устойчивости системы может быть принято путем оценки полюсов детерминанта

$$\det \left| \mathbf{I} + \mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{V}(p) \right| \tag{21}$$

Много усилий сделано исследователями для того, чтобы обобщить методы исследования устойчивости, хорошо известные из теории одномерных систем (такие как амплитудно-фазовые характеристики или другие частотные методы), на круг вопросов многомерных систем.

Крупные результаты достигнуты советскими учеными в области теории инвариантности систем автоматического управления. Выявлены основные теоремы и соотношения и для многомерных систем. В отношении результатов в этой области здесь сошлюсь на книги Кулебакина, Петрова и Чинаева.

Также как и в теории одномерных систем, вопросы качества и обеспечение оптимальных переходных процессов являются важными проблемами в синтезе многомерных систем. Для этой цели преимущественно применяются интегральные критерии. Результаты, достигнутые в этой области, суммированы в работах Меерова и Чинаева.

В результате многосторонних исследований оказалось, что автономные системы не являются наилучшими с точки зрения критериев качества.

В области синтеза многомерных систем до сих пор существует большое количество открытых вопросов.

## 4. Стохастические системы

На основе главных работ Колмогорова и Винера проводятся исследования в широких областях по проблемам статистического синтеза систем автоматического управления. Напомню здесь работы Пугачева, Солодовникова и их учеников. В этой области при помощи матричного исчисления достигнуты основные результаты путем обобщения основных методов для многомерных систем. Насколько мне известно, впервые опубликовал работы в этой области Амара.

На основе применения матриц спектральной плотности мощности физически реализуемая оптимальная передаточная матрица выражается, например, в следующей форме:

$$W_m^T(p) = [\Phi_{uu}^+(p)]^{-1} \{[\Phi_{uu}^-(p)]^{-1} \Phi_{ui}(p)\}^+ \qquad (22)$$

В книге Ньютона, Гулда и Кэйзера представлена задача о полуопределенной структуре и полуопределенной структуре с ограничениями, а обобщения в этой задаче проведены Чаки.

В синтезе стохастических систем факторизация матрицы спектральной плотности мощности имеет основное значение. Такая задача весьма проста в одномерных системах, так как натрудно разделять правые и левые полюсы и нули. Спектральная факторизация матриц представляет собой существенно более сложную задачу. Для этой задачи достигнуты результаты Йула и Дэвисом. Фишер и Чаки данную задачу упростили без ослаблений в отношении математических условий. Затем метод был обобщен также для импульсных систем.

## 5. Преимущества и недостатки метода состояний

Для обсуждения теории многомерных систем имеется возможность применения метода пространства состояний. Для нелинейных систем это чуть ли не единственная возможность, кроме того этот метод преимущественно применяется и для многомерных систем с переменными коэффициентами. Для линейных систем переходный процесс описывается в следующем виде:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{23}$$

К сожалению, здесь вычисление переходной матрицы $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ далеко не является простой задачей. Если коэффициенты системы постоянны, то матрица является простой экспоненциальной матрицей, для определения которой известен ряд методов вычисления. В системе с переменными коэффициентами переходная матрица определяется приближенным интегрированием, с помощью ряда Неймана.

Во всяком случае, стоит уделить внимание формальной аналогии в уравнениях состояний линейных систем с постоянными и с переменными коэффициентами (а также в отношении методов их решения). В этом и заключается одно из преимуществ метода пространства состояний.

Следующим преимуществом метода пространства состояний считается то обстоятельство, что уравнения (2, (3) и (7), (8) состояний одинаково действительны как для многомерных, так и и для одномерных систем. Единственной разницей является то, что при одномерных системах четырехугольные матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{B}_k^*$ превращаются в столбцовые матрицы, а четырехугольные матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{C}_k^*$ — в строчные матрицы. Мы можем заключить, что путем применения метода пространства состояний одномерные и многомерные системы могут обсуждаться формально единым образом. Это — одно из самых главных преимуществ метода пространства состояний. В то же время естественно, что количество расчетов увеличивается, если рассматривать многомерные системы.

Преимуществом применения метода пространства состояний является и то, что с его помощью осуществление расчетов на ЦВМ будет более просто. Можно сказать, что именно после широкого распространения ЦВМ стало возможным применение метода пространства состояний во многих областях.

Недостатком метода пространства состояний является то, что обсуждение передаточных звеньев последовательного, параллельного соединений и соединения с обратной связью сложнее при использовании метода пространства состояний, чем обсуждение на основе передаточных матриц.

Среди недостатков метода пространства состояний следует отметить, что при увеличении числа переменных существенно возрастает количество присутствующих в методе матриц. Это заметно уже и в одномерном случае, так как, например, в системе $n$-го порядка возникает полином $n$-го порядка, с помощью которого расчеты проводятся проще, чем с помощью матриц $n \times n$, $n \times 1$ и $1 \times q$, присутствующих в методе пространства состояний.

При использовании метода пространства состояний существуют две важные проблемы. Первой из них является проблема управляемости и наблюдаемости систем. Эти понятия были определены Калманом. Ему и его ученикам удалось показать, что необходимым и достаточным условием управляемости, например в линейных системах с постоянными параметрами, является то, чтобы ранг гиперматрицы $\mathbf{H}$ типа $n \times nr$

$$\mathbf{H} \triangleq [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{24}$$

был равен $n$. Аналогичным образом, для того чтобы система была наблюдаема, необходимо и достаточно: ранг гиперматрицы $G$ типа $n \times nq$

$$\mathbf{G} \triangleq [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, \ldots, (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] \tag{25}$$

должен быть равен $n$.

Понятия управляемости и наблюдаемости были распространены на линейные системы с переменными коэффициентами, а также на нелинейные системы.

В связи с применением метода прстранства состояний другой основной проблемой является определение уравнений состояний некоторой заданной (например, заданной передаточными функциями или дифференциальными уравнениями) системы таким образом, чтобы порядок присутствующих матриц был минимален. Данная проблема называется проблемой минимальной реализации, и в этой области особенно активно работали Калман и его сотрудники.

В последнее время Розенброком и Акерманном достигнуты интересные результаты.

## 6. Многомерные нелинейные системы

Теория многомерных нелинейных систем содержит в себе существенно более трудные задачи, чем теория линейных систем. Обычно в этом случае преимущественным оказывается пременение метода пространства состояний.

Проблемой устойчивости нелинейных систем занимался ряд советских ученых. Критерий устойчивости по Ляпунову основан на применении метода состояний. Функция Ляпунова и ее производная представляют собой функцию, зависящую от вектора состояний. Важные результаты достигнуты известными учеными, такими как Лурье, Летов, Айзерман, Красовский, Малкин, Барбашин, Четаев, Зубов, Еругин и другие. Теоремы, относящиеся к одномерным системам, легко обобщить на многомерные системы.

В проблематике абсолютной устойчивости Поповым были открыты весьма важные результаты. Попов в своих работах описывает явления в частотной области вместо временной, на основе передаточных функций и модифицированных амплитудно-фазовых характеристик вместо метода пространства состояний. Это возможно, так как рассматривается система, в которой за линейным звеном следует статическая нелинейность. Метод Попова удалось обобщить на многомерные системы, вэтой связи я ссылаюсь на работы Андерсона. Среди различных типов многомерных нелинейных систем особенно большое внимание уделено релейным системам, в этой области выделяется деятельность А. А. Красовского, Карамазова, Палатника и Роднянского.

В области систем с переменной структурой многое сделано Емельяновым, а в области адаптивных систем — Цыпкиным, Ивахненко, Чинаевым и другими.

В области исследования оптимальных, поисковых систем выделяются работы Фельдбаума и его сотрудников.

В отношении исследования многомерных импульсных систем заслуживают внимание работы прежде всего Цыпкина, а также Катковника и Полуэктова.

В анализе чувствительности Томовичем и Кокотовичем разработаны новые результаты. Важной главой теории многомерных систем является теория оптимальных систем, о которой представлены замечания ниже.

## 7. Статическая оптимизация

При статическом исследовании системы могут быть описаны алгебраическими уравнениями. Известны некоторые проблемы из теории исследования операций, такие как транспортная задача, задачи распределения ресурсов, распределения электроэнергии и т. д. При инвариантном относительно времени случае уравнение (1) может быть сведено к следующему алгебраическому уравнению:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{26}$$

И если цель заключается в сохранении постоянной рабочей точки при постоянном значении состояний $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$, то по уравнению (9) может быть определен постоянный вектор управляющих воздействий. Если значения $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{u}=\mathbf{u}^0$ оба постоянны, то и функция цели

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \tag{27}$$

будет постоянна. Обе функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}_0$ предполагаются непрерывными функциями. Один из самых простых случаев статической оптимизации возникает, когда оба уравнения (26) и (27) являются линейными. Это и есть так называемая задача линейного программирования. Она может быть сформулирована следующим образом: следует найти неотрицательные значения для координат

$x_i$ вектора $\mathbf{x}$ такие, которые минимизируют (или максимизируют) следующую линейную функцию цели:

$$f_c = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{28}$$

при соблюдении линейных ограничений типа

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \tag{29}$$

где последнее неравенство должно быть выполнено для всех координат векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{Ax}$ (через $T$ сверху обозначается транспонирование в уравнении (28)).

Как хорошо известно, оптимальное решение должно лежать на пересекающихся плоскостях в многографике (29), $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Поэтому решение задачи линейного программирования представляет собой направленный перебор экстремальных точек, т. е. движение от одного до следующего возможного решения. Для многомерных задач с большим количеством переменных этот процесс поиска становится неэкономным, если использовать современную ЦВМ повышенного быстродействия и с большой оперативной памятью. Более экономным является хорошо известный симплекс-метод. Подобным образом рассматриваются и другие методы. Таким образом, большие задачи можно свести к набору меньших задач, которые оптимизируются независимо друг от друга. После оптимизации отдельных подсистем система оптимизируется в целом.

В большинстве практических задач функции цели (28) и (или) ограничения (29) зависят от стохастических помех (параметров). Различные методы были разработаны для поиска оптимума функции цели, в смысле оптимального математического ожидания или оптимальной вариации функции цели.

Интересное обобщение получается для нелинейного программирования. Задача поставлена в следующем виде: необходимо найти минимум или максимум нелинейной функции цели

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \tag{30}$$

при соблюдении нелинейных ограничений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0} \tag{31}$$

и одновременном соблюдении условия $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (оба условия соблюдаются для всех координат). Возможность такого решения этой общей проблемы оптимизации представляется довольно сомнительной, поэтому обычно применяются различные численные методы для поиска оптимума. А если $f_0(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ — координаты функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ представляют собой выпуклые функции, то может быть применен так называемый метод выпуклого программирования.

Пусть задана функция Лагранжа в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{32}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — векторный множитель Лагранжа. Необходимым и достаточным условием того, чтобы вектор $\mathbf{x}^0$ мог быть решением задачи выпуклого программирования, является существование такого вектора $\boldsymbol{\lambda}^0$, при котором

$$\mathbf{x}^0 \geq 0 \,, \quad \boldsymbol{\lambda}^0 \geq 0 \tag{33}$$

и

$$F(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}) \leq F(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \tag{34}$$

для всех значений неотрицательных векторов $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Уравнение (34) выражает условие существования так называемой седловой точки.

Замечания, высказанные относительно линейного программирования для иерархических систем автоматического управления, еще в большей степени действительны для проблем выпуклого программирования. Здесь применяются также методы оптимизации, основанные на декомпозиции системы или на существовании разных уровней.

На практике методы поиска оптимума имеют особое значение. Все они содержат в себе некоторые сравнения. Функция цели $f_0(\mathbf{x})$ оценивается при разных соответствующих значениях $\mathbf{x}$ и окончательное значение $f_0(\mathbf{x})$ получается путем выбора оптимального значения. На эффективность различных методов поиска оптимума сильно влияет глобальный или локальный характер функции цели и ограничений. В некоторых случаях применяются штрафные функции для преобразования задачи с ограничениями в ряд задач оптимизации без ограничений.

Если на систему действуют случайные помехи, то необходимо проводить эксперименты на самом объекте в одновременном режиме. В таких случаях преимущественно применяются метод наискорейшего спуска, методы адаптивных систем и, вообще говоря, методы непосредственного цифрового управления.

## 8. Динамическая оптимизация

Так как во всех САУ происходят переходные процессы, то динамическая оптимизация имеет большое значение для автоматического управления. В этом случае уравнением состояний (1) описывается динамическое поведение объекта и вместо оптимума функции цели следует найти оптимум функционала потерь; в системе (максим умили минимум функционала). Этот функционал имеет следующую обобщенную форму:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt + f_{00}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \tag{35}$$

где $t_0$ и $t_f$ — начальное время и время окончания соответственно, $f_0$ — функция цели; при этом $f_{00}$ — дополнительная функция. Во многих случаях функцией $f_{00}$ можно пренебречь. Однако, в проблемах оптимизации конечного значения функция $f_{00}$ присутствует, а опускается первое выражение в уравнении (35). Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (35), при $f_{00} = 0$. Если $f_0 \equiv 1$, то это будет задача быстродействия; при $f_0 = \mathbf{u}^T \operatorname{sgn} \mathbf{u}$ ($\operatorname{sgn} \mathbf{u} = [\operatorname{sgn} u_1, \ldots, \operatorname{sgn} u_r]^T$) возникает проблема оптимизации топлива, а если $f_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{u}$ или в более общем виде $f_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$, то ставится проблема оптимизации примененной энергии.

Одна из форм функционала потерь, применяемая чаще всего, имеет следующий вид:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\,\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}(\mathbf{x}^T\,\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\,\mathbf{R}\mathbf{u})dt \tag{36}$$

который представляет собой квадратичный функционал вида (35). На практике в объектах одна из самых тяжелых проблем возникает при формулировке функционала потерь. Для решения этой проблемы нельзя дать общие рекомендации.

Часто некоторые (или все) начальные и (или) конечные состояния не зафиксированы, а передвигаются в определенной области начальных и конечных точек. В подобных случаях так называемые условия трансверсальности прибавляются к необходимым граничным условиям.

Для того чтобы составить правильную математическую модель проблемы оптимизации, т. е. составить физически реализуемую модель, следует также учитывать и некоторые ограничения. Одно из таких ограничений относится к вектору управляющих воздействий $\mathbf{u}$, а именно $\mathbf{u} \in U$, т. е. вектор $\mathbf{u}$ ограничен в некотором подпространстве $U$, $r$-мерного Эвклидова пространства. Часто это общее ограничение сводится к $|u_j| \leq 1$; $j = 1, 2, \ldots, r$, где $u_j$ — координаты вектора $\mathbf{u}$.

А сейчас рассмотрим решение проблемы динамической оптимизации.

## 9. Вариационное исчисление

Если ограничений нет, то для решения проблемы оптимизации применяется классическое вариационное исчисление. В этом случае возникает так называемая изопериметрическая задача и необходимо найти минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)\,dt \tag{37}$$

где обобщенная функция цели дается выражением

$$\begin{aligned}F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) &\triangleq f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}] = \\ &= f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]^T \boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \tag*{(3}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — вектор множителей Лагранжа. Необходимое уловие нахождения экстремума дается хорошо известным уравнением Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \tag{39}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{u}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{40}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \tag{41}$$

Здесь $\partial\mathbf{f}^T/\partial\mathbf{x}$ и $\partial\mathbf{f}^T/\partial\mathbf{u}$ обозначают матрицы Якоби. Экстремальная траектория $\mathbf{x}(t)$, экстремальный вектор управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$ и экстремальный вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}(t)$ должны удовлетворять уравнениям (39, 40, 41). Последнее уравнение представляет собой дифференциальное уравнение пространства состояний, а уравнение (39) можно рассматривать как дополнительное, сопряженное дифференциальное уравнение пространства состояний. Если ввести следующую функцию состояний Гамильтона

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \triangleq f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = f_0(\mathbf{x}, u, t) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\boldsymbol{\lambda} \tag{42}$$

то уравнение (40) выражается следующим уравнением:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{43}$$

которое является общим условием экстремума функции $H$. Здесь подчеркивается, что уравнение (43) не будет действительным, если ограничения наложены на вектор $\mathbf{u}$.

## 10. Принцип максимума и минимума

Принципы максимума и минимума рассматриваются как обобщение классического вариационного исчисления. Путем введения новой координаты $x_{n+1} = t$ с дифференциальным уравнением $\dot{x}_{n+1} = 1$ и с нулевым начальным условием все задачи, в которых время присутствует как независимая переменная, сведутся к не зависящим явно от времени задачам. Обзор по этому поводу дается ниже.

Пусть дифференицальное уравнение пространства состояний имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{44}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и конечным условием $\mathbf{x}(t_f) \in C$, где $C$ представляет собой определенное множество цели. Следует найти минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \tag{45}$$

Необходимо определить вектор управления $\mathbf{u} \in U$, переводящий состояние объекта из $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ в $\mathbf{x}(t_f) \in C$ и минимизирующий функцию цели (45).

Введем функцию Гамильтона

$$H_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \psi) = -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{46}$$

или

$$H_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{47}$$

Если сравнить уравнения (46) и (47) с уравнением (42), то оказывается с одной стороны, что

$$\mathbf{p}(t) = -\psi(t) = \lambda(t) \tag{48}$$

а с другой стороны:

$$H_p = -H_\psi = H \tag{49}$$

Пусть через $\mathbf{x}^0(t)$ обозначается решение дифференциального уравнения (44) относительно оптимального управления $\mathbf{u}_0(t)$. В таком случае, в соответствии с $\mathbf{u}^0(t)$ и $\mathbf{x}^0(t)$ существует дополнительный вектор $\psi^0$ или $\mathbf{p}^0$, такой, что при обозначениях $H_\psi^0 = H_\psi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \psi^0)$ и $H_p^0 = H_p(\mathbf{x}_0^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{p}^0)$ канонические уравнения принимают следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}}^0 = \frac{\partial H_\psi^0}{\partial \psi^0} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{x}}^0 = \frac{\partial H_\mathrm{p}^0}{\partial \mathbf{p}} \tag{50}$$

$$\dot{\psi}^0 = -\frac{\partial H_\psi^0}{\partial \mathbf{x}^0} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{p}}^0 = -\frac{\partial H_p^0}{\partial \mathbf{x}^0} \tag{51}$$

при граничных условиях $\mathbf{x}^0(t_0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^0(t_f) \in C$, или, в соответствии с условием трансверсальности, $\psi^0(t_f)$ или $\mathbf{p}^0(t_f)$ должны быть перпендикулярны множеству С при $x^0(t_f)$. Исходя из вышесказанного, необходимое условие оптимальности выражается в следующей форме:

$$H(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \psi^0) \geq H(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, \psi^0) \tag{52}$$

или

$$H_p(\mathbf{x}^0, u^0, p^0) \leq H_p(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, \mathbf{p}^0) \tag{53}$$

для всех значений $t$ в интервале $t_0 \leqq t \leqq t_f$ и для всех векторов $\mathbf{u}$.

Уравнение (52) представляет собой принцип максимума, а уравнение (53) — принцип минимума. Оба принципы эквивалентны и каждый из них может быть избран для применения. Понтрягиным впервые это было выдвинуто как принцип максимума, однако, поскольку принцип минимума связан с рядом теорем, то в следующей главе мы еще возвратимся к этому принципу.

Если использовать принцип минимума для разных применений, то следует проводить расчеты следующим образом. Сначала рассматривается соотношение (53) для вывода формулы

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{p}^0) \tag{54}$$

Если векторы $\mathbf{x}^0(t)$ и $\mathbf{p}^0(t)$ определяют однозначно вектор $\mathbf{u}^0(t)$ для всего интервала $[t_0, t_f]$, то возникшая таким образом задача называется обычной. Если формально подставить уравнение (54) в уравнения (50) и (51), то последнее будет зависеть исключительно от $\mathbf{x}^0(t)$ и $\mathbf{p}^0(t)$. Поэтому эти два векторных уравнения представляют собой формулу для нахождения вектора состояний $\mathbf{x}^0(t)$ и дополнительного вектора $\mathbf{p}^0(t)$. Такой метод решения приводит нас к двухточечной задаче определения граничного значения. Начальное и граничное условия $\mathbf{x}^0(t_0)$ и $\mathbf{x}^0(t_f)$ или условия трансверсальности вместе с задачей определения координат вектора $\mathbf{p}^0(t_f)$ дают всего $2n$ граничных условий для решения $2n$ скалярных уравнений (50) и (51). Однако, $n$ уравнений из них принадлежат к начальным состояниям, а $n$ — к конечным состояниям основных или дополнительных переменных. Во всяком случае, после определения оптимального вектора состояний $\mathbf{x}^0(t)$ и дополнительного вектора $\mathbf{p}^0(t)$ по уравнению (50) мы имеем также и оптимальный вектор управления $\mathbf{u}^0(t)$. По вышеуказанному процессу видно, что мы можем надеяться на аналитическое решение лишь в самых простых случаях. Главным образом, именно этим фактом объясняется значение численных методов для нахождения оптимума.

## 11. Дискретный принцип минимума

Дискретный принцип минимума имеет некоторые преимущества по сравнению с непрерывным принципом минимума прежде всего с точки зрения вычислительных потребностей, так как он может быть поставлен непосредственно на ЦВМ. Процесс дискретизации проблемы оптимизации может быть осуществлен без труда путем замены дифференциальных уравнений разностными уравнениями. Однако, следует отметить, что при дискретизации несколько теряется интуитивное понимание характера и структуры проблемы оптимизации.

Пусть динамическая система описывается векторным разностным уравнением:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)\ ; \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, K-1)\,, \tag{55}$$

где $\mathbf{x}_k$ — значение вектора состояний в $k$-той точке снятия проб с объекта, $\mathbf{u}_k$ — значение вектора управления в этот же момент времени, $\mathbf{f}_k$ — векторная функция векторного аргумента $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$.

Ограничения на управления заданы в виде:

$$u_k \in U \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, K-1\,, \tag{56}$$

и функционал цели имеет следующую форму:

$$J = \sum_{k-1}^{K-1} f_{0k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \tag{57}$$

где $f_{0k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ — скалярная функция цели векторного аргумента $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{u}_k$. Предположим, что граничные условия имеют следующий вид:

$$\mathbf{x}_0 = a \qquad \text{и} \qquad \mathbf{x}_k \in C \tag{58}$$

где $C$ — некоторое определенное множество в $n$-мерном Эвклидовом пространстве.

Цель состоит в том, чтобы найти последовательность оптимальных векторов управления $\mathbf{u}_0^0, \mathbf{u}_1^0, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}^0$ при соблюдении ограничений (56) таким образом, чтобы порожденная последовательность состояний $\mathbf{x}_0^0, x_1^0, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}^0$ соответствовала граничным условиям (58) и функционал цели (57) стремился к минимуму.

В этом случае функция Гамильтона выражается в следующей форме:

$$H_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}_{k+1}) = f_{0k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \tag{59}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

В соответствии с последовательностями оптимальных состояний $\mathbf{x}^0$ и управлений $\mathbf{u}_2^0(k = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$, существует такая последовательность дополнительных векторов $\mathbf{p}_k^0(k = 0, 1, 2, \ldots, k)$, при которой — с обозначением $H_k^0 = H_k(\mathbf{x}_k^0, \mathbf{u}_k^0, \mathbf{p}_{k+1}^0)$ — канонические разностные уравнения

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \frac{\partial H_k^0}{\partial \mathbf{p}_{k+1}} \tag{60}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k = -\frac{\partial H_k^0}{\partial \mathbf{x}_k^0} \tag{61}$$

соответствуют граничным условием $\mathbf{x}_k^0 = \alpha$, $\mathbf{x}_k^0 \in C$; $\mathbf{p}_k^0$ — перпендикулярен $C$ при $\mathbf{x}_k^0$. Тогда необходимое условие оптимальности выражается формулой

$$H_k(\mathbf{x}_k^0, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}_{k+1}^0) = H_k(\mathbf{x}_k^0, \mathbf{u}_k^0, \mathbf{p}_{k+1}^0) \tag{62}$$

для всех $\mathbf{u}_k \in U$ и всех $k = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Сравнение дискретного и непрерывного принципов минимума указывает на тесную аналогию между ними.

## 12. Динамическое программирование

В соответствии с принципом оптимальности, последняя часть оптимальной траектории сама также представляет собой оптимальную траекторию. На основе этого принципа Беллман развил метод динамического программирования. Дискретная форма этого метода представляет собой многоступенчатый процесс последовательных решений, в котором приняты следующие обозначения: $\mathbf{x}_k$ — вектор состояний, $\mathbf{u}_k$ — вектор управления или, другими словами, вектор стратегии последовательных решений. Оптимальной стратегией минимизируется функционал цели

$$J = f_{00}(\mathbf{x}_k) + \sum_{k=0}^{K-1} f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \tag{63}$$

Обозначим через $S_{K-k}$ оптимальное значение частной суммы $I_{K-k}$, т. е.

$$S_{K-k} = \min_{\mathbf{u}_{K-k} \in U} I_{K-k} \tag{64}$$

где

$$I_{K-k} = I_{K-k+1} + f_0(\mathbf{x}_{K-k}, \mathbf{u}_{K-1}) \tag{65}$$

и, применяя принцип оптимальности, получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$S_{K-k} = (\mathbf{x}^0_{K-k}) = \min_{\mathbf{u}_{K-k} \in U} \{S_{K-k+1}\big(\mathbf{x}^0_{K-k} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{K-k}, \mathbf{u}_{K-k})\big) + f_0(\mathbf{x}^0_{K-k}, \mathbf{u}_{K-K})\} \tag{66}$$

В результате процесса оптимизации оптимальное значение $\mathbf{u}^0_{K-k}$ вектора $\mathbf{u}_{K-k}$ рассчитывается с помощью уравнения (66). Повторным применением уравнения (66) и процесса оптимизации, в конечном итоге, получится полная последовательность управления $\mathbf{u}^0_{k-1}, \mathbf{u}^0_{K-2}, \ldots, \mathbf{u}^0_1, \mathbf{u}^0_0$.

В случае непрерывной оптимизации, зависящей от времени, минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0\,(\mathbf{x}\,(t), \mathbf{u}(t), t)\,dt \tag{67}$$

Пусть обозначается через $S(\mathbf{x}(t),t)$ минимальное значение частного функционала, принадлежащего к сегменту траектории, начиная с $\mathbf{x}^0(t)$, т. е.

$$S(\mathbf{x}^0(t), t) = \min_{\mathbf{u} \in U} \int_{t_0}^{t_f} f_0\,(\mathbf{x}^0(\vartheta), \mathbf{u}^0(\vartheta), \vartheta)\,d\vartheta \tag{68}$$

Тогда основное уравнение динамического программирования, называемое уравнением Гамильтона—Якоби—Беллмана, записывается в следующем виде:

$$-\frac{\partial S(\mathbf{x}^0(t), t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \frac{S(x^0(t), t)}{\mathbf{x}^{0T}}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}(t), t) + f_0(\mathbf{x}^0(t), u(t), t) \right\}. \tag{69}$$

А после процесса оптимизации получится дифференциальное уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}^0(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial S(\mathbf{x}^0(t), t)}{\partial \mathbf{x}^0} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t), t) + f_0(\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t), t) = 0 \qquad (70)$$

В случае задачи, независящей явно от времени, левая часть уравнения (69) становится равной нулю, и с введением обозначения

$$\mathbf{p}^0 = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1^0}, \frac{\partial S}{\partial x_2^0}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n^0}\right]^T = -\psi^0 \qquad (71)$$

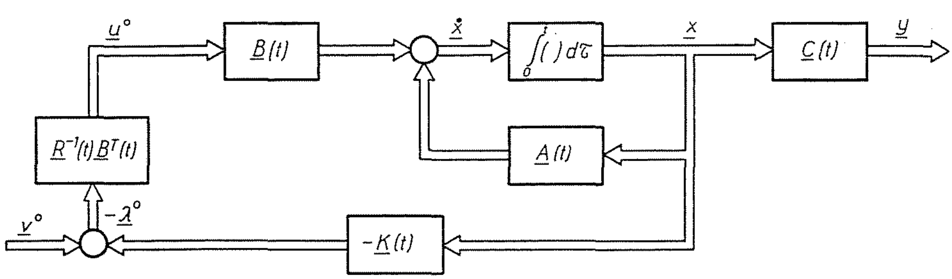
из уравнения (69) получится следующее уравнение:

$$0 = \min_{\mathbf{u} \in U} \{f_0(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) + \mathbf{p}^{0T}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u})\} \qquad (72)$$

которое совпадает с принципом минимума Понтрягина (см. уравнения (47), (53)). Дополнительный результат: в случае задачи, не зависящей явно от времени, со свободными конечным временем минимальное значение функции Гамильтона становится равной нулю. Таким же простым путем мы можем получить принцип максимума. Далее, из уравнения (70) можно также вывести уравнение (39) Эйлера—Лагранжа. Таким образом, метод динамического программирования представляется самым общим методом оптимизации.

## 13. Дифференциальное уравнение типа Рикати

Задача оптимизации линейной системы с квадратичным критерием качества играет важную роль в теории оптимальных систем. В таком случае оптимизация проводится на основе применения функционала (36) (обычно $\mathbf{S} = \mathbf{0}$), а уравнения состояний задаются в виде ур. (2). Обычно не заданы




*Фиг. 5*

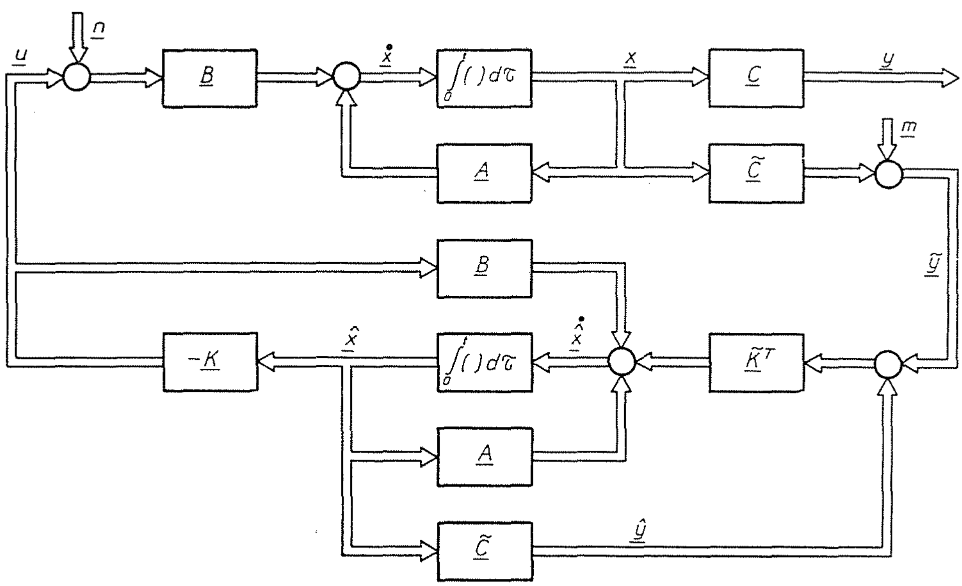
ограничения на вектор управления. Тогда вектор оптимального управления (см. рис. 5) выражается следующим соотношением:

$$\mathbf{u}^0 = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\,[\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^0 - \mathbf{v}^0] \qquad (73)$$

где квадратичная матрица обратной связи $\mathbf{K}(t)$ удовлетворяет следующему, так называемому дифференциальному уравнению типа Риккати:

$$\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}(t) = \mathbf{0}. \quad (74)$$

Для систем с постоянными коэффициентами дифференциальное уравнение типа Риккати переходит в обычное дифференциальное уравнение, которое, естественно, решается существенно более простым путем.




*Фиг. 6*

Многие занимаются вышеуказанной проблематикой, которая часто называется «проблемой обратной связи переменных состояний» в теории как одномерных, так и многомерных систем, в то время как общеизвестно, что квадратичный критерий нельзя считать наилучшим критерием. Много внимания уделено и следующему вопросу: каким образом могут быть осуществлены субоптимальные системы путем упрощения обратной связи.

Здесь подчеркивается, что в системах с постоянными коэффициентами решение проблемы осуществления переменных состояний существенно упрощается путем применения спектральной факторизации.

Теория фильтров по Калману сводится также к дифференциальным уравнениям типа Риккати. Целью фильтрации по Калману является определение прбилиженной оценки переменных состояний (рис. 6). Такая задача часто называется задачей наблюдения по Калману. Стоит уделить внимание тому, что теория фильтрации по Калману является обобщением теории фильтрации Колмогорова—Винера, и таким образом, предыдущая теория содержит в себе последнюю.

Оптимизация линейных систем на основе применения квадратичного критерия качества, и особенно теория фильтрации по Калману, были распространены также на дискретные системы.

В связи с теорией оптимальных систем следует упомянуть о работах Летова и его сотрудников, которые создали научную школу в области теории аналитического конструирования регуляторов и ее приложений.

## Резюме

В предыдущих главах мы рассмотрели главные направления развития теории многомерных систем. Теория многомерных систем является настолько широкой областью, что и целая книга недостаточна для полного обзора, тем более трудно дать подробный обзор в одной статье.

Поэтому не было возможности подробно описать все проблемы; пришлось удовольствоваться тем, чтобы в одном-двух предложениях суммировать работу самых известных советских ученых. Как это показано в предыдущих главах, за короткие два десятилетия теория многомерных систем развивалась в крупных масштабах и связанные с ней проблемы стоят в центре внимания мировой научной общественности.

Применение матричного исчисления и особенно применение метода пространства состояний привели к тому, что часто даже не различаются одномерные и многомерные системы, а задача сразу формулируется для многомерных систем. Это обычно не представляет собой затруднений принципиального характера, но при увеличении количества входных и выходных параметров расчеты становятся постепенно громоздкими. Для решения отдельных задач преимущественно применяются цифровые, аналоговые или гибридные вычислительные машины.

## Литература

1. Фельдбаум, А. А.: Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
2. Mesarovic, M. D.: The Control of Multivariable Systems. Technology Press and John Wiley, 1960.
3. Ньютон, Дж. К.—Гулд, Л. А.—Кайзер, Дж. Ф.: Теория линейных следящих систем. Аналитические методы расчета. Физматгиз, 1961.
4. Чинаев, П. И.: Многомерные автоматические системы. Гостехиздат УССР, 1963.
5. Кухтенко, А. И.: Проблема инвариантности в автоматике. Гостехиздат УССР, 1963.
6. Мишкин, Е.—Браун, Л.: Приспосабливающиеся автоматические системы. Иностр. Лит., 1963.
7. Чанг, Ш. С. Л.: Синтез оптимальных систем автоматического управления. Машиностроение, 1964.
8. (Кулебакин, В. С.—Петров, Б. Н. ред.): Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды 2. Всесоюзного Совещания, состоявшегося в Киеве 29 мая — июня 1962 года. Наука, 1964.
9. (Фельдбаум, А. А. ред.): Самообучающиеся автоматические системы. Наука, 1966.
10. Катовник, В. Я.—Полуэктов, Р. А.: Многомерные дискретные системы управления. Наука, 1966.
11. Казамаров, А. А.—Палантик, А. М.—Рондянский, Л.: Динамика двумерных систем автоматического регулирования. Наука, 1967.
12. (Кухтенко, А. И. ред.): Сложные системы управления. В. 3. Методы исследования непрерывных и импульсных систем автоматического управления. Наукова думка, 1967.
13. (Мееров, М. В. ред.): Регулирование многосвязных систем. Наука, 1967.

14. SCHWARZ, H.: Mehrfachregelungen. I.—II. Springer, 1967, 1971.
15. (Пугачев, В. С. ред.): Основы автоматического управления. 2. изд. испр. и доп. Наука, 1968.
16. Чинаев, П. И.: Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем. Техника, 1969.
17. CSÁKI F.: Szabályozások dinamikája. Lineáris szabályozáselmélet. (Динамика систем управления. Теория линейных систем управления.) Akadémiai K., 1970.
18. Ивановский, Р. И.—Таранов, А. Г.: Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭЦВМ. Наука, 1970.
19. CSÁKI, F.: Modern Control Theories. Nonlinear, optimal and adaptive systems. Akadémiai K., 1972.
20. CSÁKI, F.: Optimum Cascade Controllers for Multivariable Continuous-Data and Pulsed-Data Control Systems with Constraints. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Tomus 56(3—4), pp. 363—382 (1966).
21. CSÁKI F. — FISCHER, P.: On the Spectrum Factorization. Part I. Acta Techn. Hung. 58 (1967) 145—168.
22. CSÁKI, F. — FISCHER, P.: On the Spectrum Factorization Part II. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Tomus 68(1—2), pp. 9—14 (1970).

Проф. д-р Фридеш Чаки, 1502 Будапешт, П/Я 91. Венгрия.