НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Я. КОЧИШ — П. ЭТВЕШ*

Кафедра Автоматизации Будапештского Технического Университета

(Поступила в редакцию 18 марта 1972 г.)

Представлено проф. д-р Ф. ЧАКИ

При решении задач в области управления в общем случае предварительно следует изучать режим управляемого объекта. Предварительное изучение объекта особенно важно в том случае, если априорная информация мала и измеряемые в системе сигналы представляют собой стохастические величины, с неизвестным распределением. Тогда необходимо проводить идентификацию объекта. Под термином «идентификация» здесь подрезумевается процесс, в результате которого определяются структура и различные параметры управляемого объекта при некоторой начальной неопределенности и случайно изменяющихся входных и выходных сигналах, без того, чтобы вмешиваться в нормальный режим объекта путем введения поисковых сигналов или других возмущающих воздействий.

В ходе реализации алгоритмов идентификации возникают разные проблемы в отношении оценки, а именно:

— работоспособность процесса идентификации (сходимость процесса идентификации и определение параметров, близких к действительному значению параметров);

— предварительная оценка изменяемых параметров в алгоритмах идентификации;

— точность результатов идентификации;

— выбор наилучшего алгоритма идентификации и т. д.

В настоящей работе делается попытка наглядного представления вышеуказанных проблем на простом примере, на примере определения параметров одномерного линейного, периодического звена. В то же время подчеркивается, что подобного характера проблемы возникают и при идентификации любой статической или динамической, линейной или нелинейной, одномерной или многомерной системы.

* Сегхаломское гос. хозяйство.

Формулировка задачи

Пусть задано одномерное, линейное, динамическое звено, представленное на рис. 1. На основе измерений входного сигнала (x) и выходного сигнала (y), аддитивно смешанного с помехой с нулевым средним и ограниченной дисперсией, следует определить коэффициент усиления (A), демпфирование (ζ), и постоянную времени (T) звена.

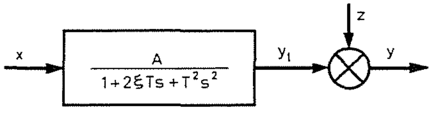

Рис. 1

Алгоритм идентификации построен по следующему принципу. Предполагается, что помеха не действует ($z = 0$), а параметры A, ζ, T известны. Тогда уравнение *модели* объекта составляется в следующем виде:

$$\hat{y}(t) = \frac{A}{T^2} \int_0^t \int_0^\tau x(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\tau - \frac{2\zeta}{T} \int_0^t y(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \frac{1}{T^2} \int_0^t \int_0^\tau y(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

что можно переписать на векторную форму:

$$\hat{y}[n] = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}[n-1]\, \mathbf{u}[n],$$

где

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A/T^2 \\ -2\zeta/T \\ -1/T^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iint x\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\tau \\ \int y\, \mathrm{d}\tau \\ \iint y\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\tau \end{bmatrix}; \tag{2}$$

далее

$$\mathbf{c}[n-1] = \mathbf{c}(t)\big|_{t=(n-1)T_1}; \quad \mathbf{u}[n] = \mathbf{u}(t)\big|_{t=nT_1} \tag{3}$$

(здесь через T_1 обозначается период повторения снятия проб, если идентификация проводится не в аналоговом, непрерывном виде, а, например, с помощью ЦВМ в импульсном виде).

Пусть результат идентификации считается удовлетворительным, если к концу идентификации неизвестных параметров ($\mathbf{c}$) среднеквардатичное отклонение между действительным выходным сигналом объекта и приближенным выходным сигналом модели минимально в смысле математического ожидания:

$$J(c) = M\{(y - \hat{y})^2\} = M\{(y - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{u})^2\} \to \min_{\mathbf{c}}, \tag{4}$$

т. е. если выполняется условие

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\mathbf{c}} = -2M\{(y - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u})\mathbf{u}\} = 0. \tag{5}$$

Для решения уравнения регрессии (5) применяется вариант метода стохастической аппроксимации, предложенный Цыпкиным [1]:

$$\mathbf{c}[n] = \mathbf{c}[n-1] + \mathbf{R}[n]\,(y[n] - \hat{y}[n])\,\mathbf{u}[n], \tag{6}$$

где $\mathbf{R}[n]$ представляет собой так называемую матрицу коэффициентов сходимости. По нашим исследованиям [2] для определения $\mathbf{R}[n]$ можно использовать следующие формулы:

1. скалярный коэффициент сходимости:

$$r[n] = \frac{a}{nT_1 + b}; \qquad (a, b \text{ — постоянные}). \tag{7}$$

2. скалярный коэффициент сходимости, определенный в зависимости от результатов измерений (самый простой квазиоптимальный алгоритм, см. в [2]):

$$r[n] = \frac{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}[n]\,\mathbf{u}[n]}{\sum\limits_{m=1}^{n} (\mathbf{u}^{\mathrm{T}}[n]\,\mathbf{u}[m])^2}. \tag{8}$$

3. $\mathbf{R}[n]$ диагональная матрица (квазиоптимальный алгоритм [2]:

$$\mathbf{R}[n] = \mathrm{diag}\, r[n] = \mathrm{diag}\,(r_1[n], r_2[n], r_3[n]),$$

где $r_i[n]$ определяется из следующего соотношения:

$$u_j[n] - \sum_{i=1}^{3} r_i[n]\, u_i[n] \sum_{m=1}^{n} u_i[m]\, u_j[m] = 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{9}$$

4. $\mathbf{R}[n]$ квадратичная матрица: рекуррентное соотношение метода наименьших квадрат [2]:

$$\mathbf{R}[n] = \mathbf{R}[n-1] - \frac{(\mathbf{R}[n-1]\,\mathbf{u}[n])\,(\mathbf{R}[n-1]\,\mathbf{u}[n])^{\mathrm{T}}}{1 + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}[n]\,\mathbf{R}[n-1]\,\mathbf{u}[n]}. \tag{10}$$

Эксперименты были проведены на ЦВМ (типа РАЗДАН-3), программы были составлены на языке АЛГОЛ. Проблемы оценки идентификационного процесса рассматривались на основе алгоритмов (6), (10), хоть и были проведены некоторые сравнения эффективности коэффициентов сходимости (7—10). Эксперименты осуществлялись следующим образом:

— была составлена модель исследуемого объекта (см. рис. 1);

— снималась проба с модели объекта с периодом повторения T_1 (для цифрового интегрирования использовался модифицированное правило Симпсона, см. например, в [4]);

— программа идентификатора была составлена на основе алгоритмов (6), (10), с периодом повторения проб идентификатора T_2;

— во всех экспериментах начальным условием матрицы коэффициентов сходимости была избрана единичная матрица $\mathbf{R}[0] = \mathbf{I}$;

— начальным условием неизвестных параметров был избран нулевой вектор ($\mathbf{c}[0] = \mathbf{1}$);

— процесс повторялся периодом T_3, в ходе повторения начальное условие матрицы сходимости было $\mathbf{R}(nT_2) = \mathbf{I}$, а начальное условие вектора параметров равнялось конечному значению вектора в конце предыдущего периода $\mathbf{c}(nT_2)$;

— процесс автоматически был остановлен, если было выполнено условие

$$\max\left\{|c_i(NT_2) - c_i[(N-1)\,T_2]|\right\} < 10^{-3} \qquad (11)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Как это было показано в работе [2], процесс идентификации по алгоритмам (6), (10) с точки зрения *работоспособности* оказался весьма эффективным, поэтому этим вопросом в настоящей работе отдельно заниматься не будем.

1. Предварительная оценка параметров идентификации

При реализации вышеуказанного решения задачи идентификации предварительно следует определить следующие три параметра:

T_1 — период повторения снятия проб с объекта;

T_2 — период повторения снятия проб в алгоритме идентификации;

T_3 — период повторения целого процесса идентификации.

а) *Период повторения снятия проб с обьекта*

В общем случае здесь мы можем приводить лишь эмпирическую оценку, по следующим возможным рассуждениям. Период повторения должен быть достаточно малым для того, чтобы полезная информация не потерялось (см. например, в [3] теорему Котельникова о снятии проб), но в то же время, если слишком часто снимать пробу с объекта, то необходимо хранить лишнее количество информации, что приводит — как в аналоговых, так и в цифровых устройствах — существенному увеличению затрат. При идентификации данного простого колебательного звена период повторения снятия проб с объекта определяется собственной частотой системы

$$\omega_1 = \frac{1}{T}\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{12}$$

Итак, в ходе решения задачи в том случае ожидаются хорошие результаты, если период повторения снятия проб при идентификации указанного простого звена определяется внутри границ, выбранных по неравенству

$$T_2 \leq \frac{2\pi}{4\omega}. \tag{13}$$

б) *Период повторения снятия проб в алгоритме идентификации*

Период повторения снятия проб в алгоритме идентификации не обязательно совпадает с периодом повторения снятия проб с объекта. В качестве общего принципа, мы здесь указываем также на необходимость предварительного изучения динамических свойств исследуемого объекта: надо стремиться к тому, чтобы — если предполагать динамические процессы колебательного характера в системе — было достаточное количество проб с отдельных волн в нашем распоряжении, в интерисующей нас области. Для того, чтобы решить эту проблему предварительно, сначала следует исследовать колебания, возникшие в системе; при этом необходимо определить примерную область частот волн, важных с точки зрения искомых параметров, а затем выбрать из них самую высокую частоту, и снимать как минимум 4—8 проб с каждого колебания компонента сигнала, изменяющегося самым быстрым образом. Если предложение суммировать в эмпирической формуле:

$$4 < K < 10-15, \tag{14}$$

где через K обозначаем общее количество проб, снятых за один период компонента с наивысшей частотой. Верхняя граница определяется из чисто логических рассуждений: если снять за один период больше чем 10—15 проб, то это уже не увеличивает количество полезной информации.

Для наглядного представления вышеуказанных принципов были проведены эксперименты (рис. 2). По результатам очевидно, что при слишком коротком периоде снятия проб (см. рис. 2а) процесс идентификации весьма медленного сходится к правильному решению уравнения регрессии (5), процесс обучения идентификации очень медленно находит искомые параметры. А если снимается правильное количество проб (рис. 2б), то процесс сходится быстрее, и наилучшие результаты достигнуты (рис. 2в) при одновременном соблюдении соотношений (13—14), т. е., если период повторения снятия проб с объекта выбирается в соответствии с требованиями точного моделирования объекта, и в то же время в идентификаторе период снятия проб больше предыдущего периода.

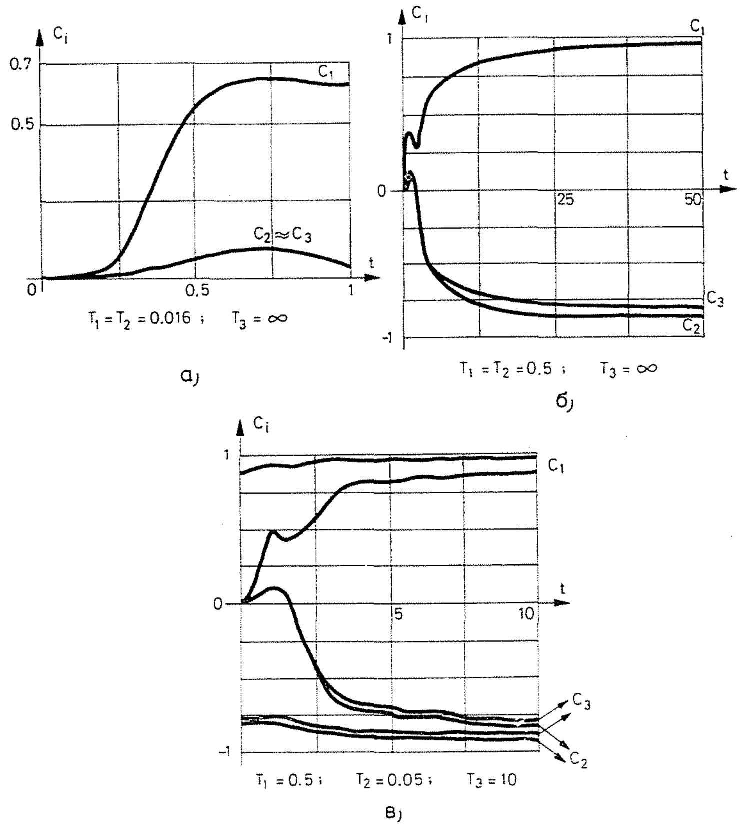

Рис. 2

в) *Период повторения процесса идентификации в целом*

Как об этом нетрудно убедиться по результатам, представленным на рис. 2в, соответствующая предварительная оценка периода повторения процесса идентификации в целом играет существенную роль с точки зрения определения эффективного алгоритма идентификации. В ходе эксперимента, результаты которого представлены в рис. 2в, процесс идентификации в целом повторялся периодом $T_3 = 10$ единиц времени и, таким образом, по истечению 5 циклов ($N = 5$) идентификация автоматически остановилась. Довольно затруднено дать общее решение этой проблемы по теории информации, и здесь мы ограничиваемся лишь тем, что ниже представим таблицу, в которой собраны результаты проведенных нами некоторых экспериментов для наглядности. Все эксперименты были проведены при следующих зафиксированных параметрах:

$$T_1 = T_2 = 0{,}5\,; \quad x(t) = 5 \cdot \cos \frac{\pi}{2} t\,.$$

Таблица I

№№	T_3	c_i^*	отн. ошибка = $c_i = c_i - c_i^* / 100c_i^*$		K (количество проб в идентификаторе)
1.	50	1	0.95811	4.189	100
2.	10	1	1.00088	—0.088	120
3.	100	1	1.00097	—0.097	600
4.	3	1	0.99876	0.124	210

Путем эмпирической оценки может быть заключен вывод, что второй случай был самым выгодным с точки зрения решения задачи, так как — хоть и в отношении точности нет существенной разницы между случаями №№ 2—3—4 — во втором случае ЦВМ работала значительно меньше (120 точек измерения).

По сравнению первых двух экспериментов оказывается, что путем соответствующего выбора периода повторения процесса идентификации в целом, при одинаковом количестве точек измерений можно 10-и или 100-кратно увеличивать точность процесса идентификации.

Выяснение решения обобщенной задачи определения периода процесса в целом выходит из рамки настоящей работы, но очевидно значение данной проблемы.

Точность процесса идентификации

Для того, чтобы представить проблемы предварительной оценки процесса идентификации, был проведен нами ряд экспериментов, результаты которых изображены на рис. 3. При всех экспериментах следующие параметры были одинаковые: $T_1 = T_2 = 0{,}5$; $T_3 = 10$; $x(t) = 3{,}18 \arccos(\cos \pi/2t)$. На рис. 3 представлена относительная ошибка процесса идентификации по следующей формуле:

$$h_i = \frac{c_i^* - c_i}{c_i^*}\,, \tag{15}$$

где c_i^* представляет собой i-тый компонент вектора $\mathbf{c}^*$; знак * указывает точное значение идентифицируемых параметров, а через c_i обозначены рассчитанные значения параметров.

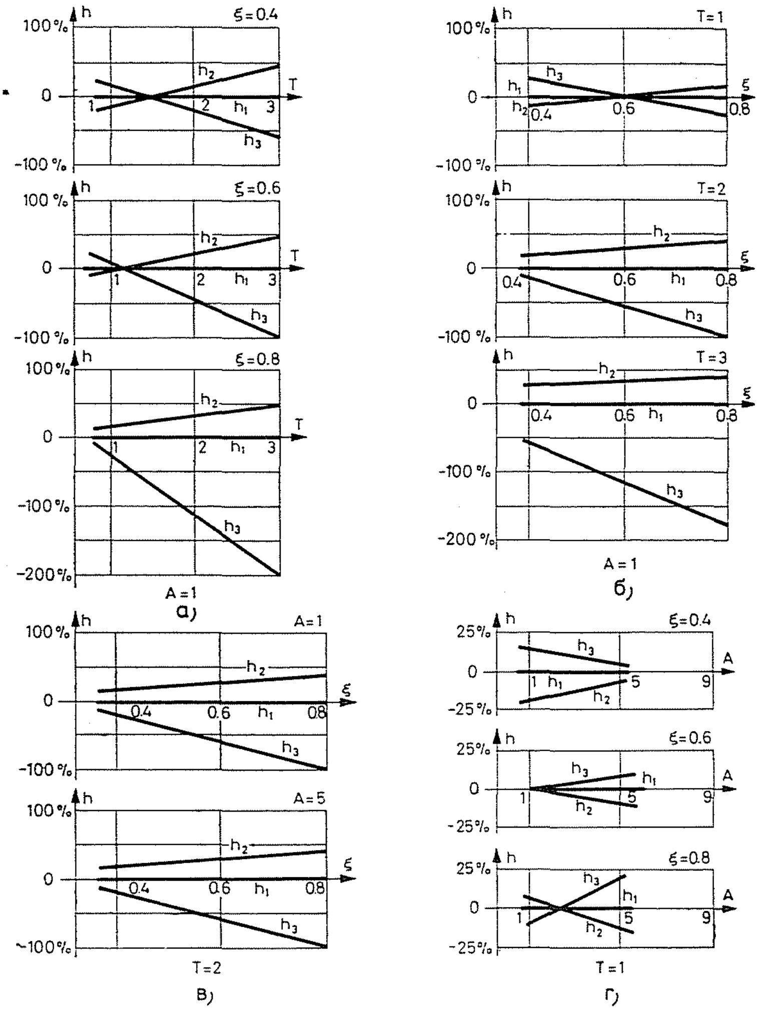

Рис. 3

По результатам экспериментов возможно заключить следующие эмпирические выводы:

1. Точность результатов идентификации существенно зависит от того, насколько различаются идеальные значения отдельных искомых компонентов вектора **c** неизвестных параметров. Для того, чтобы получить точные результаты при идентификации, предварительно следует соответствующим образом взвешивать отдельные компоненты вектора **u**. В настоящей работе мы такое взвешивание не проводили, этим фактом и объясняется, в первую очередь, большая относительная ошибка проведенных экспериментов.

2. По результатам очевидно, что ожидаемая область относительно точной идентификации будет примерно следующая:

$$\begin{aligned} 1 &< A < 5 \ ; \\ 1 &< T < 2 \ ; \\ 0{,}4 &< \zeta < 0{,}8 \, , \end{aligned} \tag{16}$$

т. е. в пространстве искомых параметров возможно определить границы относительно точной идентификации, внутри которых полученные результаты будут правильные. Для предварительного выяснения этих границ необходимо иметь приближенные сведения о временной характеристике компонентов вектора $\mathbf{u}$.

Выводы

В настоящей работе рассматривались две практические проблемы реализации алгоритмов идентификации, а именно: проблема предварительного выбора различных параметров идентификации и ожидаемая точность идентификационных процессов. Чисто эмпирическим путем, на простом примере колебательного звена показаны важность предварительных оценок и реальные возможности в обеспечении точности.

Резюме

В статье рассматриваются две практические проблемы реализации алгоритмов идентификации: проблема предварительного выбора различных параметров идентификации (период повторения снятия проб с объекта, период повторения процесса идентификации) и ожидаемая точность процессов идентификации. Для наглядности на простом примере колебательного звена представлена важность предварительных оценок и показаны реальные возможности в обеспечении точности.

Литература

1. Цыпкин, Я. З.: Основы теории обучающихся систем. Изд. «Наука», Москва, 1970.
2. Кочиш, Я.—Этвеш, П.: О динамической идентификации линейных объектов. Пер. пол., Эл., (1973).
3. Цыпкин, Я. З.: Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, Москва, 1963.

4a. **Csáki, F.: Korszerű szabályozáselmélet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.**

4b. **Csáki, F.: Modern control theories. Nonlinear, optimal and adaptive systems. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1972.**

Д-р Я. Кочиш
1502 Будапешт п/я 91
П. Этвеш
Сегхаломское гос. хозяйство
Сегхалом, Венгрия