

TOLERANZPRÜFUNG AKTIVER RC-FILTER IN DOPPEL-T-SCHALTUNG

Von

L. GAZSI und E. SELÉNYI

Lehrstuhl für Geräte- und Meßtechnik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 13. Januar, 1969)

Vorgelegt von Prof. Dr. László SCHNELL

Einleitung

In den letzten Jahren wurden in zunehmender Zahl Beiträge über aktive RC-Schaltungen veröffentlicht. Das wachsende Interesse für diesen Themenkreis hängt hauptsächlich mit der Verbreitung der integrierten Schaltungen zusammen. Nach einer integrierten Schaltungstechnologie lassen sich nämlich die aus Transistoren, Widerständen und Kondensatoren aufgebauten Schaltungen — daher auch die sog. aktiven RC-Netzwerke — leicht herstellen.

Andererseits bieten die aktiven RC-Schaltungen im Vergleich zu auch Induktivität enthaltenden Netzwerken bedeutende Vorteile, wenn dominante Pole oder Nullstellen im Frequenzbereich unter 1 kHz realisiert werden sollen. Der Unterschied wird am besten durch ein Beispiel verdeutlicht:

Es soll ein im Bereich um 50 Hz dominantes, konjugiertes Polenpaar erstellt werden (Abb. 1).

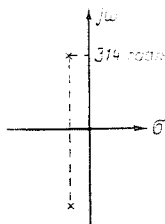


Abb. 1. Das zu realisierende konjugierte Polenpaar

Mit einer L—C-Schaltung:

$$2\pi \cdot 50 \text{ r/s} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \text{ das läßt sich}$$

z. B. mit den Werten $C = 1\mu F$; $L = 10 H$ verwirklichen.

Wird dasselbe dominante Polenpaar mit dem in vorliegender Arbeit behandelten Netzwerke realisiert, erhält man die Bedingung

$$2\pi \cdot 50 \text{ r/s} = \frac{1}{RC}, \text{ die z. B. mit den Schaltelementen } C = 100nF; R = 32 k\Omega \text{ hergestellt werden kann.}$$

Statt der in LC-Schaltung erforderlichen 10 H und 1 μ F wurden für ein RC-Netzwerk 100 nF und 32 k Ω erhalten. Es genügt, auf die Genauigkeit, Stabilität, Spannungs- und Stromabhängigkeit, Abmessungen der beiden Varianten hinzuweisen, um sich von den unabstreitbaren Vorzügen eines RC-Netzwerkes zu überzeugen.

In der vorliegenden Arbeit wird eine konkrete, aktive RC-Schaltung analysiert (die Schaltung wurde dem Aufsatz von FARRER [1] entliehen). Die Untersuchungsergebnisse können für die Synthese von aktiven RC-Filterschaltungen günstig verwertet werden.

1. Das betrachtete aktive RC-Netzwerk und seine Verwendung Filtersynthese

Der Aufbau der behandelten aktiven RC-Schaltung in Doppel-T-Anordnung ist in Abb. 2 dargestellt. Kennwerte des Verstärkers »A«:

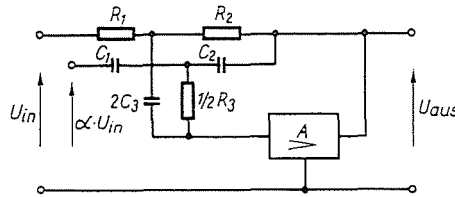


Abb. 2. Aktives Doppel-T-Filterelement

Spannungsverstärkung	A_{11}	$= 1 - \beta$
Eingangswiderstand	R_{in}	$= \infty$
Ausgangswiderstand	R_{aus}	$= 0$

Für die Filtersynthese wird eine spezifische Doppel-T-Anordnung verwendet, bei der zwischen den Nennwerten der Schaltelemente folgende Beziehungen bestehen:

$$R_1 = R_2 = R_3 \quad (\text{im weiteren } R),$$

$$C_1 = C_2 = C_3 \quad (\text{im weiteren } C).$$

Nach Einsetzen von $RC = T$ ergibt sich im komplexen Frequenzbereich die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{U_{aus}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{1 + \alpha s^2 T^2}{1 + 4s\beta T + s^2 T^2}. \quad (1)$$

Die Pole und Nullstellen gemäß Beziehung (1) sind bei Wahl der Einheit $T = 1$ in Abb. 3 dargestellt.

Offensichtlich ist die Lage der konjugierten Nullstellen auf der imaginären Achse von Parameter α , jene der konjugierten Pole auf dem Kreis mit Einheitsradius von Parameter β abhängig. Auf dieser Grundlage lassen sich in der untersuchten Schaltung bei einer entsprechenden Wahl der Werte für $T = RC$; α und β , das konjugierte Nullpaar in der imaginären Achse, das konjugierte

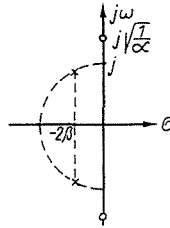


Abb. 3. PN-Anordnung eines aktiven Doppel-T-Filterelementes

Polenpaar an einer beliebigen Stelle in der linken Halbebene realisieren. Wohl-gemerkt, nehmen die beiden Pole nur dann die Lage in Abb. 3 ein, wenn β zwischen 0 und 0,5 liegt.

Die Schaltung in Abb. 2 läßt sich mit Kettenschaltung günstig für die Realisierung der Pole und Nullstellen durch elliptische (Cauer) Approximation erzielter Filter verwenden. In Abb. 4 sind einige typische, durch eine Cauer-Approximation gewonnene PN-Pläne dargestellt. (Die Abbildung zeigt die PN-Pläne von Tiefpaß-Filtern mit den Graden $n = 3, 4, 5, 6, 7$).

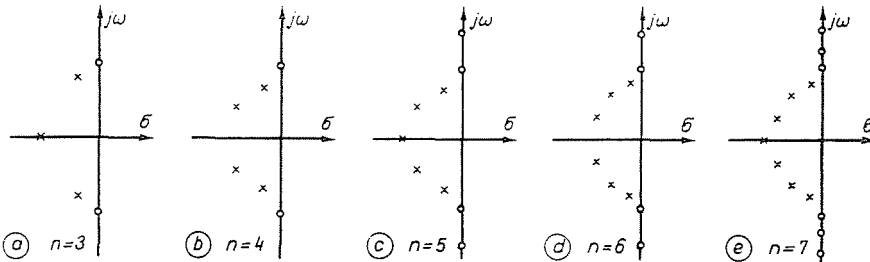


Abb. 4. PN-Anordnung von Cauer-Tiefpaßfiltern mit verschiedenen Graden

Es liegt auf der Hand, daß diese PN-Anordnungen aus den Typenelemen-ten in Abb. 5 durch Superposition zusammengesetzt werden können.

Die PN-Anordnung in Abb. 5a wird durch die bereits beschriebene Schal-tung ausgeführt, während sich die Anordnung in Abb. 5b mit derselben Schal-tung und beim Ansatz $\alpha = 0$ (die Nullstellen verschieben sich in die Unendlich-keit) verwirklichen läßt. Der einzelne Pol in Abb. 5c wird durch ein passives

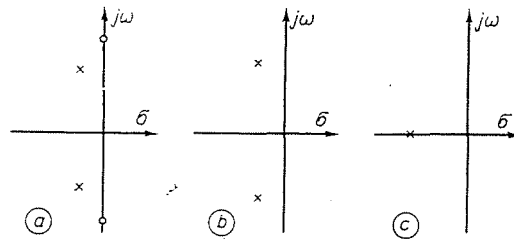


Abb. 5. PN-Typenelement

RC-Glied realisiert. Die Superposition der PN-Anordnungen stellt hinsichtlich der Schaltung eine geeignete Kettenschaltung der erwähnten Einheiten dar. Es ist zu bemerken, daß bei einer entsprechenden Wahl von $\alpha > 1$ eine elementare PN-Anordnung erzielt wird, mit welcher auch Hochpaßfilter, Bandsperrern und Bandpaßfilter hergestellt werden können.

2. Bestimmung der Übertragungsfunktion des Netzwerkes

Für die spätere Toleranzprüfung ist die allgemeine Form der Übertragungsfunktion erforderlich, d. h., daß auch die hinsichtlich ihres Nennwertes übereinstimmenden Elemente voneinander zu unterscheiden sind (siehe Abb. 2).

Wir nehmen an, daß alle Quellen und der Verstärker »A« ideal sind und der Ausgang unbelastet ist (die Wirkungen der Quellenwiderstände und praktischen Verstärker werden in Abschnitt 5 behandelt).

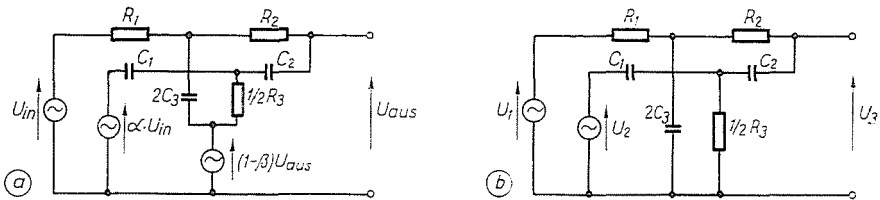


Abb. 6. Schaltung und Ersatzschaltbild eines Filterelementes

Die Schaltung in Abb. 6a kann unter Berücksichtigung des Schleifengesetzes in die Ersatzschaltung in Abb. 6b umgewandelt werden, wobei:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{in} - (1 - \beta) U_{aus} \\ U_2 &= \alpha U_{in} - (1 - \beta) U_{aus} \\ U_3 &= \beta U_{aus} \end{aligned} \quad (2)$$

Aufgrund des Superpositionsprinzips gilt

$$U_3 = AU_1 + B \cdot U_2, \tag{3}$$

wo die Ausdrücke für A und B durch Spannungsteilung bestimmt werden.

$$A = \frac{1 + s \frac{C_1 + C_2}{2} R_3}{N}, \tag{4}$$

und

$$B = \frac{s^2 C_1 C_2 \frac{R_1 + R_2}{2} R_3 + s^3 C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 R_3}{N}, \tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned} N = & 1 + s \left(2R_1 C_3 + \frac{C_1 + C_2}{2} R_3 + 2C_2 \frac{R_1 R_2}{2} \right) + \\ & + s^2 \left(2 \frac{C_1 + C_2}{2} C_3 R_1 R_3 + 2C_2 C_3 R_1 R_2 + C_1 C_2 \frac{R_1 + R_2}{2} R_3 \right) + \\ & + s^3 C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 R_3. \end{aligned}$$

Die einzelnen Spannungswerte aus Gl. (2) in Gl. (3) eingesetzt, erhält man

$$\beta U_{\text{aus}} = A[U_{\text{in}} - (1 - \beta)U_{\text{aus}}] + B[zU_{\text{in}} - (1 - \beta)U_{\text{aus}}],$$

und daraus

$$U_{\text{aus}} = \frac{A + Bz}{\beta + (1 - \beta)(A + B)} U_{\text{in}}.$$

Nach Einsetzen der Gln. (4) und (5), ergibt sich die Übertragungsfunktion des Systems zu

$$\begin{aligned} \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{in}}} = & \frac{1 + s \frac{R_3}{2} (C_1 + C_2) + \alpha s^2 (R_1 + R_2) \frac{R_3}{2} C_1 C_2 +}{1 + s \left[(R_1 + R_2) C_2 \beta + R_1 2C_3 \beta + (C_1 + C_2) \frac{R_3}{2} \right] +} \\ & + \frac{\alpha s^3 R_1 R_2 \frac{R_3}{2} C_1 C_2 2C_3}{+ s^2 \left[C_1 C_2 (R_1 + R_2) \frac{R_3}{2} + R_1 R_2 C_2 2C_3 \beta + R_1 \frac{R_3}{2} (C_1 + C_2) 2C_3 \beta \right] +} \\ & + \frac{s^3 R_1 R_2 \frac{R_3}{2} C_1 C_2 2C_3}{\tag{6}} \end{aligned}$$

Ist $R_1 = R_2 = R_3 = R$; $C_1 = C_2 = C_3 = C$; $RC = T$; so gilt:

$$\frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{in}}} = \frac{1 + sT + \alpha s^2 T^2 + \alpha s^3 T^3}{1 + (4\beta + 1)sT + (4\beta + 1)s^2 T^2 + s^3 T^3}.$$

Die Übertragungsfunktion hat bei $s = -\frac{1}{T}$ sowohl eine Nullstelle als auch einen Pol, die sich gegenseitig aufheben, so erhält man den Ausdruck

$$\frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{in}}} = \frac{1 + \alpha s^2 T^2}{1 + 4\beta sT + s^2 T^2}$$

der mit Gl. (1) übereinstimmt.

Die Beziehung (6) liefert die Grundlage zur Toleranzprüfung des Netzwerkes, d. h. zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen der Wertunsicherheit der Elemente und der Änderung der Übertragungskennwerte. Die Toleranzprüfung wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

3. Vereinfachte Toleranzprüfung

Die mit einer gegebenen Schaltung realisierte Übertragungsfunktion bzw. PN-Anordnung ist von der idealen — zufolge der endlichen Genauigkeit der eingebauten Schaltelemente — abweichend. Die zulässige Abweichung ist in den Spezifikationsforderungen niedergelegt. Es ist eine Aufgabe der Projektierung, die erforderliche Genauigkeit der vorgesehenen Schaltelemente auf die zulässige Unsicherheit der Übertragungskennwerte abzustimmen.

Da beim Entwurf von Filternetzwerken im allgemeinen eine Dämpfungs-Frequenzkennlinie mit vorgeschriebener Toleranz verwirklicht werden soll, hat auch eine Toleranzprüfung der Schaltung als Ergebnis die frequenzabhängige Dämpfungsänderung zu liefern. Eine solche vollwertige Prüfung — deren Durchführung in Abschnitt 4 behandelt werden soll — ist bei aktiven Doppel-T-Filtern sehr arbeitsaufwendig und im Großteil der Fälle auch überflüssig. Es ist viel zweckmäßiger, im ersten Schritt die Beziehung zwischen der Genauigkeit der Schaltelemente und der Unsicherheit der Pole und Nullstellen zu bestimmen. In der komplexen Frequenzebene ist eine so erzielte Information sehr anschaulich und bietet eine einfache Möglichkeit zur näherungsweise Bestimmung der voraussichtlichen Dämpfungsänderung. Die Methode stellt lediglich dann eine einfaches Verfahren dar, wenn im betreffenden Frequenzintervall die Wirkung der Unsicherheit eines einzigen Poles oder einer Nullstelle dominant ist. Durch eine geeignete Paarung der konjugierten Pole und Nullstellen des zu erstellenden Filters (die mit Hilfe eines Doppel-T-Elementes ausgeführten Pole und Nullstellen sollen voneinander womöglich entfernt sein) lassen sich in der Regel die dominanten Eigenschaften in einem breiten Fre-

quenzbereich sicherstellen. In diesem Abschnitt soll die Bestimmung der Unsicherheit der Wurzeln (Pole und Nullstellen) behandelt werden und die Ergebnisse werden für die Entwurfspraxis in handliche Diagramme zusammengefaßt. Im zweiten Teil des Abschnittes wird die Beziehung zwischen dominanter Pole-Nullstellen-Unsicherheit und den Übertragungskennwerten untersucht, sodann wird die Anwendung der Ergebnisse an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

a) Beziehung zwischen PN-Unsicherheit und der Unsicherheit der Schaltelemente.

Da die allgemeine Bestimmung der Wurzeln der Gl. (6) zu umständlich wäre (Auflösung von kubischen Gleichungen mit mehreren Parametern), wird das Problem umgangen, und die Aufgabe wie folgt gelöst:

gegeben sei das Polynom $F(s)$ mit der Wurzelfaktorform

$$F(s) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{s}{s_j} \right)$$

wobei

$$s_j = s_j(u_1; u_2 \dots u_n) \text{ ist.}$$

Darin bedeuten $u_1 \dots u_n$ die verschiedenen Schaltelemente.

Die Ableitung des Polynoms $F(s)$ nach u_k ist:

$$\frac{\partial F(s)}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F(s)}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^m \left[\frac{s}{s_j^2} \frac{\partial s_j}{\partial u_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \left(1 - \frac{s}{s_i} \right) \right].$$

Ist $s = s_j$, so gilt:

$$\left. \frac{\partial F(s)}{\partial u_k} \right|_{s=s_j} = \frac{1}{s_j} \frac{\partial s_j}{\partial u_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \left(1 - \frac{s_j}{s_i} \right),$$

und damit wird

$$\frac{\partial s_j}{\partial u_k} = s_j \frac{\left. \frac{\partial F(s)}{\partial u_k} \right|_{s=s_j}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \left(1 - \frac{s_j}{s_i} \right)}. \quad (7)$$

Mit Hilfe der Beziehung (7) können die gesuchten PN-Unsicherheiten ermittelt werden. Bei der Bestimmung der Toleranz der Nullstellen stellt $F(s)$ in Gl. (6) den Zähler, bei der Untersuchung der Polunsicherheit den Nenner dar.

Die Analyse wird im Bereich der Nennwertgleichheiten $R_1 = R_2 = R_3 = R$ und $C_1 = C_2 = C_3 = C$ durchgeführt, somit ergeben sich die Nullstellen bzw. Pole für die Übertragungsfunktion (6) bei Wahl einer Einheit $RC = T = 1$ (siehe Abschnitt 1) wie folgt:

$$\begin{aligned} z_1 &= -1, & p_1 &= -1, \\ z_2 &= j\sqrt{\frac{1}{\alpha}}, & p_2 &= -2\beta + j\sqrt{1 - 4\beta^2}, \\ z_3 &= -j\sqrt{\frac{1}{\alpha}}, & p_3 &= -2\beta - j\sqrt{1 - 4\beta^2}. \end{aligned}$$

Das Rechenverfahren der Nullstellenänderung wird an dem untenstehenden Beispiel gezeigt:

Es soll in der untersuchten Übertragungsfunktion die Änderung der Nullstelle $z_1 = -1$ errechnet werden.

In Kenntniß der Werte der Ableitungen nach Gl. (7) läßt sich die gesuchte Nullstellenänderung in folgender Form angeben:

$$\Delta z_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_1}{\partial R_i} \Delta R_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_1}{\partial C_i} \Delta C_i + \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \Delta \alpha.$$

Nach gleicher Transformation erhält man

$$\Delta z_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_1}{\partial R_i} \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_1}{\partial C_i} \cdot \frac{\Delta C_i}{C_i} + \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\alpha}.$$

Da die Ableitungen auch komplexe Zahlen sein können, gilt:

$$\Delta z_1 = \operatorname{Re} \Delta z_1 + j \operatorname{Im} \Delta z_1$$

mit:

$$\operatorname{Re} \Delta z_1 = \sum_i \operatorname{Re} \frac{\partial z_1}{\partial R_i} \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} + \sum_i \operatorname{Re} \frac{\partial z_1}{\partial C_i} \cdot \frac{\Delta C_i}{C_i} + \operatorname{Re} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\alpha};$$

$$\operatorname{Im} \Delta z_1 = \sum_i \operatorname{Im} \frac{\partial z_1}{\partial R_i} \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} + \sum_i \operatorname{Im} \frac{\partial z_1}{\partial C_i} \cdot \frac{\Delta C_i}{C_i} + \operatorname{Im} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\alpha}.$$

Diese Berechnung muß für jede Nullstelle und jeden Pol durchgeführt werden.

Der Verlauf der Toleranzberechnung läßt sich unter Anwendung der Vektoralgebra bündig beschreiben. Dafür werden die Spaltenvektoren

$$\overline{\Delta C/C} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta C_1}{C_1} \\ \frac{\Delta C_2}{C_2} \\ \frac{\Delta C_3}{C_3} \end{bmatrix}; \quad \overline{\Delta R/R} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_1}{R_1} \\ \frac{\Delta R_2}{R_2} \\ \frac{\Delta R_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

eingeführt. Der die komplexen Veränderungen der Nullstellen beinhaltende Spaltenvektor ist:

$$\overline{\Delta z} = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{bmatrix};$$

mit:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta z} &= \overline{Re\Delta z} + j\overline{Im\Delta z}; \\ \overline{Re\Delta z} &= \overline{\Delta Re z_C} + \overline{\Delta Re z_R} + \overline{\Delta Re z_z}; \\ \overline{Im\Delta z} &= \overline{\Delta Im z_C} + \overline{\Delta Im z_R} + \overline{\Delta Im z_z}; \\ \overline{\Delta Re z_C} &= \overline{M_{Re z_C}} \cdot \overline{\Delta C/C}; \\ \overline{\Delta Re z_R} &= \overline{M_{Re z_R}} \cdot \overline{\Delta R/R}; \\ \overline{\Delta Im z_C} &= \overline{M_{Im z_C}} \cdot \overline{\Delta C/C}; \\ \overline{\Delta Im z_R} &= \overline{M_{Im z_R}} \cdot \overline{\Delta R/R}, \end{aligned} \quad (8)$$

Die die Ableitungen enthaltenden Matrizen sind (die Ableitungen werden in der im vorgeführten Beispiel benutzten halb-relativen Form angegeben, z. B.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial z_1}{\partial R_i} \\ \frac{\partial R_i}{R_i} \end{array} \right):$$

$$M_{Re z_C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & z \\ \frac{1}{2(1+z)} & \frac{1}{2(1+z)} & \frac{1}{1+z} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4(1+z)} & \frac{1}{4(1+z)} & \frac{1}{2(1+z)} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4(1+z)} & \frac{1}{4(1+z)} & \frac{1}{2(1+z)} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{M}}_{RezR} &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} & \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} & \frac{1}{1+\alpha} \\ \frac{1}{4(1+\alpha)} & \frac{1}{4(1+\alpha)} & \frac{-1}{2(1+\alpha)} \\ \frac{1}{4(1+\alpha)} & \frac{1}{4(1+\alpha)} & \frac{-1}{2(1+\alpha)} \end{bmatrix}; \\
 \overline{\overline{M}}_{ImzC} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\alpha+1}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & -\frac{2\alpha+1}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} \\ \frac{2\alpha+1}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & \frac{2\alpha+1}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & \frac{1}{2\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} \end{bmatrix}; \\
 \overline{\overline{M}}_{ImzR} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2+\alpha}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & -\frac{2+\alpha}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & -\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} \\ \frac{2+\alpha}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & \frac{2+\alpha}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} & \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}(1+\alpha)} \end{bmatrix}; \\
 \overline{\Delta Rez_z} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{\Delta Imz_z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Der Spaltenvektor für die komplexen Veränderungen der Pole:

$$\overline{\Delta p} = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix}.$$

Die für die Fehlerberechnung verwendeten Zusammenhänge sind dieselben wie oben.

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta p} &= \overline{Re\Delta p} + j\overline{Im\Delta p}; \\
 \overline{Re\Delta p} &= \overline{\Delta Rep_C} + \overline{\Delta Rep_R} + \overline{\Delta Rep_\beta}; \\
 \overline{Im\Delta p} &= \overline{\Delta Imp_C} + \overline{\Delta Imp_R} + \overline{\Delta Imp_\beta}; \\
 \overline{\Delta Rep_C} &= \overline{\overline{M}}_{RepC} \cdot \overline{\Delta C/C};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Delta Rep_R} &= M_{RepR} \cdot \overline{\Delta R/R}; \\ \overline{\Delta Imp_C} &= \overline{M}_{ImpC} \cdot \overline{\Delta C/C}; \\ \overline{\Delta Imp_R} &= \overline{M}_{ImpR} \cdot \overline{\Delta R/R};\end{aligned}\quad (10)$$

Die Matrizen:

$$\overline{M}_{RepC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1-12\beta}{8} & -\frac{1-4\beta}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1-12\beta}{8} & -\frac{1-4\beta}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\overline{M}_{RepR} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1+8\beta}{8} & -\frac{2-8\beta}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1+8\beta}{8} & -\frac{2-8\beta}{8} \end{bmatrix};$$

$$\overline{M}_{ImpC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3+2\beta-24\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & -\frac{3+2\beta-8\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & -\frac{2-4\beta}{8\sqrt{1-4\beta^2}} \\ \frac{3+2\beta-24\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & \frac{3+2\beta-8\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & \frac{2-4\beta}{8\sqrt{1-4\beta^2}} \end{bmatrix};$$

$$\overline{M}_{ImpR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3-2\beta}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & -\frac{3-2\beta-16\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & -\frac{2+4\beta-16\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} \\ \frac{3-2\beta}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & \frac{3-2\beta-16\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} & \frac{2+4\beta-16\beta^2}{8\sqrt{1-4\beta^2}} \end{bmatrix};$$

$$\overline{\Delta Rep_\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\Delta\beta \\ -2\Delta\beta \end{bmatrix}; \quad \overline{\Delta Imp_\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4\beta \cdot \Delta\beta}{\sqrt{1-4\beta^2}} \\ \frac{4\beta \cdot \Delta\beta}{\sqrt{1-4\beta^2}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

In der Praxis sind Fehlergröße und -vorzeichen der vorgesehenen Schaltelemente unbekannt, man weiß nur, daß der tatsächliche Wert mit vorgege-

bener Wahrscheinlichkeit im $\pm \Delta$ Bereich des Nennwertes liegt. In diesem Falle werden bei der Summation der einzelnen Fehlerfaktoren die Methoden der mathematischen Statistik angewandt, die zur bekannten quadratischen Summierung der Abweichungen führen.

Die voraussichtliche Unsicherheit der realen bzw. imaginären Teile der Wurzeln erhält man durch die quadratische Summation der Fehlerglieder von realer bzw. imaginärer Richtung. Wohlgermerkt sind die auf diese Weise ermittelten, durch Unsicherheiten von realer und imaginärer Richtung ausgedrückten Verteilungen in der Regel voneinander nicht unabhängig, darum ist die Ermittlung der gemeinsamen Dämpfungsveränderung zufolge realer und imaginärer Toleranz der Wurzeln sehr umständlich. Bei der Bestimmung der voraussichtlichen Unsicherheiten sind an Stelle der im vorangehenden eingeführten Matrizen und Vektoren die aus den Quadraten von deren Elementen konstruierten Matrizen und Vektoren zu verwenden.

Die aus den Quadratelementen aufgebauten neuen Matrizen und Vektoren werden durch die zweite Potenz des früheren Symbols bezeichnet.

Die Beziehungen für die Bestimmung der PN-Unsicherheit nehmen dann die Form an:

$$\begin{aligned} \overline{(Re\Delta z)^2} &= \overline{(\Delta Rez_C)^2} + \overline{(\Delta Rez_R)^2} + \overline{(\Delta Rez_z)^2}; \\ \overline{(Im\Delta z)^2} &= \overline{(\Delta Imz_C)^2} + \overline{(\Delta Imz_R)^2} + \overline{(\Delta Imz_z)^2}; \\ \overline{(\Delta Rez_C)^2} &= \overline{M_{Rez_C}^2} \cdot \overline{(\Delta C/\Delta)^2}; \\ \overline{(\Delta Rez_R)^2} &= \overline{M_{Rez_R}^2} \cdot \overline{(\Delta R/R)^2}; \\ \overline{(\Delta Imz_C)^2} &= \overline{M_{Imz_C}^2} \cdot \overline{(\Delta C/C)^2}; \\ \overline{(\Delta Imz_R)^2} &= \overline{M_{Imz_R}^2} \cdot \overline{(\Delta R/R)^2}; \end{aligned} \tag{12}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{(Re\Delta p)^2} &= \overline{(\Delta Rep_C)^2} + \overline{(\Delta Rep_R)^2} + \overline{(\Delta Rep_\beta)^2}; \\ \overline{(Im\Delta p)^2} &= \overline{(\Delta Imp_C)^2} + \overline{(\Delta Imp_R)^2} + \overline{(\Delta Imp_\beta)^2}; \\ \overline{(\Delta Rep_C)^2} &= \overline{M_{Rep_C}^2} \cdot \overline{(\Delta C/C)^2}; \\ \overline{(\Delta Rep_R)^2} &= \overline{M_{Rep_R}^2} \cdot \overline{(\Delta R/R)^2}; \\ \overline{(\Delta Imp_C)^2} &= \overline{M_{Imp_C}^2} \cdot \overline{(\Delta C/C)^2}; \\ \overline{(\Delta Imp_R)^2} &= \overline{M_{Imp_R}^2} \cdot \overline{(\Delta R/R)^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Fehlerberechnung wird bedeutend vereinfacht, wenn zum Aufbau der Schaltung Kapazitäten von gleicher Unsicherheit und Widerstände von gleicher Unsicherheit verwendet werden. In diesem Falle können die Vektoren $\overline{(\Delta C/C)^2}$ und $\overline{(\Delta R/R)^2}$ umgewandelt werden:

$$\overline{(\Delta C/C)^2} = (\Delta C/C)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \overline{(\Delta R/R)^2} = (\Delta R/R)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

und ein großer Teil der in Gln. (12) und (13) vorgegebenen Berechnungen läßt sich im voraus durchführen. Die Berechnungsergebnisse sind durch die Kurven in Abb. 7a, b, c, d dargestellt. In den Abbildungen sind die Unsicherheiten der Wurzeln z_3 und p_3 nicht angegeben, weil diese mit den Unsicherheiten von z_2 und p_2 übereinstimmen.

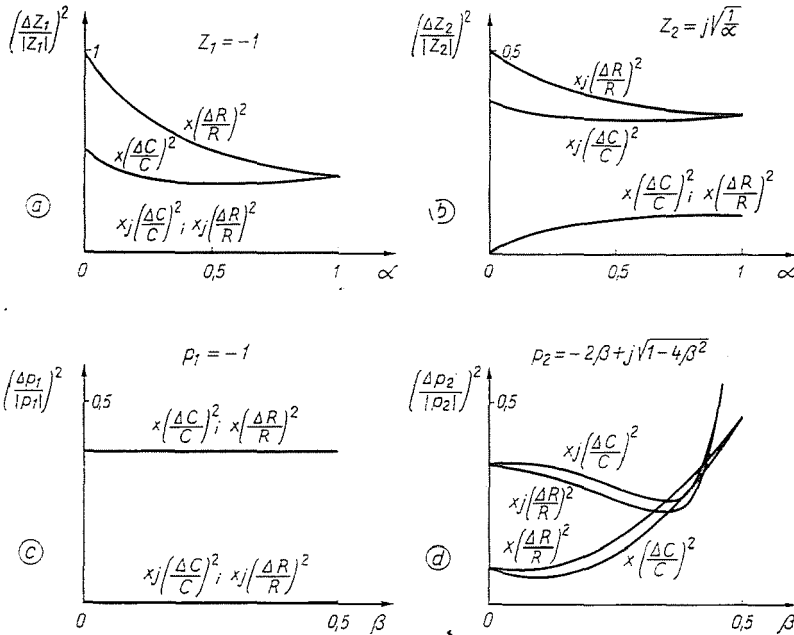


Abb. 7. Unsicherheiten der Pole und Nullstellen

Die Benutzung der Diagramme wird am Ende des Abschnittes an einem Beispiel gezeigt:

b) Zusammenhang zwischen PN-Unsicherheit und Dämpfungsveränderung.

In Kenntnis der Unsicherheit in der PN-Anordnung ist der Projektant mit einiger Übung imstande, die voraussichtliche Dämpfungsänderung mit guter Annäherung abzuschätzen. Unter der Voraussetzung von kleinen Toleranzen läßt sich der Dämpfungsverlauf auf einfache Weise auch zahlenmäßig ermitteln. Die Diagramme 8-a-b-c-d enthalten die Ergebnisse dieser Berechnung.

Da auch die Veränderungen von konjugierten Wurzeln konjugiert sind, ergeben die Diagramme zur Beschreibung der Fehler von $z_{2,3}$ und $p_{2,3}$ (8.b-c-d)

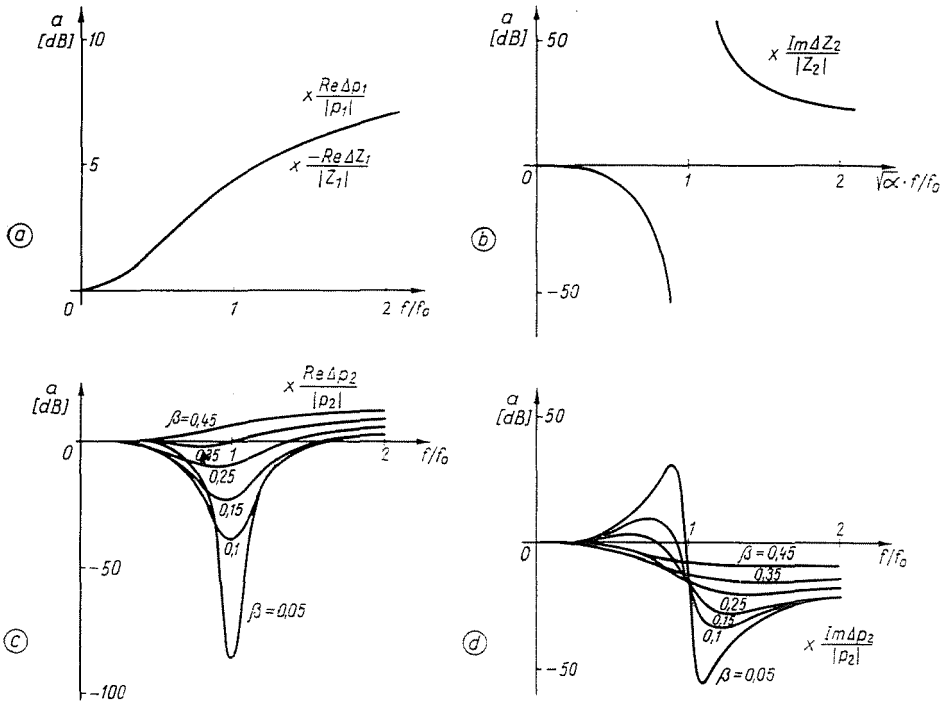


Abb. 8. Dämpfungsunsicherheit zufolge von Unsicherheiten der Wurzeln

bereits die Veränderung des aus den zwei konjugierten Wurzeln resultierenden Komplexes.

Die Benützung der Diagramme in der Entwurfspraxis soll an einem Beispiel gezeigt werden.

c) Beispiel der einfachen Toleranzprüfung.

Zu entwerfen ist ein Tiefpaß mit folgenden technischen Daten:

Im Durchlaßbereich $0 - \omega_p$ ist die zulässige Dämpfungsschwankung niedriger als 1 dB;

Im Sperrbereich $\omega_a - \infty$ ist die Dämpfung höher als 60 dB; schließlich ist

$$\omega_a/\omega_p = 2.$$

Im ersten Schritt ist eine PN-Anordnung zu wählen, die den angeführten technischen Daten entspricht. Wir nehmen straffere Bedingungen an: die zulässige Dämpfungsschwankung soll im Durchlaßbereich 0,5 dB betragen, damit auch die Unsicherheit zufolge der Toleranzen den Wert 0,5 dB beibehält.

Abb. 9 zeigt die Dämpfungscharakteristik eines durch elliptische Approximation erhaltenen Filters, der die obigen Bedingungen befriedigt.

Sind

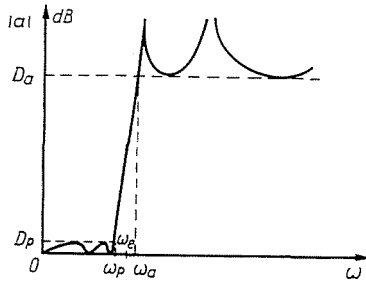


Abb. 9. Dämpfungseharakteristik des zu entwerfenden Filters

$$D_p = 0.5 \text{ dB},$$

$$D_a = 63 \text{ dB},$$

$$\omega_a/\omega_p = 2,$$

können die PN-Werte — bei der Wahl einer Einheit $\omega_e = \sqrt[3]{\omega_a \cdot \omega_p} = 1$ — einer Tafel [5] entnommen werden:

		Realer Teil	Imaginärer Teil	Absolutwert	$\xi = \frac{\text{Realer T.}}{\text{Absolutwert}}$
Nullstellen	z_a	0	2,2987	2,2987	0
	\bar{z}_a	0	2,2987	2,2987	0
	z_b	0	1,4773	1,4773	0
	\bar{z}_b	0	1,4773	1,4773	0
Pole	p_a	0,0681	0,7158	0,7190	0,0947
	\bar{p}_a	0,0681	0,7158	0,7190	0,0947
	p_b	0,2053	0,4694	0,5123	0,4006
	\bar{p}_b	0,2053	0,4694	0,5123	0,4006
	p_c	0,3776	0	0,2776	1

Im nächsten Schritt wird die PN-Anordnung auf die Einheiten in Abb. 5 zerlegt. Eine mögliche Art der Zerlegung ist in Abb. 10 dargestellt. Die Ein-

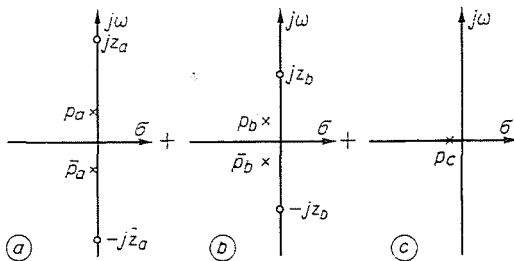


Abb. 10. PN-Zerlegung des zu entwerfenden Filters

heiten in 10a und 10b sind mit je einem aktiven RC-Glied in Doppel-T-Schaltung, jene in Abb. 10c mit einem passiven RC-Glied ausgeführt. Die für Toleranzen zulässige Dämpfungsunsicherheit von 0,5 dB wird zweckmäßigerweise aufgeteilt wie folgt: für die beiden aktiven Doppel-T-Einheiten werden je 0,3 dB, für die passive RC-Einheit 0,1 dB zugelassen, da

$$\sqrt{0,3^2 + 0,3^2 + 0,1^2} < 0,5$$

ist. Nun soll die Toleranzberechnung der Einheit mit der PN-Anordnung in Abb. 10 ausführlich durchgeführt werden. Zuerst werden die für die Berechnung erforderlichen Konstanten bestimmt. Aufgrund von Abb. 3 (jetzt wird der Absolutwert des Poles die Einheit sein) gilt:

$$\frac{1}{|z|} = \frac{z_a}{|p_a|} = \frac{2,2987}{0,7190},$$

daraus:

$$z = 0,098;$$

und

$$\beta = \frac{\xi}{2} = \frac{0,0947}{2} = 0,04735.$$

Obere Grenze des Durchlaßbereiches:

$$\frac{w_p}{|p_a|} = \frac{0,7071}{0,7190} = 0,98.$$

Gesetzt, es werden Schaltelemente mit den gleichen Unsicherheiten verwendet: dann ist

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta R}{R} = h.$$

Aus Abb. 7a kann bei $z \approx 0,1$ die relative Änderung von z_1 abgelesen werden:

$$\frac{\Delta z_1}{|z_1|} = \sqrt{0,43 \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 0,8 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = 1,11h.$$

Aus Abb. 7b läßt sich die Änderung von z_2 ablesen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z_2}{|z_2|} &= \sqrt{0,025 \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 0,025 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} + \\ &+ j \sqrt{0,35 \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 0,45 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = (0,224 + j 0,89) h. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich aus den Abb. 7c und 7d bei $\beta \approx 0,05$ die relativen Änderungen von p_1 und p_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_1}{|p_1|} &= \sqrt{0,37 \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 0,37 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = 0,86 h, \\ \frac{\Delta p_2}{p_2} &= \sqrt{0,075 \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 0,08 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} + \\ &+ j \sqrt{0,35 \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + 0,33 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = (0,4 + j 0,83) h. \end{aligned}$$

Zu diesen Wurzel-Unsicherheiten sind noch die Unsicherheiten zufolge der Fehler von α und β hinzuzurechnen (siehe Gln. [9] und [12] bzw. [11] und [13]), so erhält man die resultierenden PN-Toleranzen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z_1}{z_1} &= 1,11 h; & \frac{\Delta z_2}{z_2} &= 0,224 h + j \sqrt{0,89^2 h^2 + 0,5^2 h_z^2}; \\ \frac{\Delta p_1}{p_1} &= 0,86 h; & \frac{\Delta p_2}{p_2} &= \sqrt{0,4^2 h^2 + 2^2 h_z^2} + j \sqrt{0,83^2 h^2 + 0,095^2 h_z^2}; \end{aligned}$$

mit $h_z = \frac{\Delta z}{z}$ und $h_\beta = \Delta \beta$.

Die den einzelnen PN-Änderungen zugehörigen Dämpfungsänderungen sind in Abhängigkeit der Frequenz aus den Abb. 8a-b-c-d ersichtlich. Zum Beispiel beträgt die Unsicherheit des realen Teils von z_1 — wie bereits ermittelt wurde — 1,11 h. Unter deren Wirkung entsteht die höchste Dämpfungsunsicherheit an der oberen Grenze des Durchlaßbereiches, mit dem Werte

$$|a_1| = 4,3 \operatorname{Re} \frac{\Delta z_1}{z_1} = 4,3 \cdot 1,11 h \quad (f/f_0 = 0,98 \text{ — siehe Abb. 8a}).$$

Auf ähnliche Weise erhält man die übrigen Höchstwerte der Dämpfungsunsicherheiten im Durchlaßbereich:

$$|a_2| = 4,3 \cdot \operatorname{Re} \frac{\Delta p_1}{p_1} = 3,7 h \quad (\text{bei } f/f_0 = 0,98 \text{ — Abb. 8a})$$

$$|a_3| \approx 2 \cdot \operatorname{Im} \frac{\Delta z_2}{z_2} = 2 \sqrt{0,89^2 h^2 + 0,5^2 h_z^2} \quad (\text{bei } \sqrt{x} f/f_0 = 0,3 \text{ — Abb. 8b})$$

$$|a_4| = 85 \cdot \operatorname{Re} \frac{\Delta p_2}{|p_2|} = 85 \sqrt{0,4^2 h^2 + 2^2 h_{\beta}^2} \quad (\text{bei } f/f_0 = 0,98 - \text{Abb. 8c})$$

$$|a_5| = 31 \cdot \operatorname{Im} \frac{\Delta p_2}{p_2} = 31 \sqrt{0,83^2 h^2 + 0,095^2 h_{\beta}^2} \quad (\text{bei } f/f_0 = 0,9 - \text{Abb. 8d}).$$

Wird vorausgesetzt, daß $h_x \leq 2h$, so ist nach Vergleich der einzelnen Dämpfungsunsicherheiten der dominante Charakter des Poles p_2 augenfällig, die resultierende Dämpfungstoleranz läßt sich also — wie das bereits am Anfang des Abschnittes angedeutet wurde — leicht ermitteln:

$$|a| = \sqrt{a_4^2 + a_5^2} = \sqrt{85^2(0,4^2 h^2 + 2^2 h_{\beta}^2) + 31^2(0,83^2 h^2 + 0,095^2 h_{\beta}^2)}$$

$$a = \sqrt{1835 h^2 + 28900 h_{\beta}^2}.$$

Wir bemerken, daß $|a|$ mit einer gewissen Sicherheit bestimmt wurde, weil die Unsicherheitsmaxima a_4 und a_5 nicht bei derselben Frequenz liegen.

Werden die Fehler $h = 0,5 \cdot 10^{-2}$

und $h_{\beta} = 0,15 \cdot 10^{-2}$ zugelassen, so gilt

$|a| \approx 0,3$ dB, die Bedingung hinsichtlich der Dämpfungsunsicherheit des Filterelementes ist also befriedigt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß im Doppel-T-Netzwerk des untersuchten Filterelementes $\pm 0,5$ prozentige Kapazitäten und Widerstände vorzusehen, die x -Teilung der speisenden Quelle mit ± 1 prozentiger Genauigkeit, die Verstärkung des Rückkopplungsverstärkers mit einer Genauigkeit von $\Delta\beta = \pm 1,5 \cdot 10^{-3}$ auszuführen sind.

Die Toleranzsynthese des anderen Doppel-T-Gliedes in der Filterkette wird ähnlich wie im dargelegten Falle durchgeführt, und auf gleicher Grundlage, doch mit bedeutend geringerem Rechenauswand kann auch das passive RC-Glied bemessen werden.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß wir den durch die Synthese erhaltenen Filter nach dem allgemeinen Toleranzprüfungsverfahren im nächsten Abschnitt — mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage — analysierten und nach den Ergebnissen der Kontrollprüfung entsprach der entworfene Filter der vorgeschriebenen Spezifikation bei einer »Reserve« von etwa 30%.

4. Allgemeines Toleranzprüfungsverfahren

Die Grundlagen für eine vollwertige Toleranzprüfung werden durch die Gln. (14) und (15) GÉHER [2] geliefert:

$$a = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left(\frac{\partial F(s)}{\partial u_i} \cdot \frac{u_i}{F(s)} \right)_{s=j\omega} \cdot \frac{\Delta u_i}{u_i} \quad [\text{Neper}], \quad (14)$$

$$b = \sum_{i=1}^m \operatorname{Im} \left(\frac{\partial F(s)}{\partial u_i} \cdot \frac{u_i}{F(s)} \right)_{s=j\omega} \cdot \frac{\Delta u_i}{u_i} \quad [\text{rad}], \quad (15)$$

wo a — die resultierende Dämpfungsänderung,
 b — die resultierende Phasenänderung,
 $F(s)$ — die Übertragungsfunktion (siehe Gl. (6)),
 $u_1 \dots u_m$ — die Schaltelemente bedeuten.

Zur Bestimmung sowohl der Dämpfungs- als auch der Phasenänderung müssen die Funktionen $\frac{\partial F(s)}{\partial u_i} \cdot \frac{u_i}{F(s)}$ bekannt sein, die aus Beziehung (6) ermittelt werden können.

$$\begin{aligned} & \frac{s}{2(1+s)} \left[\frac{-1+2\alpha s}{1+\alpha s^2} - \frac{-1+(2-6\beta)s}{1+4\beta s+s^2} \right], \quad u_1 = C_1; \\ & \frac{s}{2(1+s)} \left[\frac{-1+2\alpha s}{1+\alpha s^2} - \frac{-1+4\beta+2(1-\beta)s}{1+4\beta s+s^2} \right], \quad u_2 = C_2; \\ & \frac{s}{2(1+s)} \left[\frac{-2}{1+\alpha s^2} - \frac{-2(1-2\beta)}{1+4\beta s+s^2} \right], \quad u_3 = C_3; \\ & \frac{s}{2(1+s)} \left[\frac{-2+\alpha s}{1+\alpha s^2} - \frac{-2+6\beta+s}{1+4\beta s+s^2} \right], \quad u_4 = R_1; \\ & \frac{s}{2(1+s)} \left[\frac{-2+\alpha s}{1+\alpha s^2} - \frac{-2+2\beta+(1-4\beta)s}{1+4\beta s+s^2} \right], \quad u_5 = R_2; \\ & \frac{s}{2(1+s)} \left[\frac{2\alpha s}{1+\alpha s^2} - \frac{2(1-2\beta)s}{1+4\beta s+s^2} \right], \quad u_6 = R_3; \\ & \frac{\alpha s^2}{1+\alpha s^2}; \quad u_7 = \alpha; \quad - \frac{4\beta s}{1+4\beta s+s^2}; \quad u_8 = \beta. \end{aligned} \quad (16)$$

Die resultierenden Unsicherheiten zufolge der einzelnen Fehlerglieder werden mit Hilfe der Formeln

$$a(\omega) = \sqrt{\sum_{i=1}^8 \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial F(s)}{\partial u_i} \cdot \frac{u_i}{F(s)} \right)_{s=j\omega} \cdot \frac{\Delta u_i}{u_i} \right]^2} \quad [\text{Neper}]; \quad (17)$$

und

$$b(\omega) = \sqrt{\sum_{i=1}^8 \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\partial F(s)}{\partial u_i} \cdot \frac{u_i}{F(s)} \right)_{s=j\omega} \cdot \frac{\Delta u_i}{u_i} \right]^2} \quad [\text{rad}] \quad (18)$$

berechnet.

Die Funktionen von $a(\omega)$ und $b(\omega)$ werden zweckmäßigerweise mit Hilfe einer elektronischen Rechanlage errechnet.

Werden die zwei vorggeführten Verfahren zur Toleranzberechnung verglichen, so läßt sich feststellen, daß

die PN-Unsicherheit leicht zu bestimmen ist, die Ergebnisse von anschaulicher Bedeutung und zur Einschätzung der voraussichtlichen Unsicherheiten der Übertragungskennwerte geeignet sind. Diese Methode ist also bei einer Filtersynthese zur Bestimmung der erforderlichen Elementgenauigkeiten besonders geeignet;

das allgemeine Verfahren erfordert einen bedeutenden Rechenaufwand, und wegen der mangelhaften Übersichtlichkeit sind die Ergebnisse nur umständlich für eine Synthese verwendbar. Daher wird die Anwendung dieses Verfahrens bei einem Netz mit bereits gewählter Genauigkeit für die Kontrolle empfohlen.

5. Untersuchung der regelmäßigen Fehlerquellen in der Schaltung

Bisher wurden die innere Impedanz der die Schaltung speisenden Quelle sowie die Eingangsimpedanz des Trennverstärkers und die Eingangs- und Ausgangsimpedanz des Rückkopplungsverstärkers nicht berücksichtigt. In diesem Abschnitt werden die Wirkungen dieser regelmäßigen Fehlerquellen analysiert.

Das durch die entsprechenden parasitischen Impedanzen ergänzte Ersatzschaltbild ist in Abb. 11a dargestellt.

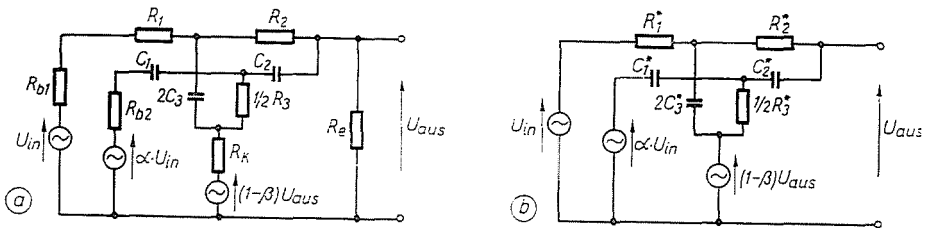


Abb. 11. Schaltung eines aktiven Doppel-T-Filterelementes unter Berücksichtigung der regelmäßigen Fehlerquellen, und Ersatzschaltbild nach Umgestaltung der Schaltung

Wie es aus dem Ersatzschaltbild hervorgeht, werden die parasitischen Impedanzen als reelle (als Widerstände) angenommen. Im üblichen Frequenzbereich der behandelten Filterschaltung läßt sich diese Bindung für Generatoren und Verstärker ohne jede Schwierigkeit durchsetzen.

Das Ersatzschaltbild in Abb. 11b kann durch geeignete Sterndreieck-Umformungen vereinfacht werden (siehe Abb. 11b). Dazu bedienen wir uns der Gleichheiten $C_1 = C_2 = C_3 = C$; $R_1 = R_2 = R_3 = R$, und wählen als Einheit $RC = T = 1$.

Zwischen den Elementen der beiden Ersatzschaltbilder bestehen die Beziehungen

$$C_1^x = C_1 \left[1 - sh_2 - \frac{1}{2} h_e \right],$$

$$C_2^x = C_2 \left[1 + 4(1 + s)h_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s} \right) h_e \right],$$

$$C_3^x = C_3 [1 - 2(1 + s)h_k],$$

$$R_1^x = R_1(1 + h_1),$$

$$R_2^x = R_2 [1 - 4(1 + s)h_k],$$

$$R_3^x = R_3 \left[1 + 2(1 + s)h_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s} \right) h_e \right],$$

wobei $h_1 = \frac{R_{b1}}{R}$, $h_2 = \frac{R_{b2}}{R}$, $h_k = \frac{R_k}{R}$, $h_e = \frac{R}{\beta R_c}$

sind, also die relativen Größen der einzelnen Fehlerquellen bedeuten.

Man sieht, daß die Elemente des neuen Ersatzschaltbildes natürlich keine reinen Widerstände und Kapazitäten mehr sind, sondern komplexe Funktionen darstellen.

Das umgeformte Ersatzschaltbild hat den Vorteil, daß es die regelmäßigen Fehlerquellen der ursprünglichen Schaltung in die komplexe Änderung der Filterelemente überführt hat, und daher die Ergebnisse der Toleranzprüfung bei der weiteren Fehlerberechnung bereits benutzt werden können. Es soll darauf hingewiesen werden, daß in den veränderten Schaltungsparametern auch die komplexe Kreisfrequenz s vorkommt, und daher die neue Übertragungsfunktion einerseits neue Pole und Nullstellen enthalten wird, andererseits sich die Stellen der früheren Pole und Nullstellen ändern werden. Wir bedienen uns der in Abschnitt 3 beschriebenen einfachen Toleranzprüfung, und das bringt mit sich, daß wir lediglich die Änderungen der alten Wurzeln bestimmen können. Offensichtlich werden jedoch bei geringen regelmäßigen Fehlern die neuen Wurzeln vom untersuchten Frequenzbereich ziemlich entfernt liegen, ihre Wirkung kann daher mit guter Annäherung vernachlässigt werden.

Der regelmäßige Fehler der PN-Anordnung wurde durch die formale Anwendung der Gln. (8) und (10) ermittelt, wo $\Delta C/C$ und $\Delta R/R$ Vektoren (deren Elemente komplexe Funktionen) darstellen:

$$\overline{\Delta C/C} = \begin{bmatrix} -sh_2 - \frac{1}{2}h_c \\ 4(1+s)h_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s}\right)h_c \\ -2(1+s)h_k \end{bmatrix};$$

$$\overline{\Delta R/R} = \begin{bmatrix} h_1 \\ -4(1+s)h_k \\ 2(1+s)h_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s}\right)h_c \end{bmatrix}.$$

An Stelle von s in den Elementen der als Ergebnis erhaltenen Vektoren $\overline{\Delta z}$ bzw. $\overline{\Delta p}$ die entsprechende Wurzel (z. B. z_1 bei der Berechnung von Δz_1) eingesetzt, erhält man die Änderung der PN-Anordnung.

Bei kleinen β -Werten wird das Endergebnis der Berechnung mit guter Annäherung durch folgende Beziehungen beschrieben:

$$\Delta z_1 = \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} h_1 + \frac{1}{2(1+\alpha)} h_2,$$

$$\Delta z_2 = \left(1 - j \frac{2+\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right) \frac{h_1}{4(1+\alpha)} + \left(-\frac{2\alpha+1}{\alpha} + j \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \frac{h_2}{4(1+\alpha)} +$$

$$+ \left(-4 - j \frac{4}{\sqrt{\alpha}}\right) \frac{h_k}{1+\alpha},$$

Δz_3 – konjugiert von Δz_2 ,

$$\Delta p_1 = \frac{1}{4} h_1 + \frac{1}{4} h_2,$$

$$\Delta p_2 = [1 - j(3 - 2\beta)] \frac{h_1}{8} +$$

$$+ \left[-3 + 48\beta^2 + j(1 - 18\beta + 96\beta^3)\right] \frac{h_2}{8} + [-\beta + j(\beta - 2\beta^2)] h_c +$$

$$+ [-2 + 8\beta - j(2 + 4\beta - 16\beta^2)] h_k,$$

Δp_3 = konjugiert von Δp_2 .

Durch die ermittelten Ergebnisse werden die regelmäßigen Fehler der Wurzeln (richtungs- und größenmäßig richtig) angegeben, und diese sind bereits zur Bestimmung der zulässigen regelmäßigen Fehler ($h_1; h_2; h_3; h_k$) geeignet.

Zusammenfassung

Im Aufsatz wird die ausführliche Toleranzprüfung der aktiven Doppel-T-Filterschaltung behandelt. Verfasser stellen fest, daß eine Toleranzsynthese über die Pol- und Nullstellen-Unsicherheiten eine zum Entwerfen der Schaltung ausreichende Sicherheit gewährt und unter Anwendung der mitgeteilten Diagramme leicht durchzuführen ist. Der Verlauf der Toleranzsynthese wird an einem Entwurfsbeispiel gezeigt. Anhand der Ergebnisse dieser Arbeit läßt sich im allgemeinen feststellen, daß es bei der Bemessung von komplexen Filternetzwerken zweckmäßig sei, die erforderliche Genauigkeit der Elemente über die PN-Unsicherheiten zu bestimmen und sich der allgemeinen Toleranzprüfung lediglich für eine etwaige Kontrolle zu bedienen.

Literatur

1. FARRER, W.: El. Engng. **470**, 219 (1967).
2. GÉHER, K.: Híradástechnika **10**, 289 (1965).
3. McVEY, P. J. W.: El. Engng. **413**, 458 (1962).
4. KOBÁK, V.—ANDREJEV, I.: Szelektív erősítők kettős T szűrőkkel. (Selektive Verstärker mit Doppel-T-Filtern) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
5. SKWIRZYNSKI, J. K.: Design Theory and Data for Electrical Filters. D. Van Nostrand Comp. LTD, London, 1965.
6. FIEBIG, R.—REINSCHKE, K.: Nachrichtentechnik **5**, 173 (1968).
7. FIEBIG, R.—REINSCHKE, K.: Nachrichtentechnik **6**, 236 (1968).
8. NAUMANN, G.—REINSCHKE, K.: Nachrichtentechnik **9**, 328 (1968).
9. HUELSMAN, L. P.: Theory and Design of Active RC Circuits. McGraw-Hill, New York, 1968.

Lajos GAZSI, }
 Endre SELÉNYI } Budapest, XI., Műgyetem rkp. 9. Ungarn.