

NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DER EIGENKREISFREQUENZEN VON STABWERKEN

Von

GY. CZEGLÉDI

Forschungsgemeinschaft der Lehrstühle für Technische Mechanik,
Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 12. Oktober 1973)

(Vorgelegt von Prof. Dr. Ádám BOSZNAVY)

1. Einleitung

Wegen der Verbreitung der Leichtbauweise erhält die dynamische Analyse räumlicher Stabwerke neben der Fahrzeugindustrie auch in der Bauindustrie eine wachsende Bedeutung. Das Schrifttum dieses Themenkreises ist gegenwärtig in Entwicklung begriffen. Es gibt Methoden, die die Gleichungen der einzelnen Stäbe des Stabwerks anhand eines diskreten Modells beschreiben (z. B. [6]), während sich andere eines kontinuierlichen Modells bedienen [2], [5].

Bei den im vorliegenden Beitrag vorgeführten Verfahren wurde von uns ein kontinuierliches Modell verwendet. Es wird ein räumliches Stabwerk, bestehend aus geraden Stäben mit von der Längenkoordinate abhängigen Kennwerten, untersucht, das bei entsprechender Wahl ein Stabwerk aus gekrümmten Stäben ersetzen kann. Die unteren und oberen Grenzen für die Eigenkreisfrequenzen werden mit Hilfe zwei verschiedener Methoden berechnet.

2. Modellfindung

Die Eigenkreisfrequenzen des räumlichen Stabwerks aus Stäben mit entlang der Stabachse veränderlichen Kennwerten lassen sich nicht direkt bestimmen. Man ist gezwungen, zweckmäßige Reduktionen durchzuführen, die jedoch nur im Besitz des mathematischen Modells der Einzelstäbe möglich sind. Das als Ausgang dienende Modell wird durch die Gleichungen (2) in Punkt 3 dieser Arbeit bestimmt. Die nun folgenden Überlegungen beruhen auf diesen Gleichungen.

Es seien dem Stabwerk zwei Systeme gleicher räumlicher Anordnung zugeordnet, wo die Stabkennwerte entlang der Längsachse des Stabes unverändert sind. Durch diese beiden Systeme wird das ursprüngliche Stabwerk ersetzt; das eine System soll als »dick«, das andere als »dünn« bezeichnet werden. Für das »dicke« Stabwerk ist kennzeichnend, daß die Eigenkreisfrequenzen kleiner, für das »dünne« Stabwerk, daß die Eigenkreisfrequenzen größer sind als die Eigenkreisfrequenzen des ursprünglichen Systems. (Für das Eingrenzen

der Eigenkreisfrequenz lassen sich ähnliche Lösungen z. B. auch in [2] und [5] finden.)

Das »dicke« Stabwerk erhält man in folgender Weise. Der i -te gerade Stab des Systems mit von der Längenkoordinate abhängigen Kennwerten ($i = 1, 2, \dots, n$) wird im Bereich $0 \leq x_i \leq l_i$ in k_i Teile unterteilt (dabei bedeuten: n die Anzahl der Stäbe im System, l_i die Länge des i -ten Stabes, x_i die Längenkoordinate des i -ten Stabes), sodann wird der prismatische Ersatzabschnitt im j -ten Teilbereich so gewählt, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} (GI_{u,i})_j &= \text{Min} [GI(x_i)]_j \\ (EA_{u,i})_j &= \text{Min} [EA(x_i)]_j \\ (EI_{z,u,i})_j &= \text{Min} [EI_z(x_i)]_j \\ (EI_{y,u,i})_j &= \text{Min} [EI_y(x_i)]_j \\ (\Theta_{u,i})_j &= \text{Max} [\Theta(x_i)]_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ (\rho A_{u,i})_j &= \text{Max} [\rho A(x_i)]_j \quad (j = 1, 2, \dots, k_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Der Index u in den Beziehungen (1) weist auf das »dicke« Ersatzstabwerk hin, während

- E — den Elastizitätsmodul,
- A — die Querschnittsfläche,
- ρ — die Dichte,
- Θ — das Massenträgheitsmoment um die Torsionsachse des Stabes, pro Längeneinheit,
- GI — die Torsionssteifigkeit,
- EI_z und
- EI_y — die Biegesteifigkeit des Stabes in den beiden Hauptebenen bedeuten.

Min und Max deuten auf die niedrigsten bzw. höchsten Werte der Funktionen im j -ten geschlossenen Intervallum hin.

Werden die Stabkennwerte des »dicken« Ersatzstabwerks aufgrund der Beziehungen (1) gewählt, so sind die Eigenfrequenzen dieses Systems nach dem auf dem Poincaréschen Minimax-Prinzip beruhenden Vergleichssatz die unteren Grenzen der Eigenfrequenzen des ursprünglichen Systems [1], [2].

Man erhält die oberen Grenzen in ähnlicher Weise; es werden nur in den Zusammenhängen (1) die Indices u durch o , Min durch Max ersetzt.

Mit der Erhöhung der Teilungszahl k_i ergeben die Eigenfrequenzen des »dicken« und des »dünnen« Stabwerks verbesserte untere bzw. obere Grenzen für das ursprüngliche Stabwerk. Dem Korrekktionsgrad werden über die Teilungszahl k_i durch die Speicherkapazität der eingesetzten Rechenanlage Grenzen gesetzt. Bei praktischen Stabwerken, wo sich die Kennwerte der einzelnen

Stäbe entlang der Längsachse im allgemeinen nicht stark verändern, kann auch ein verhältnismäßig niedrigerer Wert von k_i genügend sein.

Durch die Herausbildung der beschriebenen Ersatzstabwerke besteht also die Aufgabe in der Bestimmung der Eigenfrequenzen räumlicher Stabwerke aus prismatischen Stäben. Im weiteren soll erst die Schwingungsgleichung des Einzelstabes beschrieben werden, dann werden zwei Methoden zur Ableitung der Frequenzgleichung des Stabsystems gezeigt und verglichen.

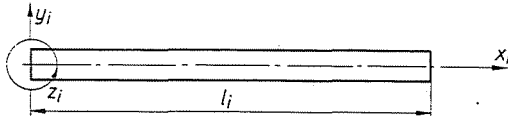


Fig. 1

Wegen ihrer Knappheit und Eignung für die maschinelle Berechnung wird, um die Gleichungen zu beschreiben, die Symbolik der Matrizenrechnung herangezogen.

3. Die Gleichungen der Sinusschwingung eines geraden Einzelstabes mit konstanten Kennwerten

Es sei ein gerader Stababschnitt mit konstanten Kennwerten des Stabsystems mit i bezeichnet (Abb. 1). In einem mit dem Stab fest verbundenen Koordinatensystem x_i, y_i, z_i werden die Verschiebungsfunktionen der Stabquerschnitte nach der Elementartheorie [3] durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_i &= (A_{1i} \sin \beta_{1i} x_i + A_{2i} \cos \beta_{1i} x_i) \sin \omega t, \\
 \bar{\eta}_i &= (A_{3i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{4i} \cos \beta_{3i} x_i + A_{5i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i + A_{6i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t, \\
 \bar{\zeta}_i &= (A_{7i} \sin \beta_{2i} x_i + A_{8i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{9i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i + A_{10i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\
 \bar{\varphi}_i &= (A_{11i} \sin \beta_{4i} x_i + A_{12i} \cos \beta_{4i} x_i) \sin \omega t, \\
 \bar{\psi}_i &= (-A_{7i} \beta_{2i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{8i} \beta_{2i} \sin \beta_{2i} x_i - A_{9i} \beta_{2i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i - \\
 &\quad - A_{10i} \beta_{2i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\
 \bar{\zeta}_i &= (A_{3i} \beta_{3i} \cos \beta_{3i} x_i - A_{4i} \beta_{3i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{5i} \beta_{3i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i + \\
 &\quad + A_{6i} \beta_{3i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t,
 \end{aligned} \tag{2}$$

wo eine kleine Schwingung mit stehenden Wellen und der Kreisfrequenz ω vorausgesetzt und der Koordinatenursprung der Zeitachse geeignet gewählt wird.

In den Gleichungen sollen die Verschiebungs- und Verdrehungsfunktionen der Querschnitte im Verhältnis zu den Koordinatenachsen x_i, y_i, z_i mit $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\zeta}_i$ bzw. $\tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i$ und $\tilde{\chi}_i$ bezeichnet werden; $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{12i}$ sind einstweilen unbekannte Koeffizienten, ω ist die unbekannte Kreisfrequenz der Schwingung; mit den bereits benutzten, im vorliegenden Falle konstanten Kennwerten $\rho, E, A, EI_x, EI_y, GI, \Theta$ gilt für den i -ten Stab:

$$\beta_{1i} = \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i}} \omega, \quad \beta_{4i} = \sqrt{\frac{\Theta_i}{GJ_i}} \omega, \quad (2a)$$

$$\beta_{2i} = \sqrt[4]{\frac{\rho_i A_i}{EJ_{y_i}}} \omega^2, \quad \beta_{3i} = \sqrt[4]{\frac{\rho_i A_i}{EJ_{z_i}}} \omega^2.$$

Die Gleichungen (2) werden Feldfunktionen des i -ten Stabes genannt.

Die Werte der Verschiebungsfunktionen (2) bei $x_i = 0$ und $x_i = l_i$ (an den Stabenden) lassen sich zu je einem Verschiebungsvektor anordnen:

$$\tilde{u}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_i \\ \tilde{\eta}_i \\ \tilde{\zeta}_i \\ \tilde{\varphi}_i \\ \tilde{\psi}_i \\ \tilde{\chi}_i \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline & & & & -\beta_{2i} & -\beta_{2i} \\ \hline & & \beta_{2i} & \beta_{2i} & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \\ A_{4i} \\ A_{5i} \\ A_{6i} \\ A_{7i} \\ A_{8i} \\ A_{9i} \\ A_{10i} \\ A_{11i} \\ A_{12i} \\ \hline \end{array} \sin \omega t;$$

$x_i = 0$

U_i

bzw.

$$\tilde{v}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_i \\ \tilde{\eta}_i \\ \tilde{\zeta}_i \\ \tilde{\varphi}_i \\ \tilde{\psi}_i \\ \tilde{\chi}_i \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \sin \beta_{1i} l_i & \cos \beta_{1i} l_i & & & & \\ \hline & & \sin \beta_{2i} l_i & \cos \beta_{2i} l_i & \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i & \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & \beta_{2i} \cos \beta_{2i} l_i & -\beta_{2i} \sin \beta_{2i} l_i & \beta_{2i} \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i & \beta_{2i} \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \hline \end{array} \alpha_i$$

$x_i = l_i$

V_i

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \sin \beta_{2i} l_i & \cos \beta_{2i} l_i & \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i & \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i & & \\ \hline & & & & \sin \beta_{1i} l_i & \cos \beta_{1i} l_i \\ \hline -\beta_{2i} \cos \beta_{2i} l_i & \beta_{2i} \sin \beta_{2i} l_i & -\beta_{2i} \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i & -\beta_{2i} \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i & & \\ \hline \end{array} \alpha_i \cdot \sin \omega t;$$

in kürzerer Schreibweise:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= \mathbf{U}_i a_i \sin \omega t, \\ \tilde{v}_i &= \mathbf{V}_i a_i \sin \omega t.\end{aligned}\quad (3)$$

(An den leeren Stellen der Matrizen stehen Nullen.)

Mit Hilfe der Feldfunktionen (2) erhält man für den Stabquerschnitt mit der Koordinate x_i die Schnittkräfte und -momente:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_i &= A_i E_{ii} \beta_{1i} (A_{1i} \cos \beta_{1i} x_i - A_{2i} \sin \beta_{1i} x_i) \sin \omega t, \\ \tilde{G}_i &= -EI_{zi} \beta_{3i}^3 (-A_{3i} \cos \beta_{3i} x_i + A_{4i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{5i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i + \\ &\quad + A_{6i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t, \\ \tilde{H}_i &= -EI_{yi} \beta_{2i}^3 (-A_{7i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{8i} \sin \beta_{2i} x_i + A_{9i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i + \\ &\quad + A_{10i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\ \tilde{M}_i &= GI_{ii} \beta_{4i} (A_{11i} \cos \beta_{4i} x_i - A_{12i} \sin \beta_{4i} x_i) \sin \omega t, \\ \tilde{N}_i &= -EI_{yi} \beta_{2i}^2 (-A_{7i} \sin \beta_{2i} x_i - A_{8i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{9i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i + \\ &\quad + A_{10i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\ \tilde{K}_i &= EI_{zi} \beta_{3i}^2 (-A_{3i} \sin \beta_{3i} x_i - A_{4i} \cos \beta_{3i} x_i + A_{5i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i + \\ &\quad + A_{6i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t.\end{aligned}\quad (4)$$

Aus Gl. (4) lassen sich die an den Stabenden angreifenden, aus der Wirkung der Umgebung herrührenden, äußeren Kraftkomponenten ermitteln, die ähnlich wie die Verschiebungen zu einem Kraftwirkungsvektor vereint werden (s. s. 196).

Auch diese Gleichungen lassen sich in kürzerer Form schreiben:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i &= \mathbf{F}_i a_i \sin \omega t, \\ \tilde{p}_i &= \mathbf{P}_i a_i \sin \omega t.\end{aligned}\quad (5)$$

Die Gleichungen (3) und (5) stellen zusammen das Parametergleichungssystem der äußeren Kraftwirkungen auf die Stabenden und der Verschiebungen der Stabenden dar; der Parameter ist der Vektor a_i , der die unbekanntenen Koeffizienten der Feldfunktionen enthält.

Hier teilt sich die Behandlung des Problems: je nach dem, ob der Parameter a_i eliminiert oder behalten wird, spricht man von einer parameterlosen oder parametrischen Methode.

4. Parameterloses Verfahren zur Bestimmung der Frequenzgleichung des Stabsystems

Das im weiteren ausführlich behandelte Verfahren kann als die Anwendung der in [4] beschriebenen allgemeinen Methode auf das behandelte Stabsystem gelten.

$$\tilde{q}_{oi} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_i \\ \tilde{p}_i \end{bmatrix} = \tilde{q}_i \sin \omega t = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{P}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_i} a_i \sin \omega t. \quad (6)$$

Aus (6) gilt für die Amplituden der Sinusfunktionen, daß

$$\tilde{s}_i = \mathbf{S}_i a_i, \quad (7a)$$

$$\tilde{q}_i = \mathbf{Q}_i a_i. \quad (7b)$$

Die Matrix \mathbf{Q}_i ist quadratisch, von der Ordnung 12. Sie hat auch eine Inverse, wenn $\det(\mathbf{Q}_i) \neq 0$; wird in diesem Falle a_i aus (7b) ausgedrückt und in (7a) eingesetzt, erhält man

$$\tilde{s}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \tilde{q}_i,$$

oder mit der Bezeichnung $\mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i^{-1} = \mathbf{R}_i$:

$$\tilde{s}_i = \mathbf{R}_i \tilde{q}_i. \quad (8a)$$

Damit steht eine direkte Beziehung zur Verfügung zwischen der Amplitude \tilde{q}_i der auf die Stabenden wirkenden sinusförmigen äußeren Kräfte und der Amplitude \tilde{s}_i der sinusförmigen Verschiebungen der Stabenden; die Amplitude \tilde{s}_i darf als »Antwort« auf die an den Stabenden als Pole eines Teilsystems wirkenden äußeren Kräfte betrachtet werden. \mathbf{R}_i ist die dynamische Deformationsmatrix.

Gl. (8a) zeigt auch gewisse Verallgemeinerungsmöglichkeiten; mit mehr oder weniger Mühe läßt sich nämlich für jedes beliebige dynamische Teilsystem — im vorliegenden Falle handelt es sich um einen einzigen Stab — die dynamische Deformationsmatrix \mathbf{R}_i aufstellen, die auf die harmonische Erregung an den »Polen« des Teilsystems die Antwort hervorruft [4].

Besteht eine inverse Beziehung von (8a), läßt sich auch diese mit Hilfe von (7a) und (7b) beschreiben:

$$\tilde{q}_i = \mathbf{R}_i^{-1} \tilde{s}_i, \quad (8b)$$

wo $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i^{-1}$ die dynamische Steifigkeitsmatrix ist.

Ohne darauf näher einzugehen, soll mit dem Hinweis auf [4] erwähnt werden, daß sich mit Hilfe der dynamischen Steifigkeitsmatrix der einzelnen Stäbe die dynamische Steifigkeitsmatrix \mathbf{R}^{-1} für das gesamte System aufstellen läßt; mit Hilfe der Matrix \mathbf{C} , die die Verbindung der Stäbe ausdrückt, und des die Verschiebungskomponenten der Anschlußpunkte — Knotenpunkte — enthaltenden Vektors r kann bei nicht erregter freier Schwingung das homogene lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{C}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} r = 0$$

geschrieben werden.

Die die nichttriviale Lösung liefernde Gleichung

$$\det (\mathbf{C}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}) = 0 \quad (9)$$

ist die Frequenzgleichung des Stabsystems.

Da \mathbf{R}^{-1} eine Funktion von ω ist, können aus (9) alle Schwingungskreisfrequenzen bestimmt werden, bei denen \mathbf{R}^{-1} erklärt ist.

Bevor wir die Anwendung von [4] auf den behandelten Fall abschließen, soll auf zwei Schwierigkeiten hingewiesen werden.

Die eine Schwierigkeit besteht darin, daß die Frequenzgleichung (9) diejenige Eigenfrequenz nicht ergeben kann, die mit irgendeiner der Eigenfrequenzen der als alleinstehend und an beiden Enden eingespannt gedachten Stäbe des Systems zusammenfällt. In diesem Falle ist die Matrix \mathbf{R}^{-1} nämlich nicht erklärt, die Determinantenfunktion in (9) hat einen Pol. In der Eigenfrequenzmenge können also bei diesem Rechenverfahren »Lücken« zurückbleiben.

Die andere Schwierigkeit ist rechentechnischer Art und besteht darin, daß die Determinantenfunktion in (9) keine stetige Funktion von ω ist.

Unserer Definition gemäß war $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i^{-1}$. Die Elemente der Matrizen \mathbf{Q}_i und \mathbf{S}_i enthalten einstweilen nur trigonometrische und hyperbolische Funktionen, bei der Inversion von \mathbf{S}_i entstehen jedoch auch Brüche. Es ist zweckmäßiger, die Matrizen \mathbf{R}_i bzw. \mathbf{R}_i^{-1} unmittelbar mit Hilfe physikalischer Überlegungen aufzustellen, und nicht durch Inversion der Matrizen \mathbf{Q}_i bzw. \mathbf{S}_i . Übrigens ist \mathbf{R}_i von gleicher Struktur wie \mathbf{R}_i^{-1} , ferner sind beide symmetrisch.

Um die angedeuteten Schwierigkeiten zu beheben, wurde vom Verfasser dieses Beitrags das im folgenden beschriebene Verfahren erarbeitet.

5. Parametrisches Verfahren zur Bestimmung der Frequenzgleichungen von Stabwerken

Wir kommen im folgenden wieder auf das parametrische Gleichungssystem (3) und (5) zurück, das die an den Stabenden angreifenden äußeren Kraftwirkungen und die Verschiebungen der Stabenden enthält. Die zu Beginn der vorigen Ausführungen genannte andere Methode besteht im wesentlichen darin, daß die Parameter der Gleichungen nicht eliminiert werden, sondern mit diesen als unbekanntem Koeffizienten von Feldfunktionen verfahren wird; damit steht die Amplitudenverteilung der Stäbe des Stabwerks in der Lösung direkt zur Verfügung. Die Verschiebungsamplituden der Knotenpunkte können mit Hilfe der Feldfunktionen ermittelt werden.

Damit lassen sich die beiden Schwierigkeiten in der Anwendung des ersten Verfahrens: die Pole der Frequenzdeterminante und die Lücken der Eigenfrequenz-Menge, beheben.

Die Verschiebungs- und Kraftvektoren in Gl. (3) und (5) konnten bequem in dem mit dem Stab fest verbundenen Koordinatensystem aufgestellt werden,

die Gleichungen hingegen, die die Verbindungen der Stabenden beschreiben, werden zweckmäßig in einem dem System zugeordneten »gemeinsamen« Koordinatensystem dargestellt. Daraus folgt, daß auch die genannten Vektoren in das gemeinsame Koordinatensystem transformiert werden müssen. Sind die Einheitsvektoren des mit dem Stab fest verbundenen x_i, y_i, z_i Systems e_{1i}, e_{2i}, e_{3i} , die Einheitsvektoren des gemeinsamen x, y, z -Systems i, j, k , so lautet die Transformationsmatrix:

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} i e_{1i} & i e_{2i} & i e_{3i} \\ j e_{1i} & j e_{2i} & j e_{3i} \\ k e_{1i} & k e_{2i} & k e_{3i} \end{bmatrix}$$

Mit der Diagonal-Hypermatrix $\mathbf{T}_i = \langle \mathbf{t}_i, \mathbf{t}_i \rangle$ ergeben sich die die Verschiebungen der Stabenden und die äußeren Kraftwirkungen enthaltenden Vektoren im gemeinsamen Koordinatensystem zu:

$$\begin{aligned} u_i &= \mathbf{T}_i \tilde{u}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i a_i \sin \omega t, \\ v_i &= \mathbf{T}_i \tilde{v}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{V}_i a_i \sin \omega t, \\ f_i &= \mathbf{T}_i \tilde{f}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{F}_i a_i \sin \omega t, \\ p_i &= \mathbf{T}_i \tilde{p}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{P}_i a_i \sin \omega t. \end{aligned} \tag{10}$$

Die vier Gleichungen von (10) beziehen sich auf den i -ten Stab des Systems. Für jeden Stab des Systems aus n Stäben können diese Gleichungen aufgestellt und formal in der folgenden Matrixgleichung zusammengefaßt werden:

$$\begin{matrix} \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ \hline f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ \hline p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{T}_1 \mathbf{U}_1 & & & \\ & \mathbf{T}_2 \mathbf{U}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \mathbf{U}_n \\ \hline \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_1 & & & \\ & \mathbf{T}_2 \mathbf{V}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \mathbf{V}_n \\ \hline \mathbf{T}_1 \mathbf{F}_1 & & & \\ & \mathbf{T}_2 \mathbf{F}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \mathbf{F}_n \\ \hline \mathbf{T}_1 \mathbf{P}_1 & & & \\ & \mathbf{T}_2 \mathbf{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \mathbf{P}_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right] \sin \omega t,$$

$\underbrace{\hspace{5em}}_b \quad \underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{3em}}_a$

oder in kürzerer Form:

$$b = Aa \sin \omega t. \quad (11b)$$

Die Dimensionen der Matrizen in Gl. (11b) nach der Syntax der Programmierungssprache ALGOL beschrieben lauten:

$$\begin{array}{l} \text{array } b \quad [1 : 4 \times 6 \times n], \\ \text{array } A \quad [1 : 4 \times 6 \times n, 1 : 12 \times n], \\ \text{array } a \quad [1 : 12 \times n]. \end{array}$$

Die Gl. (11a) enthält also die Verschiebungen der Stabenden und die äußeren Kräfte für die getrennten Stäbe eines Stabsystems aus n Stäben.

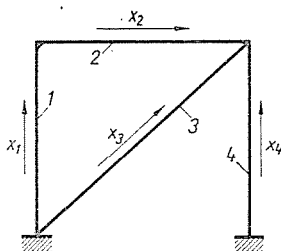


Fig. 2

Wie die Stäbe in einem System verbunden sind, wird zweckmäßigerweise durch eine Verbindungsmatrix K ausgedrückt.

Am Beispiel eines ebenen Rahmentragwerks aus an den Enden steif verbundenen vier Stäben wird gezeigt, wie die Matrix K aufgestellt wird (Abb. 2).

In der Abbildung sind auch die x_i -Achsen der Koordinatensysteme der Stäbe dargestellt. Die Rand- und Übergangsbedingungen werden durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0, & v_2 = v_3, \\ u_3 = 0, & v_2 = v_4, \\ v_1 = u_2, & u_4 = 0, \end{array} \quad (12a)$$

die Gleichgewichte der Knotenpunkte durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} p_1 + f_2 = 0, \\ p_2 + p_3 + p_4 = 0 \end{array} \quad (12b)$$

ausgedrückt.

Die Gleichungen (12a) und (12b) lauten in Matrizenform:

$$\mathbf{K} \mathbf{b} = 0.$$

oder in kürzerer Form:

$$\mathbf{K} \mathbf{b} = 0. \tag{13}$$

Hierin bedeutet \mathbf{K} die genannte Verbindungsmatrix. Die Matrizen \mathbf{E} in \mathbf{K} sind Einheitsmatrizen sechster Ordnung.

Es ist leicht einzusehen, daß dies nur eine der möglichen Schreibweisen von \mathbf{K} ist; andere Schreibweisen unterscheiden sich von dieser selbstverständlich nicht inhaltlich, nur in der Form. Es sei noch bemerkt, daß einerseits die hier angewandte Matrix \mathbf{K} , andererseits die nach der vorigen Methode benutzten Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{C}^* dieselbe physikalische Tatsache ausdrücken. \mathbf{K} enthält — neben anderem — sämtliche Informationen, die in den Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{C}^* enthalten sind.

(11b) in Gl. (13) eingesetzt, erhält man

$$\mathbf{K} \mathbf{A} a \sin \omega t = 0.$$

Den Fall der Ruhe ausgeschaltet ($a \neq 0$ und $\omega \neq 0$) erhält man die Frequenzgleichung des Stabsystems

$$\det(\mathbf{K} \mathbf{A}) = 0. \tag{14}$$

Die Determinante (14) ist schon eine stetige Funktion von ω . Die Bestimmung einer hinreichenden Zahl von Nullstellen ist im Vergleich zur ersten

Methode rechentechnisch viel einfacher, obwohl in diesem Falle die Ordnungszahl der Frequenzdeterminante höher ist.

Dieses Verfahren läßt sich leicht algorithmisieren und ist für die Berechnungsmethode der Frequenzgrenzen gut brauchbar. Die Rechenanlage kann selbst die Teilungszahl k_i wählen, diese erhöhen, und die Frequenzgleichung aufstellen. Die Höhe der Genauigkeit ist nur durch die Speicherkapazität der Maschine begrenzt.

Abschließend sei es mir gestattet, Herrn Prof. Dr. Ádám Bosznay meinen Dank auszusprechen, der als Leiter der Forschungsgemeinschaft des Lehrstuhls durch wertvolle Beratung meine Arbeit förderte.

Zusammenfassung

Im Beitrag wird die Berechnung der Eigenkreisfrequenzen räumlicher Stabwerke behandelt. Dem Stabwerk aus geraden Stäben mit entlang der Längsachse veränderlichen Kennwerten werden zwei Systeme gleicher räumlicher Anordnung aus prismatischen Stäben zugeordnet. Die Eigenkreisfrequenzen des einen Systems bilden die untere, die des zweiten die obere Grenze für das ursprüngliche Stabwerk. Die untere und obere Grenze für die Eigenkreisfrequenzen können noch eingengt werden.

Für die Berechnung der Eigenkreisfrequenzen des räumlichen Stabwerks aus prismatischen Stäben werden im Beitrag zwei Methoden gezeigt.

Literatur

1. POINCARÉ, H.: Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématiques. American J. Math. **12** (1890).
2. BOSZNAY, Á.—CZEGLÉDI, GY.—SZERVÁNSZKY, GY.: Anwendung der Rechentechnik auf die korrigierbare Eingrenzung der Eigenfrequenzen räumlicher Stabwerke.* (Mit dem Niveaupreis des Rektors der Technischen Universität Budapest ausgezeichnete Arbeit.) Manuskript, Budapest, 1972.
3. BOSZNAY, Á.: Technische Schwingungslehre.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
4. BOSZNAY, Á.: Einzelne Probleme der Dynamik zusammengesetzter Systeme. Periodica Polytechnica, Vol. 17. (1973), No. 1, pp. 7—28.
5. BOSZNAY, Á.: Eingrenzende Finitisieren von Eigenfrequenzen.* Vortrag, gehalten anlässlich der vom Ungarischen Nationalausschuß des IUTAM und vom Wissenschaftlichen Verein für Maschinenwesen veranstalteten Konferenz für Mechanik in Miskolc, 2—4. September, 1971.
6. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Theorie und Berechnung der Stabwerke.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.

Gyula CZEGLÉDI H-1521 Budapest, Hungary

* in ungarischer Sprache