ÜBER DIE REDUKTION UND KONSTRUKTION NICHT-VOLLSTÄNDIGER (PARTIELLER) AUTOMATEN

Von

T. FREY

Lehrstuhl für Mathematik, Fakultät für Elektrotechnik,
Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 3. September, 1971.

§1. Sowohl das Reduktionsproblem wie auch das Konstruktionsproblem von nichtvollständigen (partiellen) Automaten waren bisher nur teilweise gelöst. Bei der Lösung des ersten war ein Schritt »Trial and error« auch in den Reduktionsalgorithmen erforderlich (s. z. B. [1—6]), für das zweite Problem hat Verfasser selbst einen Algorithmus, jedoch nur für Moore-Automaten [7] angegeben. Im folgenden wird die vollständige Lösung beider Probleme gegeben, u. zw. für Mealy-Automaten. (Es sei bemerkt, daß die Methoden auch für Moore-Automaten leicht angewandt werden können, das soll aber erst in einem Buch [8] das im nächsten Jahre erscheinen wird, angegeben werden.)

Es werden die Bezeichnungen und Definitionen von GINSBURG [2] benützt, ferner wird beim Konstruktionsproblem vorausgesetzt, daß der betrachtete Automat keinen Zustand enthält, für den kein Output definiert ist, und daß die Zustandsänderungs- (Durchgangs-)funktion (δ) für solche Zustand-Inputzeichenpaare nicht definiert ist, für die der Output undefiniert bleibt (GINSBURG zeigte nämlich [2], daß ein solches Verstümmeln der ursprünglichen Durchgangsfunktion die Abbildungsfähigkeit des betrachteten Automaten nicht beeinflußt; die Outputfunktion wird im weiteren durch λ bezeichnet.) Ebenso setzen wir im Falle des Konstruktionsproblems voraus, daß die zu realisierende Automatenabbildung φ auf eine solche Teilmenge $\hat{F}$ der freien Halbgruppe F über das Inputalphabet X definiert ist, die mit jedem Wort $W = W_1 W_2 \in \hat{F}$ auch das Anfangswort W_1 enthält. (Ist nämlich φ die Automatenabbildung, die für W_1 W_2 definiert ist, so ist dadurch auch $\varphi(W_1)$ automatisch angegeben.)

Es wird endlich vorausgesetzt, daß sowohl das Inputalphabet $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$ wie auch das Outputalphabet $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_L\}$ endlich sind; die Zustandsmenge kann auch unendlich sein. (Diese Beschränkungen sind für die Methoden nicht wesentlich, nur gewisse Teilalgorithmen werden damit endlich bleiben, die aber auch weggelassen werden können.)

§2. Die Schwierigkeit des Reduktionsproblems besteht darin, daß statt der Äquivalenzrelation, die symmetrisch und transitiv ist, die sog. Superäquivalenz-Relation benützt werden muß, die transitiv, jedoch nicht symmetrisch ist. Genauer gesagt, nennen wir den Zustand $a \in \mathfrak{A}$ des partiellen Mealy-Automaten $A(\mathfrak{A}, X, Y, \delta_a, \lambda_a)$ Superäquivalent (bzw. Superäquivalent k-ter Ordnung) des Zustands $b \in \mathfrak{B}$ des Automaten $B(\mathfrak{B}, X, Y, \delta_b, \lambda_b)$, wenn für jedes Wort $W \in F(X)$ (bzw. für jedes Wort, das nicht länger als k ist, d. h. höchstens k Buchstaben des Inputalphabets enthält), für welches $\lambda_b(b, W)$ definiert ist, auch $\lambda_a(a, W)$ definiert ist und

$$\lambda_a(a, W) = \lambda_b(b, W) \in F(Y)$$

gilt; diese Tatsache soll durch $a \geq b$ (bzw. durch $a \underset{k}{\geq} b$) bezeichnet werden. Dementsprechend wird der Automat A ein Superäquivalent (bzw. Superäquivalent k-ter Ordnung) von $B(A \geq B$, bzw. $A \underset{k}{\geq} B)$ genannt, wenn sich zu jedem Zustand von B ein Superäquivalent (bzw. Superäquivalent k-ter Ordnung) von A angeben läßt.

Bei der Lösung des Reduktionsproblems, d. h. bei der Konstruktion eines Superäquivalent-Automaten mit minimaler Zustandsmenge, spielt eine andere Relation, die sog. Kompatibilität (bzw. Kompatibilität k-ter Ordnung) eine große Rolle, die symmetrisch, jedoch nicht transitiv ist. Es werden nämlich die Zustände $a \in \mathfrak{A}$ bzw. $b \in \mathfrak{B}$ kompatibel (bzw. kompatibel k-ter Ordnung: $a \sim b$ bzw. $a \underset{k}{\sim} b$) genannt, falls für jedes Wort $W \in F(X)$ (bzw. für jedes Wort, das nicht länger als k ist), für das sowohl $\lambda_a(a, W)$ wie auch $\lambda_b(b, W)$ definiert sind, $\lambda_a(a, W) = \lambda_b(b, W)$ gilt.

Ein Automat $A(\mathfrak{A}, X, Y, \delta_a, \lambda_a)$ wird hinsichtlich der Kompatibilität (bzw. der Kompatibilität k-ter Ordnung) reduziert genannt, falls er keine kompatible (bzw. kompatible k-ter Ordnung) Zustandspaare besitzt.

Wir geben zuerst einige Lemmen an, die »duale« Varianten für die Kompatibilität von Lemmen über Superäquivalenz im Buche von Ginsburg, und so einfach zu beweisen sind, daß der Beweis weggelassen wird.

Lemma 2.1. Ist $a \sim b$, und existieren für ein gewisses $W \in F(X)$ sowohl $\lambda_a(a, W)$ und $\delta_a(a, W)$ als auch $\lambda_b(b, W)$ und $\delta_b(b, W)$, so steht $\delta_a(a, W) \sim \sim \delta_b(b, W)$ fest.

Lemma 2.2. Ist $a \underset{k}{\sim} b$, und existieren für ein $W \in F(X)$, das eine Länge $i < k$ besitzt, sowohl $\lambda_a(a, W)$ und $\delta_a(a, W)$ als auch $\lambda_b(b, W)$ und $\delta_b(b, W)$, so steht $\delta_a(a, W) \underset{k-i}{\sim} \delta_b(b, W)$ fest.

Lemma 2.3. Ist $a \underset{k}{\sim} b$, und gilt für jeden Inputbuchstaben $x_j \in X$, für den sowohl $\delta_a(a, x_j)$, als auch $\delta_b(b, x_j)$ existieren, die Relation $\delta_a(a, x_j) \underset{k}{\sim} \delta_b(b, x_j)$, so steht auch $a \underset{k+1}{\sim} b$ fest.

Diese Lemmen sind deshalb wichtig, da für Automaten mit endlichen Zustandsmengen in endlichen Schritten die Kompatibilität-Reduziertheit festgelegt werden kann. Es gilt nämlich der

Satz 2.1. Sind A und B endliche partielle Automaten, u. zw. sind $\vartheta(\mathfrak{A}) = \alpha$ bzw. $\vartheta(\mathfrak{B}) = \beta$ und $a \in \mathfrak{A}$ bzw. $b \in \mathfrak{B}$, so a°) *ist* $a \sim b$ *eine Folge von* $a \underset{\alpha\beta}{\simeq} b$;

b°) *in* a°) *darf im allgemeinen* $\alpha\beta$ *nicht durch eine kleinere Ordnungszahl ersetzt werden.*

Ebenso gilt der

Satz 2.2. Es seien wieder $\vartheta(\mathfrak{A}) = \alpha$ *und* $a_1 \in \mathfrak{A}$, $a_2 \in \mathfrak{A}$. *Dann*

a°) *ist* $a_1 \sim a_2$ *eine Folge von* $a_1 \underset{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)}{\simeq} a_2$;

b°) *in* a°) *darf im allgemeinen* $\alpha(\alpha - 1)/2$ *nicht durch eine kleinere Ordnungszahl ersetzt werden.*

Für das weitere ist sehr wichtig:

Lemma 2.4. Ist $A \leq B$ *(bzw.* $A \underset{k}{\leq} B$*), und besitzen* $a_i \in \mathfrak{A}$ *und* $a_j \in \mathfrak{A}$ *ein gemeinsames Superäquivalent (bzw. Superäquivalent k-ter Ordnung) in* $\mathfrak{B}$, *so gilt*

$$a_i \sim a_j \quad (\text{bzw.} \quad a_i \underset{k}{\sim} a_j).$$

Dieses Lemma hat nämlich die wichtige Folge:

Satz 2.3. Ist der partielle Automat A *hinsichtlich der Kompatibilität (bzw. der Kompatibilität k-ter Ordnung) reduziert, so gibt es zu* A *keinen Superautomaten* B *(bzw. Superautomaten k-ter Ordnung) mit weniger Zuständen als* $\vartheta(\mathfrak{A})$, *genauer; ist* $A \leq B$, *so gibt es eine homomorphe Abbildung von* $\mathfrak{B}$ *auf* $\mathfrak{A}$, *jedoch gibt es (auch im Falle* $A \underset{k}{\leq} B$*) keine isomorphe Abbildung von einer echten Teilmenge von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$.

Beweis: Da $A \leq B$ (bzw. $A \underset{k}{\leq} B$), so gibt es zu jedem $a \in \mathfrak{A}$ ein $b \in \mathfrak{B}$ mit $a \leq b$ (bzw. $a \underset{k}{\leq} b$); laut unserer Lemmen 2.1—4. definiert diese Relation eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$. Wäre nun eine echte Teilmenge von $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von $\leq$ (bzw. $\leq_k$) auf $\mathfrak{B}$ isomorph abbildbar, so gäbe es mindestens ein Zustandspaar $a_i \in \mathfrak{A}$, $a_i \neq a_j \in \mathfrak{A}$ mit gemeinsamen Superäquivalenten (Superäquivalenten k-ter Ordnung) $b \in \mathfrak{B}$. Nach dem Satz 2.3 wäre aber dann $a_i \sim a_j$ (bzw. $a_i \underset{k}{\sim} a_j$), in Gegensatz zu unserer Voraussetzung über die Reduziertheit, w. z. B. w.

Dieser Satz zeigt nun, daß das gesuchte minimale Superäquivalent so zu konstruieren ist, daß es kompatibel-reduziert sei. Ist jedoch $A \leq B$, und B kompatibel-reduziert, so zeigt Satz 2.3. nur die Tatsache, daß man zu B — aber nicht notwendigerweise auch zu A — kein Superäquivalent mit weniger Zuständen als $\vartheta(\mathfrak{B})$ konstuieren kann. Eben darin besteht die Schwierigkeit der Reduktion partieller Automaten. Um nun das minimale Superäquivalent zu konstruieren, sind einige neue Begriffe bzw. einige Lemmen über diese Begriffe erforderlich.

Betrachten wir den partiellen Automaten $A(\mathfrak{A}, X, Y, \sigma, \lambda)$. Wir nennen die Zerlegung $\mathfrak{M}_k(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}_1^{(k)}, \mathfrak{A}_2^{(k)}, \ldots, \mathfrak{A}_{\sigma(k)}\}$ bzw. $\mathfrak{M}_\infty(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}_1^{(\infty)}, \mathfrak{A}_2^{(\infty)}, \ldots\}$ (in nicht notwendig fremde Teilmengen von $\mathfrak{A}$) eine k-kompatibel — bzw. kompatibel-maximale Zerlegung von $\mathfrak{A}$, wenn die Folgenden gültig sind:

$$1°.\ \bigcup_j \mathfrak{A}_j^{(k)} = \mathfrak{A} \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcup_j \mathfrak{A}_j^{(\infty)} = \mathfrak{A};$$

2°. $\mathfrak{A}_i^{(k)} \neq \mathfrak{A}_j^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}_i^{(\infty)} \neq \mathfrak{A}_j^{(\infty)}$ $(i \neq j)$;

3°. Jedes $\mathfrak{A}_i^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}_i^{(\infty)}$ ist eine maximale Teilmenge von $\mathfrak{A}$ in bezug auf die k-Kompatibilität bzw. die Kompatibilität, d. h., daß einerseits, jedes $\mathfrak{A}_i^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}_i^{(\infty)}$ nur paarweise k-kompatible bzw. kompatible Zustände enthält, anderseits, diese Teilmengen mit keinem Zustand so ergänzt werden können, daß 2° und 3° noch feststehen;

4°. Eine jede k-kompatibel-maximale bzw. kompatibel-maximale Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{M}_k(\mathfrak{A})$ bzw. in $\mathfrak{M}_\infty(\mathfrak{A})$ enthalten, genauer ist $\mathfrak{A}_*^{(k)} \subseteq \mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{A}_*^{(\infty)} \subseteq \mathfrak{A}$ eine beliebige Teilmenge mit paarweise k-kompatiblen bzw. kompatiblen Zuständen, so gibt es mindestens ein Element $\mathfrak{A}_l^{(k)} \in \mathfrak{M}_k(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathfrak{A}_l^{(k)} \in \mathfrak{M}_\infty(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}_*^{(k)} \subseteq \mathfrak{A}_l^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}_*^{(\infty)} \subseteq \mathfrak{A}_l^{(\infty)}$.

Nun soll auf konstruktivem Wege gezeigt werden, daß einerseits solche Zerlegungen existieren, anderseits, daß $\mathfrak{M}_k(\mathfrak{A})$ für jedes k tatsächlich endlich ist.

Betrachten wir erst die $\mathfrak{K}_1$-Zerlegung von $\mathfrak{A}(K = \vartheta(X))$: in K Schritten: Nehmen wir den ersten Inputbuchstaben $x_1 \in X$ und bilden wir die theoretischen Klassen $\hat{\mathfrak{A}}_1^{(11)}$, $\hat{\mathfrak{A}}_2^{(11)}$ . . ., $\hat{\mathfrak{A}}_L^{(11)}$; ist $\lambda(a, x_1)$ definiert und zwar $= y_\nu$, so gehört a zu $\hat{\mathfrak{A}}_\nu^{(11)}(\nu = 1,2, \ldots, L)$. Da nun A partiell definiert ist, können einerseits einige Klassen leer bleiben, anderseits kann eine Teilmenge $\hat{\mathfrak{A}}^{(11)} \subset \mathfrak{A}$ existieren, für die $\lambda(\ldots, x_1)$ nicht definiert ist. Lassen wir nun die leer gebliebenen theoretischen Klassen weg, und schließen wir alle Zustände von $\hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$ den anderen Klassen bei; es werden ferner diejenigen entstandenen Klassen weggelassen, die einer anderen mit kleinerem Index gleich sind (in diesem Schritt kann dies nicht vorkommen), und es soll eine neue Indexfolge gewählt werden, welche lückenlos ist. So entsteht die $\mathfrak{K}_{11}$-Zerlegung von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{K}_{11}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}_1^{(11)}, \mathfrak{A}_2^{(11)}, \ldots, \mathfrak{A}_{\sigma_{11}}^{(11)}\}.$$

Lemma 2.5.: $\sigma_{11} \leq L$.

Um nun $\mathfrak{K}_{12}$ und von $\mathfrak{K}_{1s}$ ausgehend $\mathfrak{K}_{1,s+1}$ zu bilden, nehmen wir die Inputbuchstaben x_2 bzw. x_{s+1}, und zerlegen wir ebenso — aber einzeln und von den anderen unabhängig — alle Teilmengen von $\mathfrak{K}_{11}(\mathfrak{A})$ bzw. von $\mathfrak{K}_{1s}(\mathfrak{A})(s < < K)$. So erhält man schließlich:

$$\mathfrak{K}_{1K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}_1^{(1)}, \mathfrak{A}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}_{\sigma_1}^{(1)}\}.$$

Lemma 2.6. $\sigma_1 \leq L^K$.

Satz 2.4. $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ ist die 1-kompatibel-maximale Zerlegung von $\mathfrak{A}$, d. h. $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A})$.

Beweis: Die Eigenschaften 1° und 2° sind für $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ in trivialer Weise vorhanden. Würde aber 3° nicht bestehen, so gäbe es mindestens eine Teilmenge $\mathfrak{A}_\nu^{(1)}$ und einen Zustand $a_\mu \notin \mathfrak{A}_\nu^{(1)}$, der mit jedem Element von $\mathfrak{A}_\nu^{(1)}$ 1-kompatibel wäre. Diese Voraussetzung führt aber zu einem Widerspruch. Da nun die Zustände von $\mathfrak{A}_\nu^{(1)}$ und a_μ einander 1-kompatibel sind, so gilt das umso mehr, wenn nur Buchstabe x_1 betrachtet wird. (Hier gibt es nämlich 4 Möglichkeiten: a°) $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \subset \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$ und $a_\mu \in \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$; b°) $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \not\subset \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$ aber $a_\mu \in \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$; c°) $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \subset \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$ aber $a_\mu \notin \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$; c°) $\mathfrak{A}\nu \subset \mathfrak{A}^{(11)}$, aber $a_\mu \notin \mathfrak{A}^{(11)}$; d°) $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \not\subset \hat{\mathfrak{A}}^{(11)}$ und $a_\mu \notin \mathfrak{A}^{(11)}$). Laut der Konstruktion von $\mathfrak{K}_{11}(\mathfrak{A})$ bedeutet aber diese Tatsache, daß es mindestens ein Element von $\mathfrak{K}_{11}(\mathfrak{A})$ gibt, das sowohl $\mathfrak{A}_\nu^{(1)}$ als auch a_μ enthält. (Im Falle a°) enthalten nämlich alle Klassen von $\mathfrak{K}_{11}(\mathfrak{A})$ die Zustandsmenge $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \cup a_\mu$; im Falle b°) enthalten nur gewisse Klassen $\mathfrak{A}_\nu^{(1)}$, aber alle a_μ; im Falle c°) ist es gerade umgekehrt; im Falle d°) gibt es endlich einige Klassen, die sowohl $\mathfrak{A}_\nu^{(1)}$ wie auch a_μ enthalten.) Daraus folgt aber gleich — u. zw. durch Wiederholung des vorigen Gedankenganges —, daß es auch in $\mathfrak{K}_{12}$ mindestens eine Klasse gibt, die $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \cup a_\mu$ enthält. Eine Induktion nach dem Index der Inputbuchstaben — durch Wiederholung des schon angegebenen Gedankenganges — zeigt, daß es in allen $\mathfrak{K}_{1s}$, folglich auch in $\mathfrak{K}_{1K} = \mathfrak{K}_1$, mindestens eine Klasse gibt, die $\mathfrak{A}_\nu^{(1)} \cup a_\mu$ enthält, in Gegensatz zu der Voraussetzung. Damit ist auch das Vorhandensein der Eigenschaft 3°) bewiesen.

Dieser Gedankengang läßt sich jedoch auch verwenden, um zu beweisen, daß $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ auch der Eigenschaft 4° genügt, w. z. B. w.

Um nun $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{A})$, ausgehend von $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ — u. zw. durch die Hilfszerlegungen $\mathfrak{K}_{21}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{K}_{22}(\mathfrak{A})$, ... $\mathfrak{K}_{2K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_2(\mathfrak{A})$ — sowie $\mathfrak{K}_{s+1}(\mathfrak{A})$, ausgehend von $\mathfrak{K}_s(\mathfrak{A})$ zu konstruieren, bedient man sich derselben Konstruktionsmethode wie oben für $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$, es wird jedoch nicht mehr die Ausgangsfunktion λ sondern die Durchgangsfunktion δ herangezogen. (Das bedeutet z. B., daß — um $\mathfrak{K}_{21}$ zu bilden — erst die Teilmenge $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ mit den theoretischen Klassen $\hat{\mathfrak{A}}_1^{(211)}$, $\hat{\mathfrak{A}}_2^{(211)}$, ..., $\hat{\mathfrak{A}}_{\sigma_{211}}^{(211)}$ berüchsichtigt wird; der Zustand $a \in \mathfrak{A}_1^{(1)}$ wird den Klassen $\mathfrak{A}_{i_1}^{(211)}$, $\mathfrak{A}_{i_2}^{(211)}$, ..., $\mathfrak{A}_{i_\omega}^{(211)}$ zugeordnet, falls $\delta(a, x_1)$ definiert ist, und $\delta(a, x_1)$ in $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{A})$ zu den Klassen $\mathfrak{A}_{i_1}^{(1)}$, $\mathfrak{A}_{i_2}^{(1)}$, ... $\mathfrak{A}_{i_\omega}^{(1)}$ gehört; falls aber $\delta(a, x_1)$ nicht definiert ist, wird a allen nicht leer gebliebenen Klassen zugeordnet; ebenso arbeitet man mit $\mathfrak{A}_2^{(1)}$ usw.) Es sei aber hier bemerkt, daß bei der Konstruktion der Hilfszerlegungen $\mathfrak{K}_{s\nu}$ die theoretischen Klassen immer in bezug auf $\mathfrak{K}_{s-1}$, und nicht in bezug auf $\mathfrak{K}_{s,\nu-1}$ konstruiert werden sollen!

Lediglich unter Berücksichtigung des obigen Gedankenganges, können folgende Lemmen bzw. Sätze leicht bewiesen werden:

Lemma 2.6. $\sigma_{s+1} \leq \sigma_s^{K+1}$ $(s = 2,3, \ldots)$

Satz 2.5. $\mathfrak{K}_s(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_s(\mathfrak{A})$ $(s = 1,2,3, \ldots)$

Lemma 2.7. Ist $\mathfrak{K}_{s+1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_s(\mathfrak{A})$, *so gilt für jedes* $\nu \geq 1$: $\mathfrak{K}_{s+\nu} = \mathfrak{K}_s$.

Lemma 2.8. Ist A endlich, u. zw. $\vartheta(\mathfrak{A}) = \alpha$, *so gilt*

$$\mathfrak{K}_{\alpha(\alpha-1)/2-1} = \mathfrak{K}_{\alpha(\alpha-1)/2}.$$

Mit Hilfe der Folge der $\mathfrak{K}_s(\mathfrak{A})$-Zerlegungen von $\mathfrak{A}$ konstruieren wir nun die $\mathfrak{K}_\infty$-Zerlegung:

$$\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}_1^{(\infty)}, \mathfrak{A}_2^{(\infty)}, \ldots\}, (\mathfrak{A}_i^{(\infty)} \neq \mathfrak{A}_j^{(\infty)} \quad \text{für} \quad i \neq j),$$

u. zw. folgendermaßen: Die Teilmenge $\mathfrak{A}_* \in 2^{\mathfrak{A}}$ ist dann, und nur dann, ein Element von $\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$, wenn

I°) zu jedem Index s ($s = 1,2, \ldots$) mindestens ein Index $\mu(s)$ so angegeben werden kann, daß

$$\mathfrak{A}_* \subseteq \mathfrak{A}^{(s)}_{\mu(s)} \in \mathfrak{K}_s$$

gültig sei;

II°) betrachtet man einen beliebigen Zustand $a \in \mathfrak{A}$; $a \notin \mathfrak{A}_*$, so ist I°) für $\mathfrak{A}_* \cup a$ nicht mehr erfüllt.

Lemma 2.9. Ist für einen Index s $\mathfrak{K}_{s+1} = \mathfrak{K}_s$ erfüllt, so gilt $\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_s(\mathfrak{A})$.

Satz 2.6. $\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_\infty(\mathfrak{A})$.

Beweis: Voraussetzungen 1°) und 2°) sind wieder in trivialer Weise erfüllt. Wäre 3°) nicht erfüllt, so gäbe es mindestens ein $\mathfrak{A}^{(\infty)}_i \in \mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$ und ein $a \in \mathfrak{A}$, $a \notin \mathfrak{A}^{(\infty)}_i$, wo a mit allen Zuständen von $\mathfrak{A}^{(\infty)}_i$ kompatibel wäre. Dann ist aber a für jedes s s-kompatibel mit allen Zuständen von $\mathfrak{A}^{(\infty)}_i$, folglich wäre $\mathfrak{A}^{(\infty)}_i \cup a$ eine Teilmenge gewisser $\mathfrak{A}^{(1)}_{j\nu} \in \mathfrak{K}_s(\mathfrak{A})$. Nach II°) könnte also $\mathfrak{A}^{(\infty)}_i$ nicht zu $\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$ gehören, entgegen unserer Voraussetzung. Ebenso: wäre 4°) nicht erfüllt, so gäbe es eine Teilmenge $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ mit paarweise kompatiblen Zuständen, diese wäre aber die Teilmenge keines Elements von $\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$. Jedoch sind dann die Zustände von $\mathfrak{A}^*$ für jedes s auch paarweise s-kompatibel, folglich gäbe es zu jedem s mindestens ein Element $\mathfrak{A}^{(s)}_{\mu(s)} \in \mathfrak{K}_s(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}^{(s)}_{\mu(s)}$. Nach I°) gibt es aber dann eine Teilmenge $\mathfrak{A}_*$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}_* \in \mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$, folglich soll $\mathfrak{A}^*$ eine Teilmenge mindestens eines Elements $\mathfrak{A}_* \in \mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$ sein, entgegen unserer Voraussetzung. Damit ist Satz 2.6 bewiesen.

Da nun die Zustände von $\mathfrak{A}^{(\infty)}_i \in \mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A})$ paarweise kompatibel sind, ist auch

Satz 2.7. gültig: *Für beliebige $1 \leq j \leq K$, und für beliebige Zustandsapaare $a_\nu \in \mathfrak{A}^{(\infty)}_i$, $a_\nu \neq a_\mu \in \mathfrak{A}^{(\infty)}_i$ ist entweder mindestens ein Element der Paare $\lambda(a_\nu, x_j)$, $\lambda(a_\mu, x_j)$ bzw. $\delta(a_\nu, x_j)$, $\delta(a_\mu, x_j)$ nicht definiert, oder aber sind die ersten einander gleich, die zweiten einander kompatibel* (s. Lemma 2.1).

Betrachten wir also erst die Ausgangsbuchstabenmenge $\{\lambda(a_\omega, x_j) \mid a_\omega \in \mathfrak{A}^{(\infty)}_i\}$. Laut Satz 2.7 ist diese Menge entweder leer, oder aber enthält sie nur ein einziges Element $y_{\psi(i,j)}$. Diese einwertige Funktion $\psi(i,j)$ definiert eine Ausgangsfunktion für einige neue Automaten S mit Zustandsmenge $\mathfrak{K}_\infty$. Betrachten wir nun die Zustandsmenge $\{\delta(a_\omega, x_j) \mid a_\omega \in \mathfrak{A}^{(\infty)}_i\}$. Laut Satz 2.6 besitzt diese Menge miteinander paarweise kompatible Zustände (oder ist sie leer), und da nach Satz 2.6 $\mathfrak{K}_\infty(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_\infty(\mathfrak{A})$ gilt, gibt es einige Elemente $\mathfrak{A}^{(\infty)}_{\zeta(i,j)} \in \mathfrak{K}_\infty$ (mindestens eines) für die nach Satz 2.7 $\{\delta(a_\omega, x_j) \mid a_\omega \in \mathfrak{A}^{(\infty)}_i\} \subseteq \mathfrak{A}^{(\infty)}_{\zeta(i,j)}$ gilt. Diese Funktion $\zeta(i,j)$ — besser gesagt, ein jeder Zweig dieser mehrwertigen Funktion — definiert eine Durchgangsfunktion eines neuen Automaten. Betrachten wir also die Automatenmenge $S^{(\gamma)}(\mathfrak{K}_\infty, X, Y, \delta^{(\gamma)}_\zeta, \lambda_\psi)$; $\gamma \in \Gamma$, wo die Indexmenge Γ die Menge der möglichen einwertigen $(\zeta^{(\gamma)})$

Zweige der mehrwertigen Funktion ζ voneinander unterscheidet. Hier ist also

$$\lambda_\gamma(\mathfrak{A}_i^{(\infty)}, x_j) = y_{\nu(i,j)}; \; \delta_\zeta^{(\gamma)}(\mathfrak{A}_i^{(\infty)}, x_j) = \mathfrak{A}_{\zeta(\gamma)(i,j)}^{(\infty)}.$$

Satz 2.8. $A \leq S^{(\gamma)}$ ist für jedes $\gamma \in \Gamma$ gültig.

Beweis: Es bezeichne $*$ die geordnete Relation zwischen $\mathfrak{A}$ und $2^{\mathfrak{A}}$, wo $a_\nu * \mathfrak{A}_\mu$ ($\mathfrak{A}_\mu \subseteq \mathfrak{A}$) dann, und nur dann gültig ist, wenn $a_\nu \in \mathfrak{A}_\mu$ feststeht. Nach Satz 2.6—2.7 gelten dann für ein beliebiges geordnetes Paar a_ν, $\mathfrak{A}_\mu^{(\infty)} \in \mathfrak{K}_\infty$ falls $a_\nu * \mathfrak{A}_\mu^{(\infty)}$:

a°) $\lambda(a_\nu, x_j) = \lambda_\gamma(\mathfrak{A}_\mu^{(\infty)}, x_j)$, falls das links stehende Glied definiert ist;

b°) $\delta(a_\nu, x_j) * \delta_\zeta^{(\gamma)}(\mathfrak{A}_\mu^{(\infty)}, x_j)$, falls das links stehende Glied definiert ist;

c°) Zu jedem $a_\nu \in \mathfrak{A}$ gibt es mindestens ein $\mathfrak{A}_\mu^{(\infty)} \in \mathfrak{K}_\infty$, mit $a_\nu * \mathfrak{A}_\mu^{(\infty)}$.

Wie es von Ginsburg in [2] bewiesen wurde (s. Lemma 2.5), haben a°) und b°) die Folge $a_\nu \leq \mathfrak{A}_\mu^{(\infty)}$, ferner a°), b°) und c°) die Folge $A \leq S^{(\gamma)}$, w. z. B. w.

Satz 2.9. $S^{(\gamma)}$ ist für jeden $\gamma \in \Gamma$ kompabilitätsreduziert.

Beweis: Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{A}_i^{(\infty)} \in \mathfrak{K}_\infty$ und $\mathfrak{A}_i^{(\infty)} \neq \mathfrak{A}_j^{(\infty)} \in \mathfrak{K}_\infty$ kompatibel sind. Es sei a_i ein beliebiges Element von $\mathfrak{A}_i^{(\infty)}$ (als Teilmenge von $\mathfrak{A}$), ebenso a_j ein beliebiges Element von $\mathfrak{A}_j^{(\infty)}$. Es sei nun $W \in F(X)$ ein beliebiges Wort, für das sowohl $\lambda(a_i, W)$ als auch $\lambda(a_j, W)$ existieren. Dann existieren nach Satz 2.8 auch $\lambda_\gamma(\mathfrak{A}_i^{(\infty)}, W)$ sowie $\lambda_\gamma(\mathfrak{A}_j^{(\infty)}, W)$, während $\lambda(a_i, W) = \lambda_\gamma(\mathfrak{A}_i^{(\infty)}, W)$ und $\lambda(a_j, W) = \lambda_\gamma(\mathfrak{A}_j^{(\infty)}, W)$ sind. Ist also $\mathfrak{A}_i^{(\infty)} \sim \mathfrak{A}_j^{(\infty)}$, so ist auch $\lambda(a_i, W) = \lambda(a_j, W)$, also ist auch $a_i \sim a_j$ gültig. Folglich sind alle Zustandselemente von $\mathfrak{A}_i^{(\infty)}$ mit den Elementen von $\mathfrak{A}_j^{(\infty)}$ paarweise kompatibel, im Gegensatz zur Maximalität von $\mathfrak{K}_\infty$ nach Satz 2.6. $\mathfrak{A}_i^{(\infty)} \sim \mathfrak{A}_j^{(\infty)}$ führt also zu einem Widerspruch, w. z. B. w.

Betrachten wir nun einen beliebigen Superautomaten $B(\mathfrak{B}, X, Y, \delta_b, \lambda_b)$ von A, und ordnen wir jedem Zustande $b_i \in \mathfrak{B}$ die Menge

$$\mathfrak{A}^{(i)} = \{a_\nu \mid a_\nu \leq b_i;\ a_\nu \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathfrak{A}$$

zu.

Lemma 2.10. Die Zustände von $\mathfrak{A}^{(i)}$ sind paarweise kompatibel. Zu jedem j ($1 \leq j \leq K$) bzw. i gibt es eine (eventuell mehrwertige) Funktion $r(j, i)$ so, daß

$$\{\delta(a_\nu, x_j) \mid a_\nu \in \mathfrak{A}^{(i)}\} \subset \mathfrak{A}^{r(i,j)} = \{a_\omega \mid a_\omega \leq \delta_b(_i, x_j)\}$$

gilt.

Beweis: Die erste Behauptung wurde schon in Lemma 2.4 betrachtet. Ist nun $\mathfrak{A}^{(i)}$ leer, so ist trivialerweise auch die zweite Behauptung wahr. Setzen wir also voraus, daß $\mathfrak{A}^{(i)}$ nicht leer ist; seine Elemente sind also miteinander paarweise kompatible Zustände von A. Da nun $a_\nu \leq b_i$ für einen beliebigen Zustand $a_\nu \in \mathfrak{A}^{(i)}$, so ist $\delta_b(b_i, x_j)$ sicher definiert, falls es in $\mathfrak{A}^{(i)}$ mindestens einen solchen Zustand $a_\nu \in \mathfrak{A}^{(i)}$ gibt, für den $\delta(a_\mu, x_j)$ definiert ist, und — wie es von Ginsburg bewiesen wurde — steht für jeden Zustand $a_\nu \in \mathfrak{A}^{(i)}$, für den $\delta(a_\nu, x_j)$ definiert ist, $\delta(a_\nu, x_j) \leq \delta_b(b_i, x_j) = b_r(j, i)$ fest. Damit ist unser Lemma vollkommen bewiesen.

Es soll nun folgendermaßen bewiesen werden, daß alle Automaten der Menge $S^{(\gamma)}$ minimale Superäquivalente von A sind: wir betrachten einen beliebigen Automaten $B \geq A$; zuerst werden diejenigen Zustände von B weggelassen, die nicht Superäquivalente von Zuständen von A sind (und dementsprechend werden die Definitionen von δ_b bzw. λ_b verzerrt); so erhält man den Automaten B_1 mit der Zustandsmenge $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$; im zweiten Schritt wird die Definition von δ_b und λ_b verzerrt (Automat B_2), im dritten aber wird sie ausgedehnt (Automat B_3), ohne Veränderung der Zustandsmenge $\mathfrak{B}_1$ und unter Beibehaltung der Eigenschaft der Superäquivalenz (d. h. sowohl $B_1 \geq A$ als auch $B_2 \geq A$ und $B_3 \geq A$ sind gültig). Es soll nun gezeigt werden, daß in der Menge $S^{(\gamma)}$ auch ein solcher Automat $S^{(\gamma_1)}$ gefunden werden kann, für den $B_3 \geq S^{(\gamma_1)}$ gültig ist. Da aber $S^{(\gamma_1)}$ kompatibilitätsreduziert ist, so sichert Satz 2.3 daß $\mathfrak{K}_\infty$ in $\mathfrak{B}_1$ isomorph abbildbar ist. Da weiter $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$, so ist es richtig, daß $S^{(\gamma_1)}$ ein minimaler Superautomat von A ist.

Satz 2.10. Die Automaten der Menge $S^{(\gamma)}$ sind minimale Superautomaten von A.

Beweis: Es sei $\mathfrak{B}^* — \mathfrak{B}$ die Menge der Zustände von B, denen man keinen Zustand von $\mathfrak{A}$ mit der Relation Superäquivalenz zuordnen kann. Sei nun $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}^*$; die Durchgangsfunktion δ_1 des Automaten B_1 wird dann so gewählt, daß aus der Definition von δ_b alle Durchgänge weggelassen werden, die in oder aus $\mathfrak{B}^*$ führen; ebenso definieren wir die Ausgangsfunktion λ_1 mit Hilfe von λ_b. So erhält man den Automaten $B_1(\mathfrak{B}_1, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$, für den die Voraussetzung $A \leq B_1$ noch sicher erfüllt ist. Damit ist erreicht, daß die Mengen $\mathfrak{A}^{(i)}$ in Lemma 2.10 — definiert durch $\mathfrak{B}_1$ statt $\mathfrak{B}$ — für kein i leer sind. Jedoch auch für B_1 ist es möglich, solche Paare $b_i \in \mathfrak{B}_1$, $x_j \in X$ anzugeben, für die $\lambda_1(b_i, x_j)$ bzw. $\delta_1(b_i, x_j)$ definiert sind, während $\lambda(a_\nu, x_j)$ bzw. $\delta(a_\nu, x_j)$ für kein $a_\nu \in \mathfrak{A}_i^{(\infty)}$ existieren. Dann werden aus der Definition von λ_1 bzw. δ_1 diejenigen Vorschriften weggelassen, die diesen Zustand-Buchstabenpaaren zugeordnet sind. So erhält man die Funktionen δ_2, λ_2 bzw. den Automaten $B_2(\mathfrak{B}_1, X, Y, \delta_2, \lambda_2)$. $A \leq B_2$ ist noch immer erfüllt, denn durch obige Weglassungen wurde die Gültigkeit der Relationen $a_\nu \leq b_i$ für kein Zustandspaar aufgelöst.

Bezeichnen wir im weiteren die Zustände von B_2 durch $\mathfrak{A}^{(i)} = \{a_\nu \mid a_\nu \leq b_i; b_i \in \mathfrak{B}_1\}$, wo also $\mathfrak{A}^{(i)}$ gleichzeitig einen Zustand von B_2 und eine Menge der Zustände von A bedeutet — ebenso wie $\mathfrak{A}_m^{(\infty)}$ bei den Automaten $S^{(\gamma)}$. Man kann nun für jeden $\mathfrak{A}^{(i)} \in \mathfrak{B}_1$ mindestens einen Zustand $\mathfrak{A}_m^{(\infty)} \in \mathfrak{K}_\infty$ angeben mit $\mathfrak{A}^{(i)} \subseteq \mathfrak{A}_m^{(\infty)}$ — u. zw. nach Satz 2.6 bzw. nach Lemma 2.10. $*$ bezeichne im weiteren die Teilmengen-Relation, d. h. $\mathfrak{A}_m^{(\infty)} * \mathfrak{A}^{(i)}$ dann, und nur dann, wenn $\mathfrak{A}^{(i)} \subseteq \mathfrak{A}_m^{(\infty)}$ Es wird nun gezeigt, daß auch ein Automat $S^{(\gamma_1)}$

angegeben werden kann, für den bei beliebigen i, j, m

$$\delta_{\gamma_1}(\mathfrak{A}_m^{(\infty)}, x_j) * \delta_2(\mathfrak{A}^{(i)}, x_j) \quad \text{falls} \quad \mathfrak{A}_m^{(\infty)} * \mathfrak{A}^{(i)} \tag{1}$$

feststeht; es wurde nämlich für jeden Automaten $S^{(\gamma)}$ die Durchgangsfunktion δ_γ so definiert, daß

$$\delta(a_\nu, x_j) \in \delta_\gamma(\mathfrak{A}_m^{(\infty)}, x_j), \quad \text{falls} \quad a_\nu \in \mathfrak{A}_m^{(\infty)} \tag{2}$$

gültig ist (s. Sätze 2.7 und 2.8). Daraus, und aus $\mathfrak{A}_m^{(\infty)} * \mathfrak{A}^{(i)}$ folgt schon, daß mindestens ein solcher Zustand $\mathfrak{A}_{\varrho(i,j)}^{(\infty)} \in \mathfrak{R}_\infty$ existiert, für den

$$\delta_2(\mathfrak{A}^{(i)}, x_j) = \mathfrak{A}^{(r(i,j))} \subseteq \mathfrak{A}_{\varrho(i,j)}^{(\infty)},$$

d. h. $\mathfrak{A}_{\varrho(i,j)}^{(\infty)} * \mathfrak{A}^{(r(i,j))}$ feststeht, ferner daß die mehrwertige Durchgangsfunktion δ_γ (definiert in Satz 2.7) mindestens einen solchen Zweig δ_{γ_1} besitzt, für den

$$\delta_{\gamma_1}(\mathfrak{A}_m^{(\infty)}, x_j) = \mathfrak{A}_{\varrho(i,j)}^{(\infty)} \tag{3}$$

gültig ist. Im weiteren betrachten wir nur diesen — durch (3) charakterisierten — Automaten $S^{(\gamma_1)}$ (genauer gesagt, einen solchen $S^{(\gamma_1)}$), für den (3) erfüllt ist. Die hier benützte *-Relation — zwischen B_2 und $S^{(\gamma_1)}$ betrachtet — erfüllt nun die Bedingungen b°) und c°) des Satzes 2.8 (bzw. des Lemmas 2.5 von Ginsburg). Die Bedingung a°) ist aber in B_2 nicht notwendigerweise erfüllt. Für jedes solche Indexpaar i, j nämlich, für das ein Zustand $a_\nu \in \mathfrak{A}^{(i)}$ mit definiertem $\lambda(a_\nu, x_j) = y_{\omega(r,j)}$ existiert, ist wegen der Relation $a_\nu \leq \mathfrak{A}^{(i)}$ ja auch $\lambda_2(\mathfrak{A}^{(i)}, x_j) = y_{\omega(\nu,j)}$ gültig, ferner ebenso wegen $a_\nu \in \mathfrak{A}_m^{(\infty)}$, falls $\mathfrak{A}_m^{(\infty)} * * \mathfrak{A}^{(i)}$, auch $\lambda_{\gamma_1}(\mathfrak{A}_m^{(\infty)}, x_j) = y^{\omega(\nu,j)}$, folglich ist für solche Indexpaare auch a°) erfüllt. Für die restlichen Indexpaare ist aber λ_2 sicher nicht definiert (s. die Definition von B_2). Betrachten wir also den Automaten $B_3(\mathfrak{B}_1, X, Y, \delta_2, \lambda_3)$, für den die Zustandsmenge und die Durchgangsfunktion ebenso definiert sind, wie für B_2; die Ausgangsfunktion λ_3 ist aber eine Ausdehnung von λ_2, u. zw. so, daß für jedes Indexpaar m, j, für welches $\lambda_{\gamma_1}(\mathfrak{A}_m^{(\infty)}, x_j)$ definiert ist, auch $\lambda_3(\mathfrak{A}^{(i)}, x_j)$ existiere und mit $\lambda_{\gamma_1}(\mathfrak{A}_m^{(\infty)}, x_j)$ gleich sei, falls $\mathfrak{A}_m^{(\infty)} * \mathfrak{A}^{(i)}$.

Für diesen Automaten B_3 ist $A \leq B_3$ natürlich noch gültig; daneben sind alle Bedingungen des Satzes 2.8 (bzw. des Lemma 2.5. von Ginsburg) zwischen B_3 und $S^{(\gamma_1)}$ erfüllt, es ist folglich auch $S^{(\gamma_1)} \leq B_3$ gültig. Zufolge der Sätze 2.3 und 2.9 ist somit unsere Behauptung völlig bewiesen, da $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$ auch feststeht.

§3. Betrachten wir jetzt das Konstruktionsproblem.

Um den minimalen, die angegebene Abbildung φ über $\hat{F}$ realisierenden Automaten anzugeben, wird eine Folge der Zerlegungen von $\hat{F}$ konstruiert,

u. zw. jede Zerlegung in K Schritten. Betrachten wir also erst den Inputbuchstaben x_1 und die Menge der Wörter $\hat{F}^{(i)} = \{W;\, W \in \hat{F}\}$, für die auch $W x_1 \in \hat{F}$ feststeht, und teilen wir diese in die theoretischen Kategorien $\{F_1^{(1,1)}, F_2^{(1,1)}, \ldots, F_L^{(1,1)}\}$ ein, nach dem Endbuchstaben von $\varphi(Wx_1)$. Nun werden die leer gebliebenen Kategorien weggelassen, und die Menge $\hat{F} - \hat{F}^{(1)}$ wird den restlichen Kategorien beigeschlossen. So erhält man die Zerlegung

$$\hat{\mathfrak{F}}(1,1) = \{\hat{F}_1^{(1,1)}, \hat{F}_2^{(1,1)}, \ldots, \hat{F}_{\sigma_{1,1}}^{(1,1)}\}, \qquad (\sigma_{11} \leq L).$$

Nehmen wir jetzt die Buchstaben x_2, dann x_3, usw. und zerlegen wir die Teilmengen des vorigen Schrittes einzeln nach demselben Algorithmus wie oben. So ergeben sich $\hat{\mathfrak{F}}(2,1)$ usw., endlich $\hat{\mathfrak{F}}(K, 1) = \hat{\mathfrak{F}}^{(1)}$. $\hat{\mathfrak{F}}^{(1)}$ wird die Zerlegung erster Kategorie von F genannt;

$$\hat{\mathfrak{F}}^{(1)} = \{\hat{F}_1^{(1)}, \hat{F}_2^{(1)}, \ldots, \hat{F}_{\sigma_1}^{(1)}\}.$$

Um nun $\hat{\mathfrak{F}}(1.2)$ zu erhalten, betrachten wir erst die Menge $\hat{F}_1^{(1)}$ bzw. diejenige Teilmenge $\hat{F}_1^{(1)}$ dieser Menge, die jene Wörter $W \in \hat{F}_1^{(1)}$ enthält, für die auch $Wx_1 \in \hat{F}$ gültig ist; zerlegen wir diese Menge in die theoretischen Kategorien $\{\hat{F}_1^{(1,2,1)}, \hat{F}_2^{(1,2,1)}, \ldots, \hat{F}_{\sigma 21}^{(1,2,1)}\}$ laut des Gesetzes der Einteilung von Wx_1 in $\hat{\mathfrak{F}}^{(1)}$ ($W \in \hat{F}_1^{(1)}$ kann also zu mehreren Kategorien gehören, da $\hat{\mathfrak{F}}_1^{(1)}$ nicht notwendigerweise fremde Teilmengen enthält). Die leer gebliebenen Kategorien werden dann weggelassen und die Menge $\hat{F}_1^{(1)} - \hat{F}_1^{(1)}$ wird den restlichen beigeschlossen. Nun wird derselbe Algorithmus für $\hat{F}_2^{(1)}$ usw., endlich für $\hat{F}_{\sigma_1}^{(1)}$ wiederholt. So erhält man endlich $\hat{\mathfrak{F}}^{(1,2)}$. Um nun $\hat{\mathfrak{F}}^{(2,2)}$ zu ermitteln, wird der obige Algorithmus für x_2 usw. wiederholt. Endlich ergibt sich $\hat{\mathfrak{F}}^{(K,2)} = \hat{\mathfrak{F}}^{(2)}$, die Zerlegung zweiter Kategorie von $\hat{F}$. Um nun $\hat{\mathfrak{F}}^{(s+1)}$ zu erhalten, wird der obige Algorithmus für $\hat{\mathfrak{F}}^{(s)}$ wiederholt.

Es ist leicht zu zeigen, daß $\vartheta(\hat{\mathfrak{F}}^{(1)}) \leq L^{K+1}$, und im allgemeinen $\vartheta(\hat{\mathfrak{F}}^{(s+1)}) \leq$ $\leq [\vartheta(\hat{\mathfrak{F}}^{(s)})]^{K+1}$. Es ist auch leicht zu zeigen, daß im Falle $\hat{\mathfrak{F}}^{(s+1)} = \hat{\mathfrak{F}}^{(s)}$ für jedes $\sigma \leq 1$ $\hat{\mathfrak{F}}^{(s+\sigma)} = \hat{\mathfrak{F}}^{(s)}$ feststeht. Die $\hat{\mathfrak{F}}^{(\infty)}$-Zerlegung von F wird nun ebenso wie in § 2 die $\mathfrak{K}^{(\infty)}$-Zerlegung von $\mathfrak{A}$, definiert.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß ein Automat $F(\hat{\mathfrak{F}}^{(\infty)}, X, Y, \delta, \lambda)$ mit einer Zustandsmenge $\hat{\mathfrak{F}}^{(\infty)}$ definiert werden kann, wo sich δ und λ durch die Konstruktion von $\hat{\mathfrak{F}}$ automatisch bilden lassen. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, daß F die Abbildung φ über $\hat{F}$ realisiert. Die Minimalität von F kann dadurch gezeigt werden, daß der $\mathfrak{K}$ generierende Algorithmus für einen beliebigen, φ über $\hat{F}$ realisierenden Automaten angewendet wird; es ist nämlich auf induktivem Wege leicht zu zeigen, daß $\mathfrak{R}^{(s)} = \hat{\mathfrak{F}}^{(s)}$ für jedes s feststeht.

Zusammenfassung

Es wird eine vollständige und auch algorithmisch durchführbare Lösung der Reduktion partieller Mealy-Automaten und der Konstruktion einfachster Automaten, die eine nur teilweise definierte Automatenabbildung realisieren, gegeben.

Literatur

1. PAULL, M. C.—UNGER, S. M.: Minimizing the number of states in incompletely specified Sequential Switching Functions. IRE Trans. EL. Comp. EC-**8** 356—367 (1959).
2. GINSBURG, S.: An Introduction to Mathematical Machine Theory. Addison-Wesley P. C. Reading. 1962.
3. GINSBURG, S.: Connective Properties preserved in Minimal State Machines. Journ. of the Ass. f. Comp. Mach. J. p 311—325 (1960).
4. LEE, C. Y.: Automata and Finite Automata. Bell Syst. Techn. J. **39**, 1267—1295 (1960).
5. RANEY, G. N.: Sequential Functions. J. of the Ass. f. Comp. Mach. **5**, 177—180 (1958).
6. WANG, H.: Circuit Synthesis by Solving Sequential Boolean Equations. Zeitschr. f. Math. Logik u. Gr. d. M. **5**, 291—322 (1959).
7. FREY, T.: Über die Konstruktion nichtvollständiger Automaten. Acta Math. Ac. Sc. Hung. **XV**, 375—382 (1964).
8. FREY, T.: A General Theory of Automata and Algorithm. (In Vorbereitung, Akadémiai Kiadó, Budapest).

Prof. Dr. Tamás FREY, Budapest XI., Egry József u. 18—20. Ungarn