

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Я. КОЧИШ — П. ЭТВЕШ*

Кафедра Автоматизации Будапештского Технического Университета

Представлено проф. д-р Ф. ЧАКИ

(Поступила в редакцию 18 марта 1972 г.)

Введение

За последние годы много авторов в мировой специальной литературе уделяют большое внимание вопросу формулировки обобщенной задачи идентификации. В этой области считается одной из основных работа соавторов Эйкгофф — Квакернак — ван дер Гринтен — Вельтман [1], которая была изложена на III-ем конгрессе Международного Комитета Автоматизации (IFAC), в 1966 г., в Лондоне. Следует припомнить, что ряд других авторов занимался также вопросами обобщенной задачи идентификации [2—6]. В ходе проектирования систем автоматического управления одной из главных задач является определение структуры и различных параметров (напр. коэффициенты усиления, постоянные времени, демпфирования и т. д. в линейных динамических системах) управляемого объекта. Это означает для инженера-проектировщика необходимость определения математической модели данного конкретного технологического процесса на основе проведенных измерений и изучения самого процесса. На последнем конгрессе ИФАК (1969, Варшава) Балакришнан и Петерка именно таким образом сформулировали *общую задачу идентификации*, как задачу конструирования математической модели управляемого объекта. Эти же авторы заключили такой вывод в связи с общим подходом к задаче идентификации, что еще до окончательного формирования данного конкретного алгоритма идентификации необходимо найти ответы на следующие четыре самых важных вопроса:

— Какой критерий оптимальности выбирается в ходе выполнения идентификации системы?

— Какого типа модель составляется для описания системы?

— Какой математический метод применяется при решении задачи?

— Какие сигналы — входные и выходные — измеряются на данном процессе (непрерывные или дискретные, детерминистические или стохастические и т. д.)?

* Сегхаломское гос. хозяйство.

Ниже дается следующий ответ на первый вопрос — так же, как и в [7]: пусть выбирается критерий оптимальности идентификации системы на квадратичный, т. е. процесс идентификации считается удовлетворительным в том случае, если среднеквадратичное отклонение приближенного выходного сигнала математической модели, определенной в результате процесса обучения, и действительного выходного сигнала объекта минимально. По выводам опубликованных результатов и по нашим опытам также — именно такой выбор критерия оптимальности обеспечивает наилучшие результаты для решения задач в области идентификации линейных систем автоматического управления.

В отношении типа математической модели — нами поставлено лишь такое ограничение, чтобы выходной сигнал модели возможно было получить как скалярное произведение двух векторов. Один из этих векторов содержит в себе предварительно неизвестные параметры, а второй вектор может быть воспроизведен по измеренным входным и выходным сигналам. По сути дела модель объекта такого типа соответствует описанию многомерных объектов с помощью рядов Вольтерра [6], если цель идентификации заключается в определении ядер рядов Вольтерра первой степени.

По методу исчислений нами был выбран рекуррентный метод [8]), а эффективность метода исследовалась по сравнению с методом стохастической аппроксимации [6, 9]. При выборе применяемого математического метода нами была поставлена — прежде всего — цель: не слишком сложная реализуемость. При использовании метода рекуррентной регрессии нижеуказанные алгоритмы идентификации и готовые программы, составленные на языке АЛГОЛ, могут быть поставлены на ЦВМ средних мощностей с емкостью оперативной памяти 16—32 Кбайт, легко доступные для инженеров в Венгрии, для идентификации не только одномерных, но многомерных промышленных объектов с несколькими десятками параметров.

Форма представления сигналов безразлична с точки зрения нижеуказанных алгоритмов. При составлении общего алгоритма идентификации мы считались с сигналами, полученными как решетчатые функции от непрерывного измеряемого сигнала.

Некоторые проблемы применения нижеуказанных алгоритмов в инженерной практике можно суммировать в следующем. В первую очередь — хотя для идентификации необходимо относительно небольшое количество априорной информации — следует иметь предварительно некоторые знания об исследуемом процессе. В ходе предварительного изучения объекта следует решить о проблеме: соответствует ли линейная структура модели действительности, т. е. может ли быть по крайней мере линеаризована статическая характеристика объекта в области стационарной рабочей точки, не имеются ли существенные нелинейности (например элемент задержки)? Следующее требование: надо иметь некоторое представление об области действительных

значений постоянных времени и демпфирований объекта. Физически это нетрудно доказать: постоянная времени объекта с значением несколько секунд не может быть определена, если проводить измерения через каждые полчаса на объекте. Относительно важную роль играет выбор правила останова процесса идентификации также.

А если не считаться с вышеуказанными предложениями в достаточной степени, то может быть и процесс идентификации хоть будет устойчивым, но нет такой возможности, чтобы убедиться в адекватности полученных результатов.

1. Классический метод на основе стохастической аппроксимации

Метод стохастической аппроксимации [6] по нашим сведениям был применен Цыпкиным [9] впервые для решения обобщенной задачи идентификации.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть будет y некоторая случайная величина, функция распределения которой $p(y|c)$ зависит от параметра c ($-\infty < c < \infty$). Предположим, что существует, но неизвестен функционал $J(c) = M_c\{y\}$ (здесь $M_c\{y\}$ обозначает математическое ожидание случайной величины y при фиксированном значении параметра c), и, при заданной, зафиксированной величине a действительно уравнение

$$J(c) = a, \quad (1)$$

которое имеет единственное решение c^* . Составим последовательность случайных переменных $c[n]$ таким образом, чтобы при $n \rightarrow \infty$, $c[n] \rightarrow c^*$. Роббинс и Монро [9] предлагали следующую последовательность случайных чисел:

$$c[n] = c[n-1] + r[n] y[n] (a -), \quad (2)$$

где $r[n]$ — определенная последовательность положительных действительных чисел (например гармонический ряд), и авторами были определены условия сходимости этого итеративного метода.

Метод стохастической аппроксимации, предложенный во вышеуказанной форме, Цыпкиным был применен для идентификации линейных объектов, в следующем виде: если целью идентификации является построение итеративного метода, определяющего минимум функционала (уравнения регрессии)

$$J(c) = M_x\{(y - c^T u)^2\} \rightarrow \min_c, \quad (3)$$

то алгоритм решения такой задачи имеет следующий вид:

$$c[n] = c[n-1] + R[n] (y[n] - c[n-1]^T u[n]) u[n], \quad (4)$$

где \mathbf{c} обозначает N -мерный столбцовый вектор неизвестных параметров (вектор коэффициентов усиления, постоянных времени демпфирований, и т. д.), \mathbf{x} — измеряемые в объекте величины, а \mathbf{u} — N -мерный столбцовый вектор, воспроизводимый на основе преобразования измеряемых сигналов. \mathbf{R} представляет собой диагональную матрицу (элементы которой: r_i). Для сходимости алгоритма (4) необходимо выполнение следующих условий:

$$1. \quad M_{\mathbf{x}}\{(\mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{u})^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u}\} \leq d(a + \|\mathbf{c}\|^2); \quad (5)$$

$$(a = 0 \text{ или } 1)$$

$$2. \quad 0 \leq r_i[n] \leq r_0(a, b); \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_i[n] = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_i^2[n] < \infty,$$

где $b = 1$, если величина $(\mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{u})\mathbf{u}$ измеряется с аддитивной помехой с нулевым средним и ограниченной дисперсией, и $b = 0$, если нет помех. При выполнении условий сходимости алгоритм (4) сходится с вероятностью единицы, т. е. $\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} [J(\mathbf{c}[n]) - \text{extr } J(\mathbf{c})] = 0\} = 1$.

В первом приближении диагональная матрица \mathbf{R} заменяется скалярным коэффициентом сходимости, и при выборе ее значения определяется независимо от данных измерений. В таком случае вид алгоритма (4) будет следующий:

$$\mathbf{c}[n] = \mathbf{c}[n-1] + r[n] (\mathbf{y}[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n], \quad (7)$$

где

$$r[n] = \frac{a}{t^{\alpha} + b}; \quad 0,5 < \alpha \leq 1. \quad (8)$$

Этот случай соответствует оригинальному методу стохастической аппроксимации, для него выполняются условия сходимости. Построение алгоритма простое, алгоритм легко реализуется на ЦВМ. В то же время существенным недостатком алгоритма является то, что нам предварительно ничего не известно о выборе постоянных величин a , b , α в формуле (8). При практическом применении следует проводить эксперименты при разных величинах a , b , α , что требует больших затрат машинного времени.

2. Скалярный, субоптимальный коэффициент сходимости

Вид предлагаемого второго алгоритма совпадает с видом соотношения (7), но здесь коэффициент $r[n]$ определяется по следующим рассуждениям. Для оценки обучающегося метода идентификации введем меру, т. е.

новый функционал, с помощью которого в каждой точке времени оценивается «дистанция» между мгновенным и оптимальным состоянием. Для решения данной задачи доказательство проводится по [11]. По соотношению (3) целью идентификации является минимизация функционала

$$J(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{X}} [y(\mathbf{x}) - \mathbf{c}^T \mathbf{u}(\mathbf{x})]^2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{c}}. \quad (9)$$

Имеется возможность для воспроизведения оценки $\hat{J}(\mathbf{c})$ этого оригинального функционала $J(\mathbf{c})$. Для воспроизведения оценки введем эмпирическую оценку $\hat{p}(\mathbf{x})$ оригинальной (и неизвестной) функции распределения $p(\mathbf{x})$ в следующей форме:

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}[m]), \quad (10)$$

где $\mathbf{x}[m]$ обозначает измеряемые в объекте сигналы, а δ — многомерная дельта-функция Дирака:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{если } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0; \\ \infty & \text{если } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \end{cases} \quad (11)$$

и,

$$\int_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0). \quad (12)$$

С помощью таких обозначений оценка функционала (9) будет следующая:

$$\hat{J}(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{X}} [y(\mathbf{x}) - \mathbf{c}^T \mathbf{u}(\mathbf{x})]^2 \hat{p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (13)$$

Поставим соотношение (10) в уравнение (13), и, таким образом, если иметь в виду определение (12), получится следующее соотношение:

$$\hat{J}(\mathbf{c}[n]) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (y[m] - \mathbf{c}[n]^T \mathbf{u}[m])^2 \rightarrow \min_{r[n]}. \quad (14)$$

Если воспроизводится частная производная (14) по $r[n]$, и она равняется нулю, то — если соблюдать уравнение (7) как ограничение и проводить соответствующие упрощения — получится следующее соотношение (см. подробно в Приложении, № 1):

$$r[n] = \frac{\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[n]}{\sum_{m=1}^n (\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[m])^2}; \quad (15)$$

или, с помощью рекуррентных соотношений:

$$r[n] = \frac{g[n]}{f[n]},$$

где

$$g[n] = \mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[n], \quad (16)$$

$$f[n] = f[n-1] + g^2[n].$$

Соотношением (15) представлен субоптимальный коэффициент сходимости. При таком выборе r по данным «скромным» возможностям (скалярный r) в каждом шагу алгоритм (7) ищет оптимальное значение вектора \mathbf{e}^* , таким образом, чтобы наилучшим образом уповлетворил при этом соотношение (14).

С точки зрения реализуемости здесь следует позаботиться лишь о том, чтобы не возникла возможность деления на 0 в начальной точке времени, для этого необходимо выбирать соответствующим образом значение $r[0]$ в рекуррентном методе (10).

3. Коэффициент сходимости вида диагональной матрицы

Если доказательство, представленное в гл. 2, применяется на алгоритм (4), то для определения диагональной матрицы — коэффициента сходимости

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_N \end{bmatrix} \quad (17)$$

получится следующее соотношение:

$$u_i[n] - \sum_{j=1}^N r_j[n] u_j[n] \sum_{m=1}^n u_j[m] u_i[m] = 0, \quad (18)$$

где через u_i и u_j обозначаются отдельные компоненты вектора \mathbf{u} , воспроизведенного на основе данных измерений, а через r_j — элементы в диагонали матрицы коэффициента сходимости, соответственно (см. в Приложении № 2). Соотношение (18) также может быть воспроизведен в рекуррентной форме, более выгодной с точки зрения программирования на ЦВМ:

$$u_i[n] - \sum_{j=1}^N r_j[n] b_{ij}[n] = 0, \quad (19)$$

$$b_{ij}[n] = u_j[n] s_{ij}[n].$$

И физически нетрудно убедиться в том, что в случае применения алгоритма (4) и коэффициента сходимости по соотношению (19) можно ожидать существ-

венно лучшие результаты, чем в случае применения алгоритма (7) и скалярного коэффициента сходимости по (16). А ведь ясно, при использовании скалярного коэффициента каждая разность взвешивается одинаковым весом, в то время как во втором случае поступающие новые информации, результаты измерений по разным весам оказывают влияние на отдельные компоненты вектора \mathbf{c} неизвестных параметров.

С точки зрения применения алгоритма на практике и в данном случае следует выбирать предварительно начальные условия компонентов коэффициента сходимости. Начальным условием матрица \mathbf{R} может быть задана как $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ единичная матрица.

4. Метод рекуррентной регрессии, оптимальный коэффициент сходимости

Цыпкиным было показано, что в алгоритме (4) матрица \mathbf{R} может быть воспроизведена не только как диагональная матрица, но и — как квадратичная матрица ($N \times N$), и тогда результаты будут оптимальными в таком смысле, что алгоритмом решения на каждом шагу минимизируется норма по ур. (14). В этом случае вид алгоритмов приобретает следующий вид:

$$\mathbf{c}[n] = \mathbf{c}[n-1] + \mathbf{R}[n] (\mathbf{y}[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n], \quad (20)$$

где через $\mathbf{c}[n]$ обозначается приближение, полученное в n -том шагу. Матрица, определенная по соотношению (21), по литературе [5, 6, 11] называется матрицей Калмана. Отметим, что в соотношениях (20, 21) новая оценка получается путем суммирования предыдущей оценки и линейного дополнительного члена, основанного на новой информации $\mathbf{y}[n]$, $\mathbf{u}[n]$ и предыдущем значении матрицы $\mathbf{R}[n-1]$.

Если значения $\mathbf{R}[0]$ и $\mathbf{c}[0]$ не заданы, то возможно следовать по двум разным предложениям. По первой возможности возьмем первые n уравнения, образуем обратную матрицу для того, чтобы получить значения $\mathbf{R}[n]$, $\mathbf{c}[n]$, а затем шаги делаются дальше соответственно по уравнениям (20, 21). По второй возможности значение $\mathbf{R}[0]$ выбирается единичной матрицей, а $\mathbf{c}[0]$ — нулевым вектором. Нами была применена второе предложение в ходе экспериментов по рекомендациям специальной литературы [12], и такой выбор оказался выгодным с точки зрения сходимости процесса идентификации. По мнению Цыпкина алгоритм идентификации, составленный таким образом, обеспечивает оценку без искажения в том случае, если значения $\mathbf{y}[n]$ измеряются с аддитивной помехой с нулевой средней и ограниченной дисперсией.

В связи с обобщенными условиями сходимости алгоритмов (20, 21) отметим, что по [11] при выборе любого начального условия $\mathbf{R}[0]$ необходимо, чтобы наименьшее собственное значение матрицы $\sum_{m=1}^n \mathbf{u}[m] \mathbf{u}[m]^T$ при $n \rightarrow \infty$ стремилось к бесконечности. Таким образом значения $\mathbf{c}[n]$, полученные по вышеуказанным алгоритмам стремятся к оптимальному значению \mathbf{c}^* , как бы не были выбраны начальные условия $\mathbf{c}[0]$ и $\mathbf{R}[0]$. Результаты наших экспериментов подтвердили это предположение.

5. Идентификация линейного, одномерного, динамического объекта

Как уже и в введении было указано, в ходе идентификации процессов одним из важных шагов является создание модели, соответствующей как можно более точно, адекватно оригинальной системе.

Для представления практического применения вышеуказанных методов ограничиваемся решением следующей простой задачи. Пусть задан линейный, одномерный, динамический объект, представленный на рис. 1.

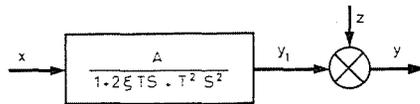


Рис. 1

Обозначения на рис. 1 соответствуют обычным обозначениям, принятым в описании систем автоматического управления. Измеряются входной сигнал $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ объекта, с аддитивной помехой $z(t)$ с нулевым средним и ограниченной дисперсией. Задача состоит в том, чтобы определить три основных параметра объекта, а именно — коэффициент усиления A , постоянную времени T и демпфирование ζ — без вмешательства в нормальный режим системы. Для решения задачи сначала приведем дифференциальное уравнение, описывающее процессы в объекте, к следующему виду:

$$y_1(t) = \frac{A}{T^2} \int_0^t \int_0^\tau x(\vartheta) d\vartheta d\tau - \frac{2\zeta}{T} \int_0^t y_1(\tau) d\tau - \frac{1}{T^2} \int_0^t \int_0^\tau y_1(\vartheta) d\vartheta d\tau; \quad (22)$$

$$y(t) = y_1(t) + z(t). \quad (23)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A}{T^2}, & u_1 &= \int_0^t \int_0^\tau x(\vartheta) d\vartheta d\tau, \\ c_2 &= -\frac{2\xi}{T}, & u_2 &= \int_0^t y_1(\tau) d\tau, \\ c_3 &= -\frac{1}{T^2}, & u_3 &= \int_0^t \int_0^\tau y_1(\vartheta) d\vartheta d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

С помощью этих обозначений выходной сигнал объекта представляется в следующем виде:

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{u}(t) + z(t), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T &= [c_1 \ c_2 \ c_3]; \\ \mathbf{u}^T &= [u_1 \ u_2 \ u_3]. \end{aligned}$$

На основе вышеуказанных соотношений составим модель объекта, представляющую собой основу для алгоритма идентификации. Пусть приближается выходной сигнал модели в следующей форме:

$$\hat{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{u}(t), \quad (26)$$

или, если обозначать через $f[n]$ решетчатую функцию, полученную из непрерывной функции $f(t)$ в точках времени $t = nT$, то решетчатый выходной сигнал модели получится в следующей форме:

$$\hat{y}[n] = \mathbf{c}[n - 1]^T \mathbf{u}[n]. \quad (27)$$

Выберем критерий качества идентификации как квадратичный критерий, т. е. результат идентификации считается приемлемым в том случае, если начение функционала

$$J(\mathbf{c}) = M\{[y - \hat{y}(\mathbf{c})]^2\} = M\{(y - \mathbf{c}^T \mathbf{u})^2\} \quad (28)$$

является минимальным. При соблюдении уравнения (4) алгоритм решения для непрерывного случая имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} = \mathbf{R}(t) [y(t) - \mathbf{c}^T(t) \mathbf{u}(t)] \mathbf{u}(t). \quad (29)$$

На основе алгоритма (29) процесс идентификации происходит по схеме, представленной на рис. 2 (схема на аналоговых элементах). В зависимости от

того, с помощью которого метода определяются коэффициенты сходимости r_1, r_2, r_3 , применяются алгоритмы (8), (16), (19) соответственно. Для дискретного случая процесс идентификации по алгоритму (4) непосредственно программируется на ЦВМ.

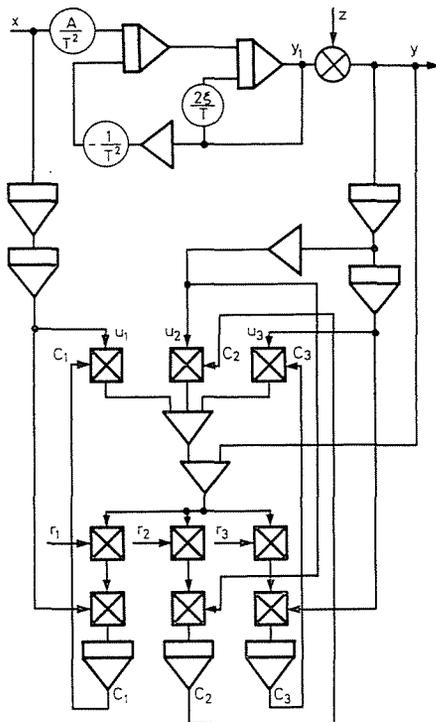


Рис. 2

Результаты измерения

Представленная на рис. 1 система была исследована на ЭЦВМ типа РАЗДАН—3, при следующих значениях параметров:

$$x(t) = 3.18 \arccos \left(\cos \frac{\pi}{2} t \right),$$

$$z(t) = 0;$$

в то время как параметры исследуемого процесса были следующие:

$$A = 1; \quad T = 1; \quad \zeta = 0.4;$$

период повторения: $T_m = 0.5$.

Для моделирования объекта применялся метод Симпсона, с модификацией [10, 13], алгоритмы (20, 21) были запрограммированы на языке АЛГОЛ, а начальные условия были следующие:

$$\mathbf{R}[0] = \mathbf{I}; \quad \mathbf{c}[0] = \mathbf{0};$$

процесс идентификации повторялся периодом $T_1 = 10$, т. е. через 10 единиц времени начальное условие \mathbf{R} была поставлена на единицу, в то время как новым начальным значением вектора \mathbf{c} было избрано значение, достигнутое этим же вектором в конце предыдущего периода. Автоматическое правило остановки было встроено в программу, по которому процесс идентификации остановился, если выполнилось условие $(\Delta c_i)_{\max} \leq 10^{-3}$.

При таких значениях параметров система остановилась за 7 циклов идентификации и следующие значения были получены:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,99995, \\ c_2 &= -0,80006, \\ c_3 &= -0,99978. \end{aligned}$$

Окончательные значения коэффициента усиления, постоянной времени и коэффициента демпфирования, полученные из этих результатов параметров были следующие:

$$\begin{aligned} A &= 1,00017, \\ T &= 1,00011, \\ \zeta &= 0,40008. \end{aligned}$$

Без особой оценки ошибок можно заключить, что достигнутые результаты весьма точные, и можно окончательный вывод делать: метод наименьших квадратов, рекуррентное соотношение регрессии может быть применен для идентификации динамических объектов.

На рис. 3, 4 представлены изменения компонентов вектора \mathbf{c} и матрицы \mathbf{R} .

Приложения

№ 1 Скалярный коэффициент сходимости

Пусть поставим (7) в (14):

$$\begin{aligned} \hat{J}(\mathbf{c}[n]) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \{y[m] - [\mathbf{c}[n-1] + r[n] (\mathbf{y}[n] - \\ &\quad - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n]]^T \mathbf{u}[m]\}^2 \rightarrow \min_{r[n]}. \end{aligned} \quad (30)$$

Если взять частную производную (30) по $r[n]$, то она должна равняться нулю в точке минимума:

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial r[n]} = -\frac{2}{n} (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \sum_{m=1}^n \{y[m] - [\mathbf{c}[n-1] + r[n] (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n]]^T \mathbf{u}[m]\} \mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[m] = 0. \quad (31)$$

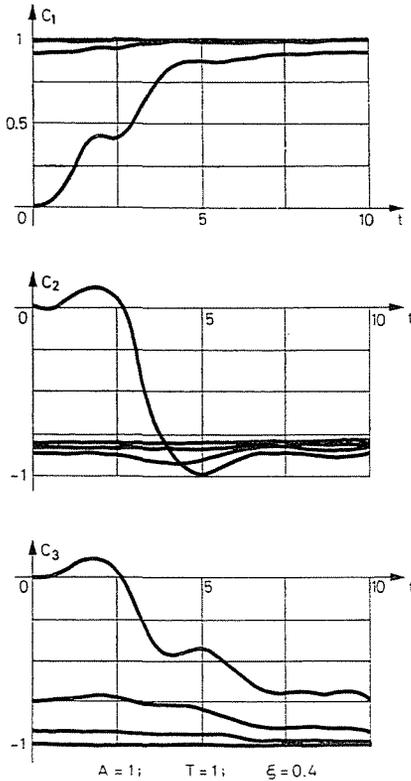


Рис. 3

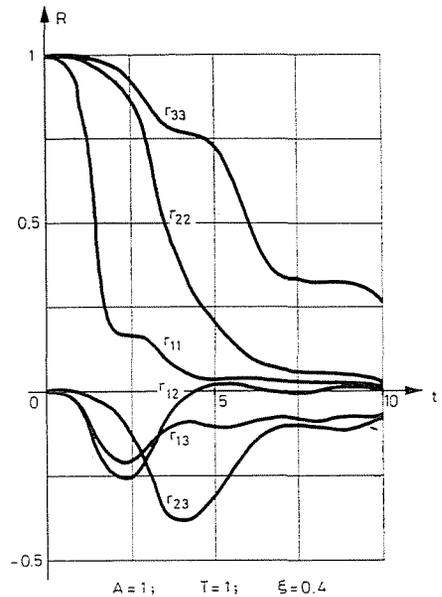


Рис. 4

Упрощаем выражение на член перед знаком суммирования и преобразуем соотношение следующим образом, путем элементарных математических преобразований:

$$\sum_{m=1}^{n-1} (y[m] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[m]) \mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[m] + (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[n] - r[n] (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \sum_{m=1}^n (\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[m])^2 = 0. \quad (32)$$

Но первый член на левой стороне выражения пропорционален частной производной $\partial \hat{J}(\mathbf{c}[n-1]) / \partial r[n-1]$, поэтому его значение после некоторого порогового количества шагов $n(K)$ будет нуль, этим членом можно упростить выражение, а в оставшемся выражении пусть введем упрощение на коэффициент $(y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n])$ и тогда получим:

$$\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[n] - r[n] \sum_{m=1}^n (\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[m])^2 = 0. \quad (33)$$

Отсюда:

$$r[n] = \frac{\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[n]}{\sum_{m=1}^n (\mathbf{u}[n]^T \mathbf{u}[m])^2}, \quad (34)$$

что совпадает квазиоптимальным коэффициентом сходимости по (15).

№ 2 Коэффициент сходимости типа диагональной матрицы

Пусть поставим (4) в (14):

$$\hat{J}(\mathbf{c}[n]) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \{y[m] - [\mathbf{c}[n-1] + \mathbf{R}[n] (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n]]^T \mathbf{u}[m]\}^2 \rightarrow \min_{\mathbf{R}[n]}. \quad (35)$$

Образует частные производные уравнения (35) по отдельным элементам $r_i[n]$ (коэффициентов сходимости) в диагонали матрицы (17):

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial r_i[n]} = -\frac{2}{n} (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \sum_{m=1}^n \{y[m] - [\mathbf{c}[n-1] + \mathbf{R}[n] (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \mathbf{u}[n]]^T \mathbf{u}[m]\} u_i[m] u_i[n] = 0. \quad (36)$$

Упрощаем уравнение на выражение перед знаком суммирования и перепишем его следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{n-1} (y[m] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[m]) u_i[n] u_i[m] + (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) u_i^2[n] - (y[n] - \mathbf{c}[n-1]^T \mathbf{u}[n]) \sum_{m=1}^n (\mathbf{R}[n] \mathbf{u}[n])^T \mathbf{u}[m] u_i[n] u_i[m] = 0. \quad (37)$$

Но первый член выражения (37) на левой стороне пропорционален частной производной $\partial \hat{J}(\mathbf{c}[n-1]) / \partial r_i[n-1]$, а значит, его значение будет равно нулю после некоторого порогового значения $n(K_1)$ поэтому этот член можем вы-

бросить, и, в оставшемся выражении введем упрощение на коэффициент $(y[n] - c[n-1]^T u[n])$ и перепишем уравнение (37) на скалярную форму:

$$u_i^2[n] - u_i[n] \sum_{j=1}^N r_j[n] u_j[n] \sum_{m=1}^n u_j[m] u_i[m] = 0. \quad (38)$$

Откуда путем упрощения на $u_i[n]$ получим (18).

Резюме

В статье представлены обобщенная формулировка задачи динамической идентификации линейных систем и возможности решения данной задачи. Представлены четыре метода идентификации, а именно: классический алгоритм с помощью метода стохастической аппроксимации, два алгоритма с применением квазиоптимальных коэффициентов сходимости (один — скалярного вида, а другой — вида диагональной матрицы), а также рекуррентный алгоритм на основе метода наименьших квадратов. Результаты показаны на примере идентификации одномерного колебательного звена.

Литература

1. ЕУКНОФФ, Р.—van der GRINTEN, P. M.—KWAKERNAAK, H.—VELTMAN, B. P.: Systems modelling and identification. Third congress IFAC, London, 1966
2. CUENOD, M.—SAGE, A. P.: Comparison of some methods used for process identification. IFAC symposium on "Identification in automatic control systems", Prague, 1967
3. ЕУКНОФФ, Р.: Process parameter and state estimation. IFAC symposium on "Ident. in aut. cont. syst.", Prague, 1967
4. BALAKRISHNAN, A. V.—PETERKA, V.: Identification in automatic control systems. Fourth congress IFAC, Warszawa, 1969
5. АСТРОМ, К. J.—ЕУКНОФФ, Р.: Systems identification. IFAC symposium, Prague, 1970
6. ЦЫПКИН, Я. З.: Адаптация и обучение в автоматических системах. Изд. «Наука», Москва, 1968.
7. KOCSIS, J.: Tanuló eljárás többváltozós dinamikus rendszer identifikációjára. VI. Orsz. Aut. Konf. I. kötet, Budapest, 1970
8. ЛЕЕ, Р. С. К.: Optimal identification, estimation and control. MIT Press, Massachusetts, 1964
9. ROBBINS, H.—MONRO, S.: A stochastic approximation method. Ann. Math. Statistics, **22**, 1, 1951
10. Lőcs, Gy.: ALGOL 60 programozási nyelv. III. kiadás, Budapest, 1970
11. ЦЫПКИН, Я. З.: Основы теории обучающихся систем. Изд. «Наука», Москва, 1970.
12. ALBERT, A.—SITTLER, R. W.: A method for computing least squares estimators that keep up with the data. J. SIAM Control. Ser. A, **3**, 3, 1966
- 13a. CSÁKI, F.: Korszerű szabályozásmélet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970
- 13b. CSÁKI, F.: Modern control theories. Nonlinear, optimal and adaptive systems. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1972

Д-р Я. Кочиш
1502 Будапешт /п/я 91.

П. Этвеш

Сегхаломское гос. хозяйство

Сегхалом

Венгрия