НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕТОДА ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Ф. ЧАКИ

Кафедра Автоматизации Будапештского Технического Университета

(Поступило: 6 мая 1971 г.)

В первую очередь в теории управления, но и вообще в анализе и синтезе других динамических систем, все более распространяется применение метода пространства состояний. В некоторых случаях, как например в исследовании устойчивости по Ляпунову, нет необходимости решения уравнений пространства состояний, а в других случаях, как например при формировании оптимальных систем, решение этих уравнений является непропустимой необходимостью.

В настоящем докладе исследуются некоторые проблемы метода пространства состояний, и, прежде всего, суммируются методы решения уравнений состояний.

В первой части рассматривается возможность решения системы уравнений типа

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u},\end{aligned} \tag{1}$$

т. е. системы линейных (неавтономных) уравнений с переменными параметрами, а потом дается обзор возможных способов решения системы уравнений линейных (инвариантных) систем с постоянными параметрами типа

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},\end{aligned} \tag{2}$$

В заключении кратко касаются проблемы решения системы уравнений нелинейных систем типа

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned} \tag{3}$$

Решение линейных систем с переменными параметрами

Как известно, путем решения дифференциального уравнения (1) вектор состояний выражается в следующей форме:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

А с другой стороны, если учесть второе, вспомогательное уравнение ур. (1), то вектор выходного сигнала получается в следующей форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \\ &+ \mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t).\end{aligned} \tag{5}$$

В обоих решениях основная матрица, или по другому названию переходная матрица $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ играет важную роль. Эта матрица для систем с переменными параметрами может задаваться исключительно в форме бесконечного ряда, так называемого ряда Нэймана:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{A}) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A})) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}))) + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = \int_{t_0}^{t} (\mathbf{A}(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

т. е. $\mathbf{Q}$ является оператором интегрирования. В том исключительном случае, когда выполняется коммутативное соотношение типа

$$\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1), \tag{8}$$

то переходная матрица рассчитывается в упрощенной форме:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathrm{d}\tau = \exp \mathbf{Q}(\mathbf{A}). \tag{9}$$

Решение линейных систем с постоянными параметрами

Если исследуемая система имеет постоянные параметры, то вместо ур. (1) действительны уравнения пространства состояний (2). В таком случае переходная матрица приобретает следующий вид:

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{\Phi}(t - t_0) = \exp(t - t_0)\mathbf{A}, \tag{10}$$

или, если положить $t_0 = 0$, то

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}. \tag{11}$$

В последнем случае вектор пространства состояний выражается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{12}$$

в то время как выходной сигнал системы имеет форму:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{Du}(t). \tag{13}$$

етоды определения переходной матрицы

Ниже дается обзор методов определения переходной матрицы для линейных систем с постоянными параметрами.

Первый способ. Для исследования линейных систем с постоянными параметрами возможно применять преобразование Лапласа. Путем преобразования однородного дифференциального уравнения ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) при начальном условии $\mathbf{x}(0)$ получается

$$p\mathbf{X}(p) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(p)$$

и, оттуда

$$\mathbf{X}(p) = [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{14}$$

Путем обратного преобразования:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0). \tag{15}$$

Итак, основная матрица будет получена с помощью следующего соотношения:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}. \tag{16}$$

Этот способ является одним из простейших, но предполагает знание преобразования Лапласа.

Второй способ. По соотношению (11) переходная матрица является экспоненциальной функцией, поэтому она может быть разложена в ряд Тэйлора:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \ldots \tag{17}$$

Но расчет экспонентов матриц с применением ручного метода — достаточно утомительный. Если использовать ЭЦВМ, то оказывается целесообразным выразить бесконечный ряд в рекуррентной форме:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}t}{i}\left(\frac{(\mathbf{A}t)^{i-1}}{(i-1)!}\right). \tag{18}$$

При использовании такого подхода нет необходимости предварительного расчета собственных значений.

Третий способ. Можно применять и ряд Неймана в ур. (6). Это будет существенно проще для случая, когда параметры постоянные, но решение дается также в форме бесконечного ряда.

В этом случае нет необходимости предварительного расчета собственных значений.

Четвертый способ. Один вариант первого подхода использует определение элементов переходной матрицы. В таком случае i-тая переменная состояний выражается в форме

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(t) x_j(0). \tag{19}$$

Элемент $\Phi_{ij}(t)$ определяется путем замены $x_j(0) = 1$ и $x_i(0) = 0$, $i \neq j$. Тогда $x_i(t)$ определяет именно элемент $\Phi_{ij}(t)$. Уравнения пространства состояний могут быть наглядно изображены при помощи блок-схем или графиков прохода сигналов; тогда переменные состояний появляются на выходе интеграторов. Если на вход j-того интегратора фиктивно подать импульс, то на выходе i-того интегратора появляется импульсная переходная функция. Значит элемент $\Phi_{ij}(t)$ можно представить как весовую функцию, а его преобразование — как передаточную функцию. Последнюю функцию можно считывать с блок-схемы или с графика прохода сигналов. Путем обратного преобразования элемент $\Phi_{ij}(t)$ может быть получен.

Оценка этого способа совпадает с оценкой первого подхода.

Пятый способ. Переходная матрица дается в закрытой форме при помощи теоремы разложения Сильвестра. Для матрицы $\mathbf{A}$ с однократным собственным значением p_i:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{p_i t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\mathbf{A} - p_j \mathbf{I}}{p_i - p_j} \right). \tag{20}$$

Это соотношение является обобщением формулы интерполяции Лагранжа.

При многократном, например m_i-кратном, собственном значении p_i, переходная матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{\mathrm{d}^{(m_i-1)}}{\mathrm{d}p^{(m_i-1)}} \left[e^{pt} \frac{\mathbf{Adj}\,[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} (p - p)^{m_j}} \right]_{p = p_i} \tag{21}$$

где операции суммирования и умножения распространяются на все собственные значения, но на многократные собственные значения — только единственный раз.

Формулы (20) и (21) непосредственно во временной области определяют переходную матрицу, в аналитической форме. Это является большим преимуществом данного подхода. Собственные значения p_i предварительно надо расчитывать. Нет необходимости в применении преобразования Лапласа. Для ЭЦВМ надо составить довольно длинную программу. При расчетах вручную (или при помощи машины) следует рассчитывать экспоненты матрицы $\mathbf{A}$ до $(n-1)$-той степени.

Шестой способ. На основе теоремы Кэйла—Гамильтона — по которой матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению — можно разрабатывать новый подход. Сначала здесь представляется способ Кэйла—Гамильтона на случай однократных собственных значений, при помощи которого переходная матрица выражается с применением матричного полинома $(n-1)$-той степени.

Пусть обозначает $K(p)$ характеристический детерминант:

$$K(p) = |p\mathbf{I} - \mathbf{A}|. \tag{22}$$

С помощью этого детерминанта полином $F(p)$ или бесконечный ряд выражается в следующей форме:

$$F(p) = K(p)Q(p) + R(p), \tag{23}$$

где $R(p)$ называется остаточным полиномом или минималь-полиномом, максимум $(n-1)$-той степени:

$$R(p) = r_0 + r_1 p + \dots + r_{n-1} p^{n-1}, \tag{24}$$

Поскольку $D(p_i) = 0$, то:

$$F(p_i) = R(p_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{25}$$

а коэффициенты остаточного полинома именно из этих соотношений могут быть получены.

Подобным образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{Q}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{A}), \tag{26}$$

и если соблюдать теорему Кэйла—Гамильтона: $\mathbf{K}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ то:

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{A}), \tag{27}$$

Итак, если избрать $\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \exp \mathbf{A}t = \mathbf{\Phi}(t)$, то:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{R}(\mathbf{A}), \tag{28}$$

где

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = r_0\mathbf{I} + r_1\mathbf{A} + \dots + r_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}. \tag{29}$$

А если появляются многократные собственные значения, то в системе уравнений (25) m_i уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k R(p)}{\mathrm{d}p^k}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{\mathrm{d}^k F(p)}{\mathrm{d}p^k}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{\mathrm{d}^k e^{pt}}{\mathrm{d}p^k}\right|_{p=p_i} \tag{30}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m_i - 1)$$

и эти уравнения следует применять для расчета коэффициентов $r_0, \ldots, r_{n-1}$.

Этот подход является одним из самых целесообразных. Способ дает непосредственно во временной области переходную матрицу, в форме закрытой формулы. Собственные значения p_i следует определить предварительно. Составление программы на ЦВМ здесь требует также немалого труда. В ходе расчетов вручную надо выполнять операцию возведения в степень матриц.

Седьмой способ. Если многократные собственные значения появляются, то — с применением подходящего преобразования подобия типа $\mathbf{x} = \mathbf{Lz}$ — матрица $\mathbf{A}$ преобразуется на форму канонической матрицы типа Джордэна, т. е.: однородное дифференциальное уравнение пространства состояний

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \tag{31}$$

преобразуется на дифференциальное уравнение следующей формы:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{ALz} = \mathbf{Jz}. \tag{32}$$

(В матрице Джордэна в диагональ над главной диагональю матрицы вставляется соответствующее количество единиц). В таком случае форма переходной матрицы будет следующая:

$$e^{\mathbf{J}t} = \mathbf{T}(t)e^{\mathbf{P}t}. \tag{33}$$

Здесь:

$$\mathbf{P} = \mathbf{diag}\,[p_1, p_1, \ldots, p_2, p_2, \ldots, p_3, p_3, \ldots] \tag{34}$$

является диагональной матрицей собственных значений p_i (они не обязательно различаются друг от друга), в то время как:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{diag}\,[\mathbf{T}_1(t), \mathbf{T}_2(t), \mathbf{T}_3(t), \ldots], \tag{35}$$

где

$$\mathbf{T}_i(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{m_i-2}}{(m_i-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

И наконец:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}\mathbf{T}(t)e^{\mathbf{P}t}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{L}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{L}e^{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}t}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{37}$$

Итак, переходная матрица оригинальной системы (31) выражается в следующей форме:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{L}e^{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}t}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{T}(t)e^{\mathbf{P}t}\mathbf{L}^{-1}, \tag{38}$$

Естественно этот подход можно применять и в случае присутствия однократных собственных значений, но тогда:

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{P}(t) = \mathbf{diag}\,[p_1, p_2, \ldots p_n] \tag{39}$$

и

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{I}. \tag{40}$$

Недостатком вышеуказанного подхода является необходимость применения многочисленных матричных преобразований для получения окончательного результата (38). В то же время его преимуществом можно считать, что переходная матрица определяется аналитически, непосредственно во временной области. Собственные значения должны быть определены предварительно, и, кроме того, необходимо определить также и матрицу преобразования $\mathbf{L}$.

Решение нелинейных уравнений пространства состояний

Пока неизвестно обобщенное решение нелинейных уравнений пространства состояний (3). В то же время известны немалочисленные итеративные методы, которые легко реализуются на ЦВМ. В настоящей части статьи приводится лишь представление метода Рунге—Кутта.

Этот метод, как известно, исходит из заданных значений $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, t и к независимым приращениям

$$\Delta t = h;\ \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t + h) - \mathbf{u}(t) = \mathbf{m} \tag{41}$$

при помощи этого подхода расчитываются зависимые приращения

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{k}. \tag{42}$$

Последние приращения определяются в четырех шагах. В ходе конкретных расчетов следует расчитывать следующие приращения:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)h \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, \quad \mathbf{u} + \frac{\mathbf{m}}{2}, \quad t + \frac{h}{2}\right) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, \quad \mathbf{u} + \frac{\mathbf{m}}{2}, \quad t + \frac{h}{2}\right) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{u} + \mathbf{m}, \quad t + h).
\end{aligned}
\tag{43}
$$

И тогда полное приращение в уравнении (42) будет равно:

$$
\mathbf{k} = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \tag{44}
$$

А если величина h не слишком большая, то такой подход дает весьма хорошее приближение. А в последующей процедуре вместо оригинальных значений $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, t используются новые значения:

$$
x(t+h) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{u}(t+h) = \mathbf{u} + \mathbf{m}, \qquad t = t + h.
$$

и процедура повторяетзя.

Естественно, итеративные методы могут быть применены и для решения линейных задач также. Общим их недостатком является тот факт, что в результате применения этих методов нельзя делать общие выводы или они будут носить весьма ограниченный характер.

Заключение

В настоящем докладе дается критический обзор методов решения уравнений пространства состояний. Сравниваются и оцениваются преимущества и недостатки отдельных подходов.

Решение задач в области нелинейных систем и часто линейных систем с переменными параметрами вообще требует применения цифровой вычислительной машины.

Решение задач в области линейных систем с постоянными параметрами является более простой задачей. Для расчета переходной матрицы, играющей основную роль в этих задачах, представлены семь способов, которые с точки зрения трудоемкости расчетов мало отличаются друг от друга. В принципиальных исследованиях те методы являются самыми преимущественными, которые определяют основную матрицу в замкнутой форме. С точки зрения программирования на вычислительных машинах, в то же время, часто оказываются более простыми решения с помощью бесконечных рядов.

Резюме

В этом статье дается критический обзор методов решения уравнений пространства состояний. Сравниваются и оцениваются преимущества и недостатки отдельных подходов.

Литература

1. Csáki, F.: Korszerű szabályozáselmélet. Akadémiai Kiadó, 1970. Budapest.
2. Csáki, F.—Bars, R.: Automatika (második bővített kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
3. Csáki, F.: Szabályozások dinamikája (második, javított kiadás). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
4. Zadeh, L. A.—Desoer, C. A.: Linear System Theory. McGraw-Hill, 1963.
5. Понтрягин, Л. С.—Болтянский, В. Г.—Гамкрелидзе, Р. С.—Мищенко, Е. Ф.: Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
6. Dorf, R.: Time Domain Analysis and Design of Control Systems. Addison-Wesley, 1965.
7. Athans, M.—Falb, P. L.: Optimal Control. McGraw-Hill, 1966.
8. DeRusso, P. M.—Roy, R. J.—Close, Ch. M.: State Variables for Engineers, John Wiley, 1966.
9. Elgerd, O.: Control Systems Theory. McGraw-Hill, 1967.
10. Schultz, D.—Melsa, J.: State Functions and Linear Control Systems. McGraw-Hill. 1967.
11. Ogata, K.: State Space Analysis of Control Systems. Prentice Hall, 1969.
12. Sévely, Y.: Systémes et asservissements linéaires échantillonnes. Dunod, 1969.
13. Schwarz, R. J.—Friedland, B.: Linear System, McGraw Hill, 1965.
14. Saucedo, R.—Schiring, E. E.: Introduction to Continuous and Digital Control Systems Macmillan, 1968.

Prof. Dr. Frigyes Csáki, Budapest XI., Garami E. tér 3, Венгрия