DIE VEREINFACHTE LÖSUNG EINER AUFGABE DER PRODUKTIONSPROGRAMMIERUNG

Von

L. KEVICZKY, A. KÁRPÁTI und I. BENCSIK

Lehrstuhl für Automatisation, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 22. September, 1972

Vorgelegt von Prof. Dr. F. CSÁKI

Die Aufgabenstellung

Gesetzt, es werden n_t Arten der Produkte auf n_g Maschinen hergestellt. Die Anwendungsreihenfolge ist gleichgültig. Die Arbeitszeiten der einzelnen Maschinen für die Erzeugung der einzelnen Produkte werden durch die Matrix $\mathbf{M} = [m_{i,j}]$ mit $(n_g x\ n_t)$ Elementen dargestellt.

Die Zahl der berücksichtigten Zeitintervalle während des Produktionsprogramms (Schicht, Tag, Dekade, usw.) sei n_n.

Die Matrix $\mathbf{K} = [k_{i,j}]$ mit $(n_t x\ n_n)$ Elementen enthält die Fertigungsmenge. Natürlich kann die für die einzelnen Zeitintervalle vorgeschriebene Fertigungsmenge auch früher (aber nur früher) produziert werden, wenn es die Verhältnisse gestatten.

Schließlich seien die Kapazitäten der einzelnen Maschinen in den verschiedenen Zeitintervallen mit $\mathbf{C} = [c_{i,j}]$ mit $(n_g x\, n_n)$ Elementen gekennzeichnet.

Es soll eine Produktionsmatrix $\mathbf{X} = [x_{i,j}]$ mit $(n_t x\ n_n)$ Elementen, ähnlichen Aufbaues wie $\mathbf{K}$ bestimmt werden, die die in den einzelnen Zeitintervallen zu fertigende Zahl der einzelnen Produkte enthält.

Es sollen die Algorithmisierbarkeit der Aufgabe, die vorhandenen Beschränkungen und die Wahl der Zielfunktion untersucht werden.

Wird eine sog. Summenmatrix in Form einer oberen Dreieckmatrix mit $(n_n \times n_n)$ Elementen definiert,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & & 1 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & . & & & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

dann ist die Bedeutung der Produktmatrix $\mathbf{K}\,\mathbf{\Sigma}$ sehr anschaulich. In diesem

Falle erhält man nähmlich in den Spalten der Matrix

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma} \tag{2}$$

die kumulierten Produktionsansprüche, also die Stückzahl je Produkt, die bis zum angegebenen Zeitpunkt, zu fertigen ist. Dementsprechend steht in der letzten Spalte von $\mathbf{K}^*$ der auf das gesamte Planungsintervall bezogene Gesamtproduktionsbedarf nach einzelnen Produkten aufgeschlüsselt.

Das zu bestimmende Produktionsprogramm $\mathbf{X}$ soll offenbar zu jeder Zeit den Produktionsbedarf decken. Diese Bedingung wird durch die Ungleichung dargestellt:

$$\mathbf{X}^* - \mathbf{K}^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{X} - \mathbf{K})\,\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

wobei

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\Sigma} \tag{4}$$

die Matrix der kumulierten Produktion ist, die in der letzten Spalte die Gesamtproduktion je Produkt enthält, die offensichtlich gleich der letzten Spalte von $\mathbf{K}^*$ sein muß.

Das zu bestimmende Produktionsprogramm muß auch die durch die Kapazitäten bestimmten Grenzen berücksichtigen. Diese Bedingung wird in Form der Ungleichung

$$\mathbf{MX} \leq \mathbf{C} \tag{5}$$

angegeben. Das Produkt $\mathbf{M}\,\mathbf{X}$ enthält nähmlich die Belastungen der einzelnen Maschinen für den gegebenen Zeitabschnitt.

Füf die Minimalisierung der Lagerkosten wird eine einfach gebildete Zielfunktion angegeben.

Enthält der Vektor

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n_t}]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

die spezifischen Lagerkosten je Produkt und wird der aus Einern bestehende Summenvektor $\mathbf{e}$ mit $(n_n \times 1)$ Elementen eingeführt, erhält man die Lagerkosten in der Form:

$$Q = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{X} - \mathbf{K})\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{e}\,. \tag{7}$$

Eine derartige Zielfunktion hat unter Berücksichtigung der erwähnten Beschränkungen die Wirkung, $\mathbf{X}^*$ womöglich an $\mathbf{K}^*$ »anzugleichen«. Damit bestimmt diese Formulierung eine Produktionsmatrix, nach der die entsprechende Produktion bestrebt ist, den kumulierten Produktionsansprüchen möglichst genau zu folgen.

Die Anwendung des Zusammenhanges (7) als Zielfunktion hat den Nachteil, daß seine Minimalisierung kein Produktionsprogramm mit dem kleinsten

Zeitbedarf sichert. Das ist auch begreiflich, da letztere Forderung sich im Gegensatz zu der Minimalisierung von Q befindet. Der Übergang vom den Wert von (7) minimalisierenden, optimalen Produktionsprogramm auf das Produktionsprogramm mit minimalem Zeitbedarf wird später behandelt.

Nach den bisherigen Feststellungen wird die Produktionsprogrammierungsaufgabe folgenderweise formuliert:

$$\begin{gathered} Q = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} (\mathbf{X} - \mathbf{K}) \mathbf{\Sigma} \mathbf{e} = \min_{\mathbf{X}} \\ (\mathbf{X} - \mathbf{K}) \mathbf{\Sigma} \geq 0 \\ \mathbf{MX} \leq \mathbf{C}. \end{gathered} \tag{8}$$

Da die Matrix $\mathbf{X}$ die gesuchten Unbekannten enthält, handelt es sich um eine lineare Programmierungsaufgabe mit oberen und unteren Grenzen.

Nach Einführung von neuen Bezeichnungen wird die Aufgabe in den Zusammenhängen (8) in die übliche Formulierung der linearen Programmierung umgewandelt. Wird nähmlich berücksichtigt, daß die Matrizen $\mathbf{X}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ nach ihren Spaltenvektoren zerlegbar sind, d. h.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n_n}] \\ \mathbf{K} &= [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_{n_n}] \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n_n}] \end{aligned} \tag{9}$$

und die neuen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= [\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{x}_{nn}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ \hat{\mathbf{k}} &= [\mathbf{k}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{k}_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{k}_{nn}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ \hat{\mathbf{c}} &= [\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{c}_{nn}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

ferner die Matrizen

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & \mathbf{E} & . & . & . & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & \mathbf{E} & . & . & . & \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{11}$$

und

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{diag}\,[\mathbf{M}, \mathbf{M}, \ldots, \mathbf{M}]$$

eingeführt, wobei $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix mit $(n_t x\ n_t)$ Elementen ist, kann die Aufgabe in Gl. (8) mit Hilfe des Summenvektors $\mathbf{e}$ — der aus $(n_t x\ n_t)$ Einsen besteht — und der Diagonalmatrix

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{diag}\,[a_1, \ldots, a_{n_t}; a_1, \ldots, a_{n_t}; \ldots; a_1, \ldots, a_{n_t}] \tag{13}$$

auch in der folgenden Form geschrieben werden, die bereits der Grundform der linearen Programmierungsaufgabe entspricht.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\,\hat{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\,\hat{\mathbf{x}} &= \min_{\hat{\mathbf{x}}} \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\mathbf{x}} &\geq \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{x}} &\leq \hat{\mathbf{c}}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Die annähernde Bestimmung des optimalen Produktionsprogrammes

In den linearen Programmierungsaufgaben (8) und (14) ist die Anzahl der Unbekannten $n_t x\, n_n$, die gegebenenfalls sehr hoch sein kann. Das hat zur Folge, daß die Aufgabe oft selbst mit Hilfe einer Rechenanlage großer Geschwindigkeit und Kapazität nicht exakt gelöst werden kann. Weitere Schwierigkeiten bereitet der Umstand, daß falls die Aufgabe bei den gegebenen Beschränkungen keine Lösung hat, man weder über den Aufbau eines annähernd optimalen Produktionsprogramms noch über die auszuführenden Änderungen in den Kapazitätsgrenzen Aufschluß erhält.

Diesen Überlegungen entsprechend wird für die Lösung der Aufgabe die schrittweise Planung nach VÁZSONYI angewandt, die eine annähernde Lösung, also kein globales Minimum gibt.

Es sei angenommen, daß unter den Produkten irgendeine a priori Wichtigkeitsreihenfolge festgestellt werden kann. So können — dem Prinzip der schrittweisen Planung entsprechend — die zur Verfügung stehenden Kapazitäten, unter Berücksichtigung der vorliegenden Beschränkungen vom Ende des Planungsintervalls ausgehend in der angegebenen Reihenfolge ausgefüllt werden. (Im weiteren werden die Elemente der entsprechenden Matrizen mit kleinen Buchstaben bezeichnet.)

Nach dem über die Gesamtproduktion und den Gesamtproduktionsbedarf Gesagten ist

$$x^*_{i,nn} = k^*_{i,nn} \tag{15}$$

für ein i-tes Produkt (für den Zeitabschnitt n_n). Wegen der Beschränkung (3) muß die Ungleichung

$$x^*_{i,nn-1} \geq k^*_{i,nn-1} \tag{16}$$

und wegen der Beschränkung (5) die Ungleichung

$$m_{u,i}\, x_{i,nn} = m_{u,i}(\,x^*_{i,n} - x^*_{i,nn-1}) \leq c_{u,nn} \tag{17}$$

erfüllt sein (die letztere für ein beliebiges u). Das bedeutet also, daß die Ungleichung

$$x^*_{i,n_n-1} \geq x^*_{i,n_n} - \frac{c_{u,n_n}}{m_{u,i}} \quad (u = 1, \ldots, n_g) \tag{18}$$

erfüllt werden muß.

Der Wert x^*_{i,n_n-1} ist so zu bestimmen, daß er innerhalb der Beschränkung (18) möglichst klein ist. So läßt sich nähmlich x_{i,n_n} minimalisieren, weil

$$x_{i,n_n} = x^*_{i,n_n} - x^*_{i,n_n-1} \tag{19}$$

gilt.

Damit kann die durch die Kapazitäten zugelassene maximale Produktion für den Zeitabschnitt n_n nach der Gl. (20) vorgeschrieben werden:

$$x^*_{i,n_n-1} = x^*_{i,n} - \text{entier}\left[\min_u \left(\frac{c_{u,n_n}}{m_{u,i}}\right)\right]. \tag{20}$$

(Hier bedeutet entier [...] die Ganzteilbildung.)

Da inzwischen auch die Ungl. (16) erfüllt werden muß, wird der untersuchte Planungsschritt schließlich nach Gl. (21) gewählt.

$$x^*_{i,n_n-1} = \max\left\{\left(x^*_{i,n_n} - \text{entier}\left[\min_u \left(\frac{c_{u,n_n}}{m_{u,i}}\right)\right]\right), k^*_{i,n_n-1}\right\}. \tag{21}$$

Die Produktion im Zeitabschnitt n_n für das i-te Produkt wird dann nach Gl. (19) berechnet. Im weiteren wird der Kapazitätsbedarf der für den Zeitabschnitt n_n so erhaltenen Produktion von der entsprechenden Spalte der Kapazitätsmatrix subtrahiert, d. h.

$$c'_{u,n_n} = c_{u,n_n} - m_{u,i}\, x_{i,n_n} \qquad (u = 1, \ldots, n_g). \qquad (22($$

Das Verfahren wird hiernach für das gesamt Planungsintervall fortgesetzt. Nach Schluß der Berechnung wird auf das folgende Produkt übergegangen. Der Algorithmus der Produktionsprogrammierung läßt sich also in folgender Form schreiben:

Für jedes $i = 1, \ldots, n_t$ Produkt wird in der gewünschten Reihenfolge der folgende Algorithmus durchgerechnet:

$$\begin{gathered} x^*_{i,j-1} = \max\left\{\left(x^*_{i,j} - \text{entier}\left[\min_u \left(\frac{c_{u,j}}{m_{u,i}}\right)\right]\right), k^*_{i,j-1}\right\} \\ c'_{u,j} = c_{u,j} - m_{u,i}\, x_{i,j} \qquad (u = i, \ldots, n_g) \qquad (23 \\ j = n_n, \ldots, 1, \text{Ç} \end{gathered}$$

wobei

$$x_{i,j} = x^*_{i,j} - x^*_{i,j-1} \tag{28}$$

ist, gesetzt, daß $x^*_{i,0} = 0$.

Die als Ergebnis des Algorithmus erhaltene Produktionsmatrix **X** ist nicht optimal. Sie ergibt nicht das absolute Minimum von Q, gewährleistet jedoch erfahrungsmäßig eine gute Näherung.

Definieren wir einen aus Einsen bestehenden Summenvektor mit $(n_g x\ 1)$ Elementen. Für die Bestimmung der Prioritätsreihenfolge der Produkte wird die Bildung der Matrix

$$\mathbf{K}\mathbf{e}\,\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} \tag{25}$$

empfohlen. Die a priori Produktionsreihenfolge wird durch die größenordnungsmäßige Reihenfolge der Hauptdiagonalelemente bestimmt. (Das größte Element wird das erste sein.) Diese Reihenfolge berücksichtigt sowohl die globale Durchlaufzeit als auch den Produktionsbedarf.

Es soll untersucht werden, wie sich das nach dem Algorithmus (23) erhaltenen Produktionsprogramm in ein Programm mit minimaler Durchlaufzeit transformieren läßt.

Es seien die Produktionsprogramme mit einem Minimum an Lagerungskosten **X*** (0) bzw. **X**(0). Der Zeitbedarf des Produktionsprogramms kann durch den folgenden sequentiellen Algorithmus verringert werden: (für $i = 1, 2, \ldots, n_t$ in der a priori Reihenfolge):

$$\begin{gathered} x^*_{i,j}(1) = \min\left\{\left(x^*_{i,j}(0) + \operatorname{entier}\left[\min_u\left(\frac{c_{u,j}}{m_{u,i}}\right)\right]\right),\ k^*_{i,n_n}\right\} \\ c'_{u,j}(1) = c_{u,j}(0) - m_{u,i}\,x_{i,j} \qquad (u = 1, \ldots, n_g) \\ j = 1, 2, \ldots, n_n \end{gathered} \tag{26}$$

wobei

$$x_{i,j}(1) = x^*_{i,j}(1) - x^*_{i,j-1}(1) \tag{27}$$

ist, angenommen, daß $x^*_{i,0}(1) = 0$ ist.

Die als Ergebnis erhaltenen Produktionsmatrizen **X***(1) bzw. **X**(1) sichern einen fast minimalen Zeitbedarf.

Es kann natürlich im Algorithmus (23) vorkommen, daß die Aufgabe bei den gegebenen Beschränkungen keine Lösung hat, d.h. der Produktionsbedarf mit den gegebenen Kapazitäten nicht gedeckt werden kann. Dieser Umstand wird durch die Werte $x^*_{i,0} \neq 0$ angezeigt. Dieser Produktionsbedarf kann nur in Überstundenarbeit, über den Kapazitätsgrenzen gedeckt werden. Für die Verteilung des Kapazitätsmangels können mehrere subjektive Strategien ausgearbeitet werden. Eine mögliche Lösung für die Verteilung der Überstunden ist die folgende. Gesetzt, daß für das q-te Produkt der Wert

$x^*_{i,0} \neq 0$ erhalten wurde, was auf Kapazitätsmangel deutet. In diesem Fall wird das Produktionsprogramm des q-ten Produktes folgenderweise verändert:

$$\left.\begin{array}{l} x^*_{q,0} = 0 \\ x^*_{q,j}(2) = \max\{x^*_{q,j}(1), k^*_{q,j}\} \\ x^*_{q,u}(1) = x^*_{q,u}(1) = x^*_{q,j}(2) - x^*_{q,j}(1) \\ u = j+1, \ldots, n_n \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, n_n \tag{28}$$

Nach Abschluß des Rechenzyklus erhält man:

$$\begin{gathered} x_{i,j}(2) = x^*_{i,j}(2) - x^*_{i,j-1}(2) \\ j = 1, 2, \ldots, n_n\,. \end{gathered} \tag{29}$$

Hiernach kann der dem erhaltenen Produktionsprogramm $\mathbf{X}(2)$ entsprechende Kapazitätsbedarf berechnet werden, der selbstverständlich den Beschränkungen nicht mehr entspricht.

Schlußfolgerungen

Im Beitrag wird die schrittweise Planungsmethode nach VÁZSONYI für die Lösung einer Aufgabe angewandt, bei der die Lagerungskosten minimalisiert werden sollen. Man erhält eine suboptimale Lösung der das Ergebnis liefernden linearen Programmierungsaufgabe. Es wird weiterhin gezeigt, wie man von der so erhaltenen Lösung auf das Produktionsprogramm mit minimalem Zeitbedarf übergehen kann. Hiernach wird ein Algorithmus angegeben, mit dessen Hilfe die wegen Kapazitätmangels anfallenden Überstunden verteilt werden können.

Die ausgearbeiteten Algorithmen sind sehr einfach, können auf Digitalrechner leicht programmiert werden. Da die Zahl der untersuchten Zeitabschnitte eigentlich beliebig sein kann, so kann in den verschiedenen Phasen der Produktion das Programm mehrmals durchgerechnet werden. Vergleicht man die erhaltenen Ergebnisse mit den echten, hilft die Methode den optimalen Produktionsplan auszuarbeiten.

Es sei schließlich bemerkt, daß sich entsprechende Varianten der Algorithmen auch bei komplizierteren Produktionsmodellen (Vorbereitungszeit, je Produkt unterschiedliche Maschinenreihenfolge usw.) anwenden lassen. Da es sich jedoch in diesem Fall um ein nichtlineares, diskretes Programmierungsproblem handelt, wird auch die Lösung sehr umständlich und schwierig sein.

Zusammenfassung

Im Beitrag wird die Programmierung der gleichzeitigen Erzeugung mehrerer Produkte behandelt. Es wird angenommen, daß die Produktion auf mehreren Maschinen erfolgt, die Fertigungsmenge vorgeschrieben ist und die Betriebszeiten der Maschinen durch verschiedene Kapazitätsgrenzen gekennzeichnet sind.

Es wird ein einfacher, numerischer Algorithmus angegeben, mit dessen Hilfe die suboptimale Lösung eines Produktionsprogramms leicht zu berechnen ist. Das Verfahren ergibt kein absolut optimales Programm, es läßt sich jedoch leicht algorithmisieren und für den Digitalrechner programmieren. Bei der Behandlung wird auch auf die Möglichkeit der Bestimmung des absoluten Optimums hingewiesen.

Literatur

1. KAUFMANN, A.: Méthodes et modèles de la recherche operationelle. Dunod, Paris, 1961
2. VÁZSONYI, A.: Scientific Programming in Business and Industry. J. Wiley, New York, 1958
3. VÁZSONYI, A.: Economic Lot Size Formulas in Manufacturing. Operation Research, 1956, 1
4. KREKÓ, B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966

Dr. László KEVICZKY
Attila KÁRPÁTI
István BENCSIK

1502. Budapest Postfach 91. Ungarn