К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Общие свойства линейных систем с переменными параметрами
Общая форма заданного решения. Матрица весовых функций

В. МАЛАШЕНКО

(Будапештский Технический Университет)

(Поступила в редакцию 9 июля 1973 г.)

Представлено проф. Д-р Ф. Чаки

1. Введение

Обычно линейная система автоматического регулирования с переменными параметрами описывается следующим векторно-матричным уравнением:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = A(t)\bar{y}(t) + \overline{f(t)} \tag{1.1}$$

$$t_0 \leq t < \infty$$

с начальными условиями:

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \tag{1.2}$$

где

$$\bar{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \bar{f}(t) \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} \text{— векторы-столбцы,}$$

а

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots \quad \ldots \quad \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{— матрица размерности } [n \times n].$$

Существование и единственность решения (1.1), с начальными условиями (1.2), вытекают из общей теоремы существования и единственности решений обыкновенной системы дифференциальных уравнений [1]. А именно: Решения системы (1.1) существуют и единственно на $t, \in [t_0, \infty)$ всюду, где $A(t)$ и $\bar{f}(t)$ непрерывны, кроме того, если $A(t, \lambda)$ и $\bar{f}(t, \lambda)$ на T и Λ непрерывны по λ в этих областях.

Для доказательства такого рода теорем обычно используется равносильное исходному дифференциальному уравнению интегральное уравнение:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_0 + \int_{t_0}^{t} A(\theta)\bar{y}(\theta)d\theta + \int_{t_0}^{t} \bar{f}(\theta)d\theta \tag{1.3}$$

и метод последовательных приближений (метод Пикара). Это представление, равносильное исходному (1.1), может быть использовано для выявления порядка роста решений (1.1), опираясь на следующую лемму:

Лемма 1.

Пусть $w(t) \geq 0$ неотрицательна и монотонно не убывает, и пусть $u(t) \geq 0$ и $v(t) \geq 0$ и имеет место неравенство

$$U(t) \leq W(t) + \int_{t_0}^{t} U(\theta)v(\theta)d\theta, t > t_0$$

тогда

$$U(t) \leq W(t) \quad \exp \int_{t_0}^{t} v(\theta)d\theta, t > t_0$$

Эта лемма вытекает из более известной основной леммы Беллмана [2], где $w(t) = \Gamma C = \text{const}$.

Рассмотрим вопрос о порядке роста решений (1.1), с начальными условиями (1.2). Матрица $A(t)$ — непрерывна (почти всюду).

Введём понятие нормы:

$$\|\bar{y}(t)\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i(t)|; \quad \|A(t)\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|, \quad \|\bar{f}(t)\| = \sum_{i=1}^{u} |f_i(t)|$$

Интегральное уравнение, равносильное исходному (1.1), имеет вид:

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(\theta)\bar{y}(\theta)d\theta + \int_{t_0}^{t} \bar{f}(\theta)d\theta$$

Очевидно,

$$\|\bar{y}(t)\| \leq \|\bar{y}_0\| + \int_{t_0}^{t} \|A(\theta)\| \cdot \|\bar{y}(\theta)\| d\theta + \int_{t_0}^{t} \|\bar{f}(\theta)\| d\theta$$

Пусть $\|\bar{y}\| \leq C$, и $\|\bar{f}(t)\| \leq C_1 e^{\alpha t}$, где $C > 0$, $C_1 > 0$, $\alpha > 0$. Поэтому неравенство можно усилить, и тогда будем иметь

$$\|\bar{y}(t)\| \leq c + \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}) + \int^{t} \|A(\theta)\| \cdot \|\bar{y}(\theta)\| d\theta$$

По лемме 1, где

$$U(t) \leftrightarrow \| \bar{y}(t) \|, \; v(t) \leftrightarrow \| A(t) \|, \; w(t) \leftrightarrow \left[c + \frac{c_1}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}) \right]$$

имеем

$$\| \bar{y}(t) \| \leq \left[c + \frac{c_1}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}) \right] \quad \exp \int\limits_{t_0}^{t} \| A(\theta) \| d\theta$$

Если $\| A(t) \| \leq a$, то есть коэффициенты матрицы $A(t)$ — ограничены, то

$$\| \bar{y}(t) \| \leq \left[c + \frac{c_1}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}) \right] e^{a(t-t_0)} \tag{1.4}$$

Таким образом доказано, чтобы решения системы (1.1) росли не быстрее экспоненциальной функции, достаточно ограниченности её коэффициентов.

Известно, что общая форма заданного решения (1.1) выражается формулой Коши—Лагранжа [1].

$$\bar{y}(t) = Y(t) Y^{-1}(t_0) \bar{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\theta) \bar{f}(\theta) d\theta \tag{1.5}$$

где $Y(t)$ — квадратная матрица размерности $[n \times n]$, столбцы которой составляют компоненты n решений однородной системы, соответствующей системе (1.1). То есть

$$Y(t) = \{ \bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots \bar{y}_n(t) \}$$

или

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \ldots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

и удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t) Y(t) \tag{1.6}$$

$$t_0 \leq t < \infty$$

с такими начальными условиями, что

$$\det \quad Y(t_0) \neq 0.$$

Введём матрицу (функцию Грина):

$$Y(t, \theta) = Y(t)Y^{-1}(\theta) \tag{1.7}$$

Дифференцируя (1.7) по t, получим:

$$\frac{dY(t, \theta)}{dt} = A(t)Y(t, \theta) \tag{1.8}$$

с начальными условиями $Y(\theta, \theta) = I$, когда $t = \theta$
где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{— единичная матрица.}$$

Если (1.7) продифференцировать по θ, будем иметь:

$$\frac{dY(t, \theta)}{d\theta} = -Y(t)Y^{-1}(\theta)A(\theta) = -Y(t, \theta)A(\theta) \tag{1.9}$$

с начальными условиями $Y(t, t) = \mathrm{I}$, когда $\theta = t$.

Определим матрицу весовых функций

$$G(t, \theta) = \begin{cases} Y(t, \theta), \theta \leq t \\ 0, \theta > t \end{cases} \tag{1.10}$$

То есть матрица весовых функций $G(t, \theta)$ тождественно совпадает с функцией $Y(t, \theta)$, когда $\theta \leq t$ и равна нулю, при $\theta > t$. Вместе с тем $Y(t, \theta)$ может и не быть равной нулю, при $\theta > t$, являясь непрерывным решением дифференциального уравнения. Поэтому $Y(t, \theta)$ в ряде случаев полезно воспринимать как непрерывное аналитическое продолжение решения соответствующего уравнения.

Формула (1.5), с учётом (1.10) будет иметь вид:

$$\bar{y}(t) = G(t, t_0)\bar{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t, \theta)\bar{f}(\theta)d\theta \tag{1.11}$$

Алгоритмы построения матрицы весовых функций $G(t, \theta)$ получены в работе [5]. В этой работе весовые функции матрицы $G(t, \theta)$ находятся методом инверсно-сопряжённых систем.

2. Применение преобразования Лапласа к линейным системам автоматического регулирования с переменными параметрами

Общие положения

Пусть система автоматического регулирования с переменными параметрами описывается системой векторно-дифференциальных уравнений (1.1), с начальными условиями (1.2). Применим к (1.1) преобразование Лапласа. Получим:

$$p\bar{y}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} A(t)\bar{y}(t)dt + \bar{\bar{F}}(p) + \bar{y}_0 \tag{2.1}$$

где

$$\bar{y}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\bar{y}(t)dt, \quad \bar{F}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\bar{f}(t)dt \tag{2.2}$$

Основная проблема заключается в нахождении изображения по Лапласу произведения функций $A(t)$ и $\bar{y}(t)$, то есть в вычислении интеграла

$$\int_0^\infty e^{-pt}A(t)\bar{y}(t)dt \tag{2.3}$$

Вспомним теорему свёртки: Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Лапласу, и имеют изображения по Лапласу, соответственно $F_1(p)$ и $F_2(p)$, с абсциссами сходимости c_1 и c_2, то их произведение $[f_1(t)f_2(t)]$ также преобразуемо по Лапласу, и

$$L\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z)F_2(p-z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(z)F_1(p-z)dz \tag{2.4}$$

где в каждом из написанных интегралов контур интегрирования проходит в полосе аналитичности по z, соответствующей подынтегральной функции. Ширина этой полосы зависит от параметра p. Переобразование Лапласа (2.4) является функцией аналитической в полуплоскости $\mathrm{Re}p > c_1 + c_2$ Доказательство этой теоремы можно найти например в [3].

Применим эту теорему к (1.1). Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1.1) являются ограниченными функциями, то есть

$$\| A(t) \| \leq a \tag{2.5}$$

Если это так, то матрица $A(t)$ имеет абсциссу сходимости $c_1 = 0$. Порядок роста решений, как было доказано выше, экспоненциальный, то есть

$$\|\bar{y}(t)\| \leq e^{at} \tag{2.6}$$

Следовательно, вектор $\bar{y}(t)$ преобразуем по Лапласу со своей абсциссой сходимости. То есть существует число c_0 на комплексной плоскости, правее которого $\mathrm{Re}\,p > c_0$ изображение от $\bar{y}(t)$ является функцией аналитической. c_0 — нам неизвестно.

Учитывая теорему свёртки, (2.1) можно записать в виде:

$$p\bar{y}(p) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} A(z)\bar{y}(p - z)dz + \bar{F}(p) - \bar{y}. \tag{2.7}$$

где

$$A(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} A(t)dt \tag{2.8}$$

В (2.7), как проходит контур интегрирования $(\sigma - j\infty, \sigma + j\infty)$ мы не знаем, но известно, что он проходит правее мнимой оси. И этот контур должен лежать достаточно близко к мнимой оси, при достаточно большом p. Его точное, детальное положение можно установить тогда, когда удастся найти особые точки функции $\bar{y}(z)$. Если даже особые точки изображения известны, всё равно ничего нельзя сказать о (2.7). Теорем, которые бы по уравнению (2.7) устанавливали общие свойства $\bar{y}(p)$, не существует. Уравнение (2.7) должно использоваться индивидуально, для частных видов коэффициентов матрицы $A(t)$.

Уравнения с полиномиальными коэффициентами

Пусть в (1.1) матрица $A(t)$ представляется в виде:

$$A(t) \equiv \frac{1}{D(t)} \cdot B(t) \tag{2.9}$$

где $D(t)$ и $B(t)$ — матрицы полиномов. То есть $A(t)$ состоит из дробно-рациональных коэффициентов и полагаем, что $D(t)$ — общий знаменатель всех дробей (элементов) матрицы $A(t)$. Будем предполагать, что степень знаменателя выше степени числителя, то есть все элементы матрицы $A(t)$ ограничены. Тогда (1.1) можно переписать в виде:

$$D(t)\,\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = B(t)\bar{y}(t) + D(t)\bar{f}(t) \tag{2.10}$$

Пусть

$$D(t) = \sum_{k=0}^{m} D_k t^k \quad \text{и} \quad B(t) + \sum_{k=0}^{m} B_k t^k \tag{2.11}$$

где

$$D_k = \{d_{ij}^k\}, \quad B_k = \{b_{ij}^k\}$$

Подставим (2.11) в (2.10), получим:

$$\sum_{k=0}^{m} t^k D_k \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{m} t^k B_k \bar{y}(t) + \sum_{k=0}^{m} t^k D_k \bar{f}(t) \tag{2.12}$$

Перейдём от уравнения (2.12) к уравнению в изображениях по Лапласу, используя теорему свёртки (2.4).

Так как

$$t_k \doteqdot \frac{k!}{p^{k+1}}; \quad \bar{y}(t) \doteqdot \bar{y}(p); \frac{d\bar{y}(t)}{dt} \doteqdot p\bar{y}(p) - \bar{y}_0 \tag{2.13}$$

то (2.12) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{2\pi j} D_k \int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \left[(p-z)\bar{y}(p-z) - \bar{y}_0\right] dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{2\pi j} B_k \int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \bar{y}(p-z) dz + \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{2\pi j} D_k \int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \bar{F}(p-z) dz \tag{2.14}$$

Контур интегрирования в (2.14) везде один и тот же: он отделяет точку начала координат от особых точек функции $\bar{y}(p-z)$, как функции z. Это возможно, так как особые точки $\bar{y}(z)$ лежат в конечной части плоскости, а реальная часть p может быть взята сколь угодно большой (рис. 1).

Нам известно, что $\bar{y}(p)$ существует в силу ограниченности коэффициентов системы (1.1), как функция-изображение от $\bar{y}(t)$. Причём, $\bar{y}(p) \sim \frac{1}{p} \to \infty$ в правой полуплоскости. Следовательно, $\bar{y}(p-z)$ регулярна слева от контура и в бесконечности убывает.

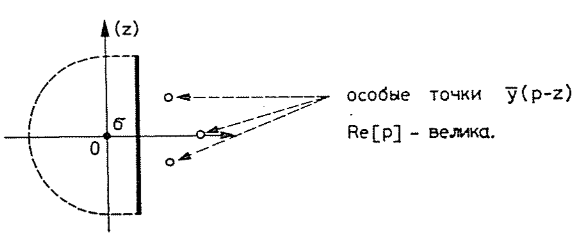

Рис. 1

Во всех интегралах в (2.14) подынтегральные функции убывают не медленее, чем $1/z^2$, следовательно, контур интегрирования можно замкнуть дугой в левой полуплоскости бесконечного радиуса. Отсюда, можно получить вычеты в нуле. Так как

$$s = p - z, \quad \frac{d^k}{dz^k}\bigg|_{z=0} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\bigg|_{z=0} = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k},$$

то (2.14) перепишется в виде

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k D_k \frac{d^k}{dp^k}[p\bar{y}(p)] - D_0\bar{y}_0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_k \frac{d^k \bar{y}(p)}{dp^k} + \\ + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k D_k \frac{d^k \bar{F}(p)}{dp^k} \tag{2.15}$$

Учитывая, что

$$\left.\begin{array}{l} [p\bar{y}(p)]' = p\bar{y}'(p) + \bar{y}(p) \\ [py(p)]'' = p\bar{y}''(p) + 2\bar{y}'(p) \\ \text{-------------------} \\ \text{-------------------} \\ [p\bar{y}(p)]^{(k)} = p\bar{y}^{(k)}(p) + k\bar{y}^{(k-1)}(p) \end{array}\right\} \tag{2.16}$$

из (2.15) получаем векторное уравнение для $\bar{y}(p)$:

$$[(-1)^m pD_m I + (-1)^{m+1} B_m]\bar{y}^{(m)}(p) + \sum_{k=0}^{m-1} [(-1)^k pD_k I + \\ + (-1)^{k+1}(k+1)D_{k+1} I + (-1)^{k+1} B_k]\bar{y}^{(k)}(p) = D_0\bar{y}_0 + \\ + \sum_{k=0}^{m} -(1)^k D_k \bar{F}^{(k)}(p) \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) следует из исходного (2.10) более естественным путём, если сразу воспользоваться соотношением

$$t^k \bar{y}(t) \doteqdot (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\bar{y}(p)$$

Однако, подробным рассмотрением вопроса применения преобразования Лапласа к системам вида (1.1) с матрицей вида (2.9) мы хотели подчеркнуть законность его применения к рассматриваемому виду систем. Для других видов коэффициентов матрицы $A(t)$ формальное применение преобразования Лапласа может оказаться незаконным. Например, в случае когда коэффициенты матрицы $A(t)$ не являются ограниченными функциями.

Исследовать (2.17) сложно, так же как и исходное (2.10). Явных видов решения (2.17) получить практически нельзя. Из этого уравнения надо искать как можно больше общих свойств $\bar{y}(p)$:

1. Поиск особых точек вектора $\bar{y}(p)$.
2. Поиск аналитической структуры $\bar{y}(p)$ в окрестности особых точек.
3. Анализ бесконечности, как возможной особенности $\bar{y}(p)$ и выявление аналитической структуры $\bar{y}(p)$ в окрестности бесконечно-удалённой точки.

Особые точки (2.17) искать сравнительно нетрудно, если опираться на факты аналитической теории дифференциальных уравнений. А именно: если линейное дифференциальное уравнение разрешено относительно старшей производной, то в точках регулярности коэффициентов решение голоморфно. Возможными особенностями решения могут быть только особенности коэффициентов [4]. То есть особые точки коэффициентов, относительно старшей производной, есть особые точки решения.

Умножим (2.17) слева на матрицу, обратную матрице, стоящей при старшей производной $\bar{y}^{(m)}(p)$. Получим:

$$\bar{y}^{(m)}(p) = -\left[(-1)^m p D_m I + (-1)^{m+1} B_m\right]^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[(-1)^k p D_k I + \right.$$

$$\left. + (-1)^{k+1}(k+1) D_{k+1} I + (-1)^{k+1} B_k\right] \bar{y}^{(k)}(p) + \left[(-1)^m p D_m I + \right.$$

$$\left. (-1)^{m+1} B_m\right]^{-1} \left\{ D_0 \bar{y}_0 + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k D_k \bar{F}^{(k)}(p) \right\} \tag{2.18}$$

В (2.18) все коэффициенты, дробно-рациональные матрицы с полюсами, определяемыми корнями следующего уравнения:

$$\mathrm{Det}\left[(-1)^m p D_m I + (-1)^{m+1} B_m\right] = 0 \tag{2.19}$$

Возможными особенностями $\bar{y}(p)$ в конечной части плоскости могут быть только корни характеристического уравнения (2.19). Вероятно, что эти особенности могут быть и устранимыми. Это может быть выявлено только после построения аналитической структуры $\bar{y}(p)$.

Для получения более наглядных результатов, рассмотрим более узкий класс систем с дробно-линейными коэффициентами.

Уравнения с дробно-линейными коэффициентами

Пусть элемент матрицы $A(t)$ имеет следующий вид:

$$a_{ij}(t) = \frac{B_{ij}^0 + b_{ij}^1 t}{d_{0i} + d_{1i} t} \tag{2.20}$$

то есть в (2.11)

$$D(t)=\begin{bmatrix} d_{01}+d_{11}t & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & d_{02}+d_{12}t & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & d_{0n}+d_{1n}t \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

или

$$\left.\begin{aligned} B(t) &= B_0+B_1t \\ D(t) &= D_0+D_1t \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Учитывая (2.22), (1.1) можно переписать в виде:

$$D(t)\cdot\frac{d\bar{y}(t)}{dt}=B(t)\bar{y}(t)+D(t)\bar{f}(t) \tag{2.23}$$

В (2.23) перейдём в область изображений по Лапласу, получим:

$$D_0p\bar{y}(p)-D_0\bar{y}_0-\frac{d}{dp}\left[D_1p\bar{y}(p)-D_1\bar{y}_0\right]=B_0\bar{y}(p)-B_1\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+$$
$$+D_0\bar{F}(p)-D_1\frac{d\bar{F}(p)}{dp}$$

или

$$[B_1-pD_1]\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+[pD^0-B_0-D_1)]\bar{y}(p)=R(p) \tag{2.24}$$

где

$$R(p)=D_0\bar{y}_0+D_0\bar{F}(p)-D_1\frac{d\bar{F}(p)}{dp} \tag{2.25}$$

$$[B_1-pD_1]=\begin{bmatrix} b_{11}^1-pd_{11} & b_{12}^1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{1n}^1 \\ b_{21} & b_{22}^1-pd_{12} & & b_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}^1 & b_{n2}^1 & \ldots\ldots & b_{nn}^1-pd_{1n} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

При всех p, когда матрица $[B_2-pD_1]$ неособая, запишем

$$\frac{d\bar{y}(p)}{dp}=-[B_1-pD_1]^{-1}[pD_0-B_0-D_1]\bar{y}(p)+[B_1-pSD_1]^{-1}R(p) \tag{2.27}$$

Уравнение (2.27) — уравнение с дробно-рациональными коэффициентами.

Обозначим в (2.27)

$$H(p) \equiv -[B_1 - pD_1]^{-1}[pD_0 - B_0 - D_1]$$

тогда (2.27) можно переписать в виде:

$$\frac{d\bar{y}(p)}{dp} = H(p)\bar{y}(p) + [B_1 - pD_1]^{-1}R(p) \tag{2.28}$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.28)

$$\frac{d\bar{y}(p)}{dp} = H(p)\bar{y}(p) \tag{2.29}$$

Пусть $Y(p)$ — некоторая фундаментальная матрица решений (2.29). Тогда эта фундаментальная матрица удовлетворяет матричному уравнению:

$$\frac{dY(p)}{dp} = H(p)Y(p) \tag{2.30}$$

и общее решение (2.28) имеет вид

$$\bar{y}(p) = Y(p)G + \int_{p_0}^{p} Y(p)Y^{-1}(z)[B_1 - zD_1]^{-1}R(z)dz \tag{2.31}$$

При выбранном p_0 вектор-константа G выбирается так, чтобы (2.13) определяло $\bar{y}(p)$ как изображение $\bar{y}(t)$, и

$$\lim_{|p|\to\infty} p\bar{y}(p) = \bar{y}_0 = \bar{y}(t)|_{t\to+0}$$

Обозначим

$$\Delta(p) = \mathrm{Det}\,[B_1 - pD_1] \tag{2.32}$$

тогда

$$[B_1 - pD_1]^{-1} = \frac{M(p)}{\Delta(p)} \tag{2.33}$$

где $M(p) = \{m_{ij}(p)\}$, а $m_{ij}(p) = \Delta_{ij}(p)$ — алгебраические дополнения ij — элемента определителя (2.32)

Таким образом, $H(p)$ имеет полюсы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, которые определяются из характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{2.34}$$

Пусть эти полюсы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, — простые. Следовательно, в окрестности полюса можно использовать разложение в ряд Лорана.

$$H(p) = \frac{H_{-1}(\lambda)}{p-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\lambda)(p-\lambda)^k \tag{2.35}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &H_{-1}(\lambda) = \lim_{p\to\lambda}(p-\lambda)H(p) = \frac{M(\lambda)}{\Delta'(\lambda)}[\lambda D_0 - B_0 - D_1] \\ &H_k(\lambda) = \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}[(p-\lambda)H(p)] \\ &k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Структура матричных коэффициентов уравнения (2.30) определена. Теперь задача: с помощью ряда (2.35) найти разложение какой-либо фундаментальной матрицы $Y(p)$ в окрестности той же самой особой точки $p = \lambda$. Это фундаментальная задача аналитической теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим частные случаи систем с дробно-линейными коэффициентами, когда задача анализа системы с помощью преобразования Лапласа разрешима.

ПРИМЕР 1

Рассмотрим линейную систему регулирования второго порядка, которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1(t)}{dt} = a_{11}y_1(t) + \left[\frac{b_{12}^0 + b_{12}^1 t}{d_{01} + d_{11}t}\right]y_2(t) \\ &\frac{dy_2(t)}{dt}\, a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + f(t) \\ &0 \le t < \infty \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

И пусть начальные условия нулевые, то есть

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \tag{2.38}$$

В (2.37) $a_{11}, a_{21}, a_{22}, b_{12}^0, b_{12}^1, d_{01}, d_{11}$ — постоянные величины. Системе (2.37) соответствует следующая структурная схема (рис. 2).

$$K(t) = \frac{b_{12}^0 + b_{12}^1 t}{d_{01} + d_{11}t}, \qquad 0 \le \mathrm{t} < \infty \tag{2.39}$$

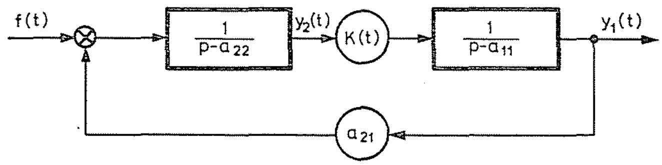

Рис. 2

Будем полагать, что

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} b_{12}^0 & b_{12}^1 \\ d_{01} & d_{11} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad d_{01}\cdot d_{11} > 0 \tag{2.40}$$

Условия (2.40) означают, что переменный коэффициент $K(t)$ не постоянное число и что он не имеет особенностей на интервале времени работы системы.

К системе (2.37) применим преобразование Лапласа, получим систему уравнений в изображениях:

$$\left.\begin{aligned} d_{11}(a_{11}-p)\frac{dy_1(p)}{dp} + [d_{01}(p-a_{11}) - d_{11}]y_1(p) = b_{12}^0 y_2(p) - b_{12}^1\frac{dy_2(p)}{dp} \\ (p-a_{22})y_2(p) = a_{21}y_1(p) + F(p) \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

В (2.41)

$$y_1(t) \risingdotseq y_1(p); \quad y_2(t) \risingdotseq y_2(p); \quad f(t) \risingdotseq F(p)$$

Из системы (2.41) выражая $y_1(p)$ получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка в комплексной плоскости относительно $y_1(p)$

$$\frac{dy_1(p)}{dp} - H(p)y_1(p) = R(p) \tag{2.42}$$

где

$$H(p) = \frac{L(p)}{D(p)}; \qquad R(p) = -\frac{F_1(p)}{D(p)}, \tag{2.43}$$

$$L(p) = d_{01}p^3 - [d_{01}(a_{11}+2a_{22}) + d_{11}]p^2 + \{a_{22}[d_{01}(2a_{11}+a_{22}) + 2d_{11}] - b_{12}^0 a_{21}\}p + a_{22}[a_{21}(b_{12}^0 + b_{12}^1) - a_{22}(d_{01}a_{11} + d_{11})] \tag{2.44}$$

$$F_1(p) = (p-a_{22})\left[b_{12}^0 F(p) - b_{12}^1\frac{dF(p)}{dp}\right] - b_{12}^1 a_{22}F(p) \tag{2.45}$$

$$D(p) = d_{11}p^3 - d_{11}(a_{11}+2a_{22})p^2 + [d_{11}a_{22}(2a_{11}+a_{22}) - b_{12}^1 a_{21}]p + a_{22}(b_{12}^1 a_{21} - d_{11}a_{11}a_{22}) \tag{2.46}$$

или

$$D(p) = d_{11}(p - \lambda_2)(p - \lambda_2)(p - \lambda_3)$$

где

$$\lambda_1 = a_{22}, \qquad \lambda_{2,3} = \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + \frac{b_{12}^1}{d_{11}} a_{21}} \quad (2.46\text{-A})$$

Предполагаем, что $L(p)$ и $D(p)$ не имеют одинаковых корней. Тогда решение (2.42) имеет следующий вид:

$$y_1(p) = e^{\int\limits_{p_0}^{p} H(\theta)d\theta} \left[C + \int\limits_{p_0}^{p} R(\theta) e^{-\int\limits_{p_0}^{\theta} H(\vartheta)d\vartheta} d\theta\right] \quad (2.47)$$

Контура интегрирования в (2.47) расположены в области аналитичности функции $y_1(p)$. Постоянная интегрирования C в (2.47) определяется выбором нижнего предела интегрирования, то есть точки p_0. Пусть точка p_0 расположена в бесконечности, разумеется в полуплоскости аналитичности $y_1(p)$. Тогда

$$y_1(p_0) = C = 0$$

так как было показано выше

$$y_1(p) \sim \frac{1}{p}, \qquad p \to \infty$$

Таким образом

$$y_1(p) = e^{\int\limits_{p_0}^{p} H(\theta)d\theta} \cdot \int\limits_{p_0}^{p} R(\theta) e^{-\int\limits_{p_0}^{\theta} H(\vartheta)d\vartheta} d\theta \quad (2.48)$$

Так как

$$p_0 = \infty$$

$$H(p) = \frac{L(p)}{D(p)} - \alpha + \frac{\mu_1}{p - \lambda_1} + \frac{\mu_2}{p - \lambda_2} + \frac{\mu_3}{p - \lambda_3} \quad (2.49)$$

где

$$\alpha = \frac{d_{01}}{d_{11}}, \qquad \mu = \lim_{p \to \lambda_k} (p - \lambda_k) H(p)$$

$$k = 1, 2, 3$$

Следовательно,

$$e^{\int\limits_{p_0}^{p} H(\theta)d\theta} = e^{\alpha(p - p_0)} \left(\frac{p - \lambda_1}{p^0 - \lambda_2}\right)^{\mu_1} \left(\frac{p - \lambda_2}{p_0 - \lambda_2}\right)^{\mu_2} \left(\frac{p - \lambda_3}{p_0 - \lambda_3}\right)^{\mu_3} \quad (2.50)$$

Подставляя (2.50) в (2.48), получим:

$$y_1(p) = \frac{1}{\varphi(p)} \int_{\infty}^{p} R(\theta)\varphi(\theta)d\theta \tag{2.51}$$

где

$$\varphi(p) = e^{-\alpha p}(p-\lambda_1)^{-\mu_1}(p-\lambda_2)^{-\mu_2}(p-\lambda_3)^{-\mu_3} \tag{2.52}$$

Нетрудно видеть, что вспомогательная функция удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\varphi(p)}{dp} = -H(p)\varphi(p) \tag{2.53}$$

Покажем, что $y_1(p)$ определяемое выражением (2.51) удовлетворяет предельному соотношению преобразования Лапласа. А именно:

$$\lim_{p\to\infty} py_1(p) + y_1(0) = 0$$

Действительно, для больших по модулю p для функции $\varphi(p)$ справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(p) = e^{-\alpha p}p^{-\mu_1-\mu_2-\mu_3}\left(1-\frac{\lambda_1}{p}\right)^{-\mu_1}\left(1-\frac{\lambda_2}{p}\right)^{-\mu_2}\left(1-\frac{\lambda_3}{p}\right)^{-\mu_3} \sim$$
$$\sim e^{-\alpha p}p^{-\mu_1-\mu_2-\mu_3}0(1), \; |p|\to\infty$$

И пусть

$$R(p) - p^{-k}0(1), \quad k>0, \quad |p|\to\infty$$

Тогда с помощью интегрирования по частям нетрудно получить асимптотическую оценку поведения интеграла в (2.51) при больших p.

$$\int_{\infty}^{p} R(\theta)\varphi(\theta)d\theta \sim e^{-\alpha p}p^{-k-\mu_1-\mu_2-\mu_3}\left[1+0\left(\frac{1}{p}\right)\right], \qquad |p|\to\infty$$

Таким образом:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p}{\varphi(p)}\int_{\infty}^{p} R(\theta)\varphi(\theta)d\theta \sim p^{-k+1}\left[1+0\left(\frac{1}{p}\right)\right], \qquad |p|\to\infty$$

Следовательно, (2.51) представляет собой изображение координаты $y_1(t)$, если функция $R(p)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$R(p) \sim p^{-k}\, 0(1), \qquad k>1, \qquad |p|\to\infty$$

Из (2.43) нетрудно видеть, что при любой возмущающей силе это условие выполняется. Таким образом, выходная координата системы (2.37) определяется следующим интегралом обращения:

$$y_1(t) = \frac{1}{2nj} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} y_1(p) dp = \frac{1}{2nj} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \frac{1}{\varphi(p)} \int_{\infty}^{p} R(\theta)\varphi(\theta) d\theta dp \qquad (2.54)$$

(2.54) определяется особенностями подынтегральных функций и в первую очередь особенностями функции $\varphi(p)$. Так как вычеты μ_k ($k = 1,2,3$) функции $H(p)$, определяющиеся формулой (2.49), в общем случае не целые числа, то уместно подчеркнуть, что функция $\varphi(p)$, учитывая её вид (2.52), имеет точки $p = \lambda_k (k = 1, 2, 3)$ в качестве точек разветвления. Подробный анализ процессов, описывающихся интегралами обращения, типа интеграла (2.54), с особенностями подинтегральной функции типа точек разветвления, проведён в работе [6]. Основную роль в исследовании устойчивости процессов описывающихся интегралами типа (2.54), играет доказанная в этой работе теорема λ — разложения, в идее доказательства которой используется асимптотическое представление подинтегральной функции в окрестности сособой точки.

Исходя из результатов, полученных в этой работе, можно сделать вывод: чтобы система (2.37) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, где $\lambda_k (k = 1, 2, 3)$ определяются из (2.46).

Для построения $y_1(t)$ для любого воздействия $f(t)$ можно воспользоваться частотными методами, разработанными в [7].

ПРИМЕР 2

Рассмотрим второй вариант системы второго порядка. Пусть она описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1(t)}{dt} = a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) \\ &\frac{dy_2(t)}{dt} = \left[\begin{array}{c} b_{21}^0 + b_{21}^1 t \\ d_{02} + d_{12} t \end{array}\right] = y_1(t) + a_{22} y_2(t) + f(t) \\ &\qquad 0 \le t < \infty \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

с нулевыми начальными условиями:

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \qquad (2.56)$$

Системе (2.55) соответствует следующая структурная схема (рис. 3): Переменный коэффициент $K(t) = \dfrac{b_{21}^0 + b_{21}^1 t}{d_{02} + d_{12} t}$ и попрежнему удовлетворяет условиям аналогичным (2.40). А именно:

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} b_{21}^0 & b_{21}^1 \\ d_{02} & d_{12} \end{vmatrix} \neq 0, \quad d_{02} \cdot d_{12} > 0 \tag{2.57}$$

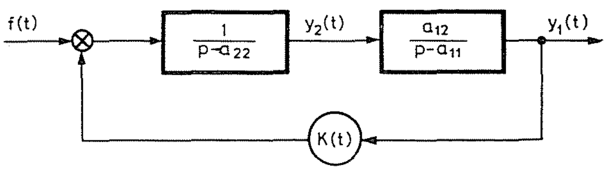

Рис. 3

Применяя к (2.55) преобразование Лапласа и поступая аналогично, как и в предыдущем примере, получим выражение для $y_1(p)$:

$$y_1(p) = \frac{1}{\varphi(p)} \int\limits_{\infty}^{p} R(\theta)\varphi(\theta)d\theta \tag{2.58}$$

В (2.58)

$$R(p) = -\frac{F_1(p)}{D(p)} \tag{2.59}$$

где

$$F_1(p) = a_{12}\left[d_{02}F(p) - d_{12}\frac{dF(p)}{dp}\right]$$

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

$$\varphi(p) = e^{-\alpha p}(p - \lambda_1)^{-\mu_1}(p - \lambda_2)^{-\mu_2} \tag{2.60}$$

$$\alpha = \frac{d_{02}}{d_{12}} > 0, \qquad M_i = \lim_{p \to \lambda_i}(p - \lambda_i)H(p) \qquad (i = 1, 2,)$$

$$H(p) = \frac{L(p)}{D(p)} \tag{2.61}$$

$$L(p) = d_{02}p^2 - [d_{02}(a_{11} + a_{22}) + 2d_{12}]p + d_{12}(a_{11} + a_{22}) + d_{02}a_{11}a_{22} - b_{21}^0 a_{12} \tag{2.62}$$

$$D(p) = d_{12}p^2 - (a_{11} + a_{22})d_{12}p + d_{12}a_{11}a_{22} - b_{21}^1 a_{12} = d_{12}(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \tag{2.63}$$

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{a_{11} + a_{12}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + \frac{b_{21}^1}{d_{12}} a_{12}} \tag{2.64}$$

Таким образом

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \frac{1}{\varphi(p)} \int\limits_{\infty}^{p} R(\theta)\varphi(\theta)d\theta dp \tag{2.65}$$

Опираясь на теорему λ-разложения работы [6], можно сказать, что для устойчивости системы (2.55) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ $(k = 1, 2)$, где $\lambda_k(k = 1, 2)$ определяется из (2.64).

ЗАМЕЧАНИЕ: Система второго порядка, структурная схема которой представлена на рис. 4, представляется эквивалентной структурной схемой на рис. 5. Очевидно, исследование системы, представленной на рис. 4, принципиально ничем не отличается от исследования проведённого в предыдущем примере.

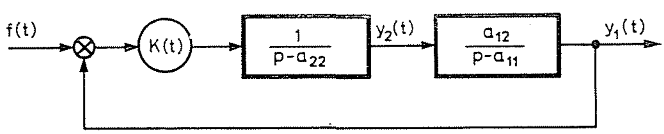

Рис. 4

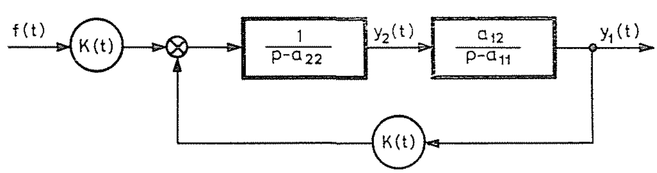

Рис. 5

3. К вопросу о параметрической передаточной функции линейных систем автоматического регулирования с переменными параметрами

Определение и общие свойства параметрической передаточной функции

Имеем матрицу весовых функций $G(t,)\theta$, определяемую формулой (1.10). Нетрудно видеть, что $G(t, \theta)$ удовлетворяет следующим матрично-дифференциальным уравнениям, из уравнений (1.8) и (1.9):

$$\frac{dG(t, \theta)}{dt} = A(t)\, G(t), \theta) \tag{3.1}$$

и

$$\frac{dG(t,\theta)}{d\theta} = -G(t,\theta)A(\theta) \tag{3.2}$$

где $G(\vartheta, \vartheta) = \mathrm{I}$ (I — единичная матрица).

Матрице весовых функций $G(t, \theta)$ ставится в соответствие матрица $W(s, t)$

$$G(t, \theta) = G(t, t-\tau) \leftrightarrow W(s, t)$$
$$\theta = t - \tau$$

которая носит название параметрической передаточной функции и определяется следующим выражением [8].

$$W(s, t) = \int_0^\infty e^{-s\tau} G(t, t-\tau)d\tau = e^{-st} \int_{-\infty}^t e^{s\theta} G(t, \theta)d\theta \tag{3.3}$$

а) Это преобразование выполняется на полубесконечном интервале второго аргумента. Естественно, что должна быть определена матрица $A(t)$ на этом полуинтервале: $A(\theta)$, $\theta \in (-\infty, t)$.

б) Решения системы (1.1) растут не быстрее экспоненты, при ограниченных коэффициентах $A(t)$, то есть $\| A(t) \| \leq a$. Следовательно, при этом предположении преобразование законно. Можно показать, что при таком условии можно указать t, что

$$\| G(t, \theta) \| < e^{Ct}$$

где C — постоянная матрица.

Теорема 1.

$W(s,t)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \leq C$ аналитическая функция, ограниченная по t равномерно для всех s из этой полуплоскости, и обладает следующим асимптотического поведения:

$$W(s, t) \sim \frac{1}{s} I, \quad \text{при} \quad |s| \to \infty, \quad \mathrm{Re}\, s > C \tag{3.4}$$

Доказательство:

Интегрируя (3.3) по частям, и учитывая (3.2), получим:

$$W(s, t) = \int_0^\infty e^{-s\tau} G(t, t-\tau)d\tau = -\frac{1}{s} e^{-s\tau} G(t, t-\tau)\Big|_0^\infty +$$
$$+ \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-s\tau} G(t, t-\tau) A(t-\tau) d\tau$$

если $\operatorname{Re} s > C$, то

$$-\frac{1}{s}e^{-s\tau}G(t, t-\tau)\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}I$$

Таким образом,

$$W(s, t) = \frac{1}{s}I + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-s\tau}G(t, t-\tau)A(t-\tau)d\tau$$

Учтём следующий факт, вытекающий из леммы Беллмана: у нас $\| A(\vartheta) \| \leq a$ из (3.2) легко получить, что $\| G(t, t-\tau) \| \leq ne^{a\tau}$, где n — размерность матрицы $G(t, t-\tau)$.

Таким образом имеем:

$$\left\| \int_0^\infty e^{-s\tau}G(t, t-\tau)A(t-\tau)d\tau \right\| \leq na \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} s\tau + a\tau}d\tau = \frac{na}{\operatorname{Re} s - a} \leq \frac{na}{C-a}$$

Это и доказывает утверждение о характере поведения $W(s,t)$, при $|s| \to \infty$ а одновременно и равномерную ограниченность по t.

Аналитичность функции $W(s, t)$ устанавливается непосредственным дифференцированием.

Замечание: Можно усилить асимптотическое представление, прибегнув ещё к одному интегрированию по частям:

$$W(s, t) = \frac{1}{s}I - \frac{1}{s^2}e^{-s\tau}G(t, t-\tau)A(t-\tau)\Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-s\tau}\frac{d}{d\tau}[G(t, t-\tau)A(t-\tau]d\tau =$$

$$= \frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A(t) + \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-s\tau}\frac{d}{d\tau}[G(t, t-\tau)A(t-\tau)]d\tau.$$

Теорема 2.

Конечные особые точки $W(s, t)$ от времени не зависят.

Доказательство:

По определению параметрической передаточной функции (3.3), имеем:

$$W(s, t) = e^{-st}\int_{-\infty}^{t} e^{s\theta}G(t, \theta)d\theta \tag{3.5}$$

Так как $G(t, \theta) = Y(t)Y^{-1}(\theta)$, где $Y(t)$ — любая фундаментальная матрица решений уравнения (1.1), то (3.5) можно переписать в виде

$$W(s, t) = e^{-st}Y(t)\left\{\int\limits_{-\infty}^{t_0} e^{s\theta}Y^{-1}(\theta)d\theta + \int\limits_{t_0}^{t} e^{s\theta}Y^{-1}(\theta)d\theta\right\} \tag{3.6}$$

В последнем интеграле $e^{s\theta}$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд Тейлора, то есть

$$e^{s\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s\theta)^k}{k!}$$

Тогда, подставив это разложение в последний интеграл, получим:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\theta^k s^k Y^{-1}(\theta)d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t, t_0)s^k \tag{3.7}$$

где

$$b_k(t, t_0) = \frac{1}{k!}\int\limits_{t_0}^{t}\theta^k Y^{-1}(\theta)d\theta \tag{3.8}$$

При всяком конечном s слагаемое (3.7) представляется степенным рядом, следовательно эта функция регулярная, более того — целая.

Интегралы обращения

Из (3.3), применяя обратное преобразование Лапласа, получим:

$$G(t, \theta) = G(t, t - \tau) = \frac{1}{2nj}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s\tau}W(s, t)ds \qquad \theta = t - \tau \tag{3.9}$$

Заметим, что при $\tau < 0$, $G(t, t - \tau) \equiv 0$, в силу оценки по теореме 1, что

$$W(s, t) \sim \frac{1}{s}I + 0\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad \text{при} \quad |s| \to \infty, \quad \operatorname{Re} s > c$$

Выражение для реакции системы (1.1), выражается формулой Коши—Лагранжа

$$\bar{y}(t) = G(t, t_0)\bar{y} + \int\limits_{t_0}^{t} G(t, \theta)\bar{f}(\theta)d\theta \tag{3.10}$$

Подставим в (3.10) выражение (3.9) и поменяем порядки интегрирования, тогда:

$$\int\limits_{t_0}^{t} G(t, \theta)\bar{f}(\theta)d\theta = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-\theta)} W(s, t)ds\bar{f}(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)} W(s,t) \int\limits_{t_0}^{t} e^{-s(\theta-t_0)}\bar{f}(\theta)d\theta ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)} W(s, t)\bar{F} W(s, t_0)ds \qquad (3.11)$$

где

$$\bar{F}(s, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-s(t-t_0)}\bar{f}(t)dt \qquad (3.12)$$

Окончательно (3.10) запишется в виде:

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)} W(s,t)\bar{y}_0 ds + \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)} W(s,t)\bar{F}(s, t_0)ds \qquad (3.13)$$

Для того, чтобы формула (3.13) имела практическую пользу, нам надо уметь вычислять $W(s, t)$ непосредственно по $A(t)$.

Получим уравнение для $W(s, t)$ Продифференцируем (3.3) по t, получим:

$$\frac{dW(s,t)}{dt} = \frac{d}{dt}[e^{-st} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{s\theta}G(t, \theta)d\theta] = -s\, W(s, t) + e^{-st} \frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{s\theta}G(t, \theta)d\theta] =$$

$$= -sW(s, t) + e^{-st} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{s\theta}A(t)G(t, \theta)d\theta + G(t, t)$$

или

$$\frac{dW(s,t)}{dt} = -sW(s, t) + A(t)W(s, t) + I$$

Окончательно

$$\frac{dW(s,t)}{dt} = [A(t) - sI]W(s, t) + I \qquad (3.14)$$

Теперь задача: используя уравнение (3.14), попытаться установить свойства $W(s,t)$, как функции s, в первую очередь, и как функции t—во вторую. Задача буквального вычисления $W(s, t)$ просто бессмысленна.

Для $W(s, t)$ можно указать ещё одно уравнение — интегральное. Вспомним уравнение (3.2), то есть

$$\frac{dG(t, \theta)}{d\theta} = - G(t, \theta)A(\theta) \tag{3.15}$$

так как $G(t, \theta) \doteqdot W(s, t)$
то

$$e^{-st}\int\limits_{\infty}^{t} e^{s\theta}\frac{dG(t, \theta)}{d\theta}d\theta = \underbrace{e^{-st}\cdot e^{s\theta}G(t, \theta)\Big|_{-\infty}^{t}}_{I \text{ при } \operatorname{Re} s > c} - se^{-st}\int\limits_{-\infty}^{t} G(t, \theta)e^{s\theta}d\theta$$

Следовательно

$$\frac{dG(t, \theta)}{d\theta} \doteqdot I - sW(s, t) \tag{3.16}$$

Применяя к обеим частям уравнения (3.15) преобразование Лапласа, получим

$$sW(s, t) - I = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(z, t)\, A\,(s - z, t)dz \tag{3.17}$$

где

$$A(s, t) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s\tau}A(t - \tau)d\tau$$

В (3.17) контур интегрирования разделяет особенности функции $W(z, t)$ и $A(s - z, t)$ на плоскости z. Выбором s такой раздел всегда можно осуществить.

ПРИМЕР 3

Если $A(t)$ — дробно-рациональная матрица, то можно указать более простое уравнение, определяющее параметрическую передаточную функцию. Пусть

$$A(t) \equiv \frac{1}{D(t)}B(t) \tag{3.18}$$

причём, пусть степень знаменателя, полинома $D(t)$, больше степени полинома $B(t)$. Тогда коэффициенты матрицы $A(t)$ ограниченны и все наши результаты применимы к данному классу систем.

Имеем:

$$\frac{dG(t, \theta)}{d\theta} = - G(t, \theta)A(\theta)$$

или

$$\frac{dG(t, t-\tau)}{d\tau} = G(t, t-\tau)A(t-\tau) \tag{3.19}$$

(3 19), учитывая (3.18), можно переписать в виде

$$D(t-\tau)\frac{dG(t, t-\tau)}{d\tau} = G(t, t-\tau)B(t-\tau) \tag{3.20}$$

Пусть степень полинома $D(t-\tau) - p$, а степень полинома $B(t-\tau) - q$. По условию $p \geq q$. Разложим $D(t-\tau)$ и $B(t-\tau)$ в ряды Тейлора по степеням τ.

$$D(t-\tau) = \sum_{k=0}^{p} d_k(t)\tau^k \tag{3.21}$$

$$B(t-\tau) = \sum_{k=0}^{q} b_k(t)\tau^k \tag{3.22}$$

Подставив (3.21) и (3.22) в (3.20), получим:

$$\sum_{k=0}^{p} d^k(t)\tau^k \frac{dG(t, t-\tau)}{d\tau} = \sum_{k=0}^{q} G(t, t-\tau)b_k(t)\tau^k \tag{3.23}$$

Переходя в (3.23) к изображениям, получим:

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{ds^k}[sW(s, t) - I]d_k(t) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{ds^k}[W(s, t]b_k(t) \tag{3.24}$$

Особые точки могут быть точно указаны для (3.24).

ПРИМЕР 4

Если $A(t)$ выражается линейной комбинацией экспоненциальных матриц, то есть

$$A(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i e^{\lambda_i t}$$

то тогда

$$A_i(s, t) = \int_0^\infty e^{-s\tau}A_i(t-\tau)d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

или

$$A_i(s, t) = \int_0^\infty e^{-s\tau}c_i e^{\lambda_i(t-\tau)}d\tau = c_i e^{\lambda_i t}\int_0^\infty e^{-(s+\lambda_i)\tau}d\tau = c_i e^{\lambda_i t}\frac{1}{s+\lambda_i} = A_i(t)\frac{1}{s+\lambda_i}$$

при условии: $\mathrm{Re}(s+\lambda_i) > 0$

То есть $A_i(s, t) = A_i(t)\dfrac{1}{s+\lambda_i}$, и λ_i — простые полюса для $A_i(s, t)$. Тогда в уравнении (3.17), в правой части, можно вычислить по теореме вычетов.

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(z, t)A_i(s-z, t)dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi_j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(z, t)\frac{A_i(t)}{z-(s-\lambda_i}dz = -W(s-\lambda_i)A_i(t)$$

и таким образом (3.17) в нашем случае примет следующий вид:

$$sW(s, t) - I = -\sum_{i=0}^{\infty} A_i(t)W(s-\lambda_i, t) \tag{3.25}$$

Приложение

Лемма 1. (Обобщение основной леммы Беллмана).

Пусть $w(t) > 0$ *и монотонно не убывает, и пусть* $u(t) \geq 0$ *и* $v(t) \geq 0$, и имеет место неравенство

$$u(t) \leq w(t) + \int\limits_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta, \qquad t > t_0 \tag{1}$$

тогда

$$u(t) \leq w(t)\ \exp\int\limits_{t_0}^{t} v(\theta)d\theta, \qquad t > t_0 \tag{II}$$

Доказательство:

Из (1) получаем

$$\frac{u(t)v(t)}{w(t)+\int\limits_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta} \leq v(t)$$

или

$$\frac{w'(t)+u(t)v(t)}{w(t)+\int\limits_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta} \leq v(t) + \frac{w'(t)}{w(t)+\int\limits_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta} \leq v(t) + \frac{w'(t)}{w(t)}$$

то есть, имеем

$$\frac{w(t)+u(t)v(t)}{w(t)+\int\limits_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta} \leq v(t) + \frac{w'(t)}{w(t)}$$

Проинтегрировав обе части этого неравенства от t_0 до t, мы получим неравенство

$$\ln\ [w(t)+\int_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta]-\ln w(t_0)\leq \ln w(t)-\ln w(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(\theta)d\theta$$

или

$$u(t)\leq w(t)+\int_{t_0}^{t} u(\theta)v(\theta)d\theta\leq q(t)\ \exp\int_{t_0}^{t} v(\theta)d\theta$$

ч. т. д.

Резюме

В данной работе получены аналитические результаты, позволяющие указать класс систем автоматического регулирования с переменными параметрами, для которых преобразование Лапласа может оказаться эффективным средством анализа. А именно: для линейных систем автоматического регулирования с ограниченной переменной матрицей коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего эти системы. Указан общий подход применения преобразования Лапласа для систем с полиномиальными и дробно-линейными коэффициентами.

В работе приводятся уравнения для нахождения параметрической передаточной функции для указанного класса систем. Получены теоремы о поведении параметрической передаточной функции, как функции от комплексной переменной.

Литература

1. ПОНТРЯГИН Л. С.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Наука», Москва, 1965.
2. БЕЛЛМАН Р.: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. «ИЛ», Москва, 1954.
3. ДЁЧ Г.: Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. «Наука», Москва, 1965.
4. АЙНС Э. Л.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1933.
5. DUNCAN D.: Responce of Linear Time-Dependent Systems to Random Inputs. Journal of Applied Physics, vol. 24, No. 5, 1953.
6. БАРАБАНОВ А. Т.: Теория линейных нестационарных систем с особой точкой. Устойчивость систем. «Автоматика и телемеханика», т. 30, № 6, 1969.
7. БАРАБАНОВ А. Т., КУЗНЕЦОВ В. М., ТОМИН Ю. И.: Частотные характеристики нестационарных систем управления конечным положением и их применение для анализа систем. «Труды I-ой Поволжской конференции по автоматическому управлению», Куйбышев, 1970.
8. ZADEH L. A.: Frequensy analysis of variable network. PIRE, vol. 38, No. 3, 1950.

МАЛАШЕНКО, В. М. Н—1521, Будапешт.