

EINTEILUNG DER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN NACH DER ART DER FORTPFLANZUNGSKONSTANTEN

Von

I. VÁGÓ

Lehrstuhl für Theoretische Elektrizitätslehre, Technische Universität,
Budapest

(Eingegangen am 24. Mai 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. K. SIMONYI

Die elektromagnetischen Wellen lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten einteilen. So ist beispielsweise die Unterscheidung nach der Frequenz, nach dem angewandten Wellenleiter (der Speiseleitung) und nach dem Wellenbild üblich. Diese letztere führt zur Einreihung der Wellen in die einzelnen Gruppen der verschiedenen Wellentypen (TM, TE, TEM), die sich nach der longitudinalen Komponente der Wellen richtet. Eine weitere Unterteilung innerhalb der Wellentypgruppen nimmt den Augenblickswert des Wellenbildes in der transversalen Ebene zur Grundlage (z. B. TM_{11} , TE_{01}). Schließlich pflegen die Wellen auch nach der zeitlichen Veränderung unterteilt zu werden, die der Endpunkt des Vektors der elektrischen Feldstärke in der transversalen Ebene erfährt (linear, zirkular und elliptisch polarisierte Wellen).

Außer auf Grund dieser allgemein üblichen Kriterien können die Wellen auch nach den Fortpflanzungskonstanten eingeteilt werden, denn die Wellen sind verschieden je nachdem, ob ihre einzelnen Fortpflanzungskonstanten komplex, reell, imaginär oder nullwertig sind.

Die Lösung der Wellengleichung mit Hilfe des Hertzschens Vektors

Die Gleichungen der elektromagnetischen Wellen werden aus dem Hertzschens Vektor \mathbf{H} oder aus dem retardierten Vektorpotential \mathbf{A} abgeleitet. Da \mathbf{H} aus \mathbf{A} und umgekehrt \mathbf{A} aus \mathbf{H} leicht bestimmt werden kann und da beide Lösungen völlig gleichwertige Resultate liefern, sollen sich die hier folgenden weiteren Untersuchungen auf den Hertzschens Vektor \mathbf{H} beschränken.

Es gibt zwei Typen des Hertzschens Vektors, u. zw. den elektrischen \mathbf{H}_e und den magnetischen \mathbf{H}_m . Aus ihnen kann die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die magnetische Feldstärke \mathbf{H} auf unterschiedlichen, zueinander jedoch dualen Wegen ermittelt werden. Beide Typen des Hertzschens Vektors befriedigen die Wellengleichung, entsprechend gilt also für den Fall der zeitlich sinusförmigen Erregung

$$\Delta \mathbf{H} = \gamma_0^2 \mathbf{H}, \quad (1)$$

worin

$$\gamma_0^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon). \quad (2)$$

Hier bezeichnet ε die absolute Dielektrizitätskonstante, μ die absolute Permeabilität, σ hingegen die Leitfähigkeit des Mediums. Mit dem durch die Gl. (2) definierten γ_0 wird die für das gegebene Medium kennzeichnende Fortpflanzungskonstante bezeichnet. Bei verlustfreiem Medium wird $\sigma = 0$ und somit

$$\gamma_0 = j\beta_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega\frac{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c} = j\frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3)$$

worin μ_r bzw. ε_r die relative Permeabilität bzw. die relative Dielektrizitätskonstante, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum, λ hingegen die im gegebenen Medium auf der Kreisfrequenz ω auftretende Wellenlänge bedeutet. Die Wellengleichungen wird man möglichst auf ein Koordinatensystem beziehen, dessen eine Achse mit der longitudinalen, d. h. mit der Fortpflanzungsrichtung der Welle zusammenfällt. Sie figuriert in den Berechnungen als bevorzugte Richtung, doch zeigt sich bei einem Teil der Lösungen, daß die longitudinale Richtung nicht immer bevorzugt ist. Die Auswahl der longitudinalen Richtung ist in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ganz plausibel (z. B. bei Senderantennen die radial gerichtete unter den von der Antenne ausgehenden Kugelkoordinaten oder die axiale Richtung bei Hohlleitern). Die richtige Wahl der longitudinalen Richtung hat sich sowohl bei der Suche nach den Lösungen als auch bei der Systematisierung der Resultate als nützlich erwiesen.

Bei den Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen auf Grund der longitudinalen Richtung ergeben sich Unterschiede je nach dem Wellentyp (TM bzw. TE). Die Wellenform TEM kann als Entartung der TM- oder der TE-Wellen angesehen werden. Beide Wellentypen lassen sich sowohl aus dem \mathbf{H}_e -Typus als auch aus dem \mathbf{H}_m -Typus des Hertz'schen Vektors ableiten, dennoch wird man bei Ableitung der Wellenform TM zweckmäßig vom elektrischen Hertz'schen Vektor \mathbf{H}_e , bei Ableitung der Wellenform TE hingegen vom magnetischen Hertz'schen Vektor \mathbf{H}_m ausgehen. In diesen Fällen hat nämlich der Hertz'sche Vektor nur eine einzige, u. zw. eine longitudinale Komponente, er kann somit als skalare Größe behandelt werden.

Auch Gl. (1) vereinfacht sich in der Form

$$\Delta\Pi = \gamma_0^2\Pi \quad (4)$$

zu einer skalaren Gleichung. Die Lösung der Gl. (4) pflegt im orthogonalen Koordinatensystem gesucht zu werden. (Eine Lösung im nichtorthogonalen System ist nahezu aussichtslos.) Hierbei läßt sich der dreidimensionale Lapla-

cesche Operator — wenn z die longitudinale Richtung bezeichnet —, in der Form

$$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

auflösen. Δ_t ist hier der für die transversale Ebene deutbare zweidimensionale Laplacesche Operator. Aus (1) und (5) hat man die partielle Differentialgleichung

$$\Delta_t \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \gamma_0^2 \Pi, \quad (6)$$

deren Lösung im orthogonalen Koordinatensystem zweckmäßig in Gestalt des Produktes

$$\Pi = \Pi_t Z(z) \quad (7)$$

geschrieben wird. Der Wert von Π_t hängt ausschließlich von den transversal gerichteten Koordinaten ab. Mit (7) nimmt die Gl. (6) die Gestalt

$$\frac{1}{\Pi_t} \Delta_t \Pi_t + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma_0^2 \quad (8)$$

an.

Das erste Glied der linken Seite von (8) hängt nur von den transversalen Koordinaten, das zweite Glied hingegen ausschließlich von der Koordinate z ab, wogegen die rechte Seite von jeder Koordinate unabhängig ist. Unter solchen Umständen hat die Gl. (8) nur dann für jeden beliebigen Koordinatenwert Gültigkeit, wenn auch das erste und zweite Glied der linken Seite unabhängig von den Koordinaten konstant ist. Bezeichnet man diese beiden Glieder mit g^2 bzw. mit γ^2 , dann gilt

$$\Delta_t \Pi_t = g^2 \Pi_t \quad (9)$$

und

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 Z, \quad (10)$$

weiterhin

$$g^2 + \gamma^2 = \gamma_0^2. \quad (11)$$

Π_t befriedigt die zweidimensionale Wellengleichung (9), Z hingegen die eindimensionale Wellengleichung (10). Die Lösung von (10) schreibt sich bekanntlich zu

$$Z(z) = A e^{-\gamma z} + B e^{\gamma z}. \quad (12)$$

Auf Grund der physikalischen Deutung dieser Lösung wird γ der longitudinale Fortpflanzungskoeffizient genannt.

Die Lösung von (9) kann nur für ein konkretes Koordinatensystem angegeben werden. Wie aus den hier folgenden konkreten Beispielen hervorgehen wird, handelt es sich bei g und γ um Größen gleicher Art, und die beiden Koeffizienten bestimmen gemeinsam die Eigenheiten der Welle. In Analogie mit γ wird g der Koeffizient der transversalen Fortpflanzung genannt. Die Werte von γ und g sind im allgemeinen komplex, d. h. es ist

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (13)$$

und

$$g = h + jk. \quad (14)$$

Sie werden auf Grund der Grenzbedingungen der Aufgabe bestimmt.

Untersuchung der Wellen auf Grund der Eigenart der Fortpflanzungskoeffizienten

Am einfachsten läßt sich ein durch die beiden Fortpflanzungskoeffizienten in einer gegebenen Richtung bestimmtes Wellenbild beschreiben, wenn die eine Koordinaten-Linienschaar parallel zur gegebenen Richtung verläuft. Als derartige Richtung kommt beispielsweise bei Zylinderkoordinaten die der Koordinate z oder bei rechtwinkligen Koordinaten die jeder beliebigen Koordinate in Frage. Wählt man ein solches Koordinatensystem, dann ergibt sich für den Fall eines imaginären Fortpflanzungskoeffizienten in der gegebenen Richtung eine ungedämpfte Welle. Ist dagegen der Fortpflanzungskoeffizient reell, dann erfährt das Signal in dieser Richtung eine exponentielle Dämpfung. (In solchen Fällen kann nur von Wellen in erweitertem Sinne gesprochen werden.) Handelt es sich dagegen beim Fortpflanzungskoeffizienten um eine komplexe Zahl, dann liegt eine Wellenerscheinung mit exponentieller Dämpfung vor. Aus dem imaginären Teil des Fortpflanzungskoeffizienten ergibt sich die Wellenlänge λ in der gegebenen Richtung sowie die Phasengeschwindigkeit v_f zu

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (15)$$

bzw. zu

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (16)$$

worin β jeweils den imaginären Teil des Fortpflanzungskoeffizienten bezeichnet.

Liegen die Koordinatenlinien in der untersuchten Richtung nicht parallel, dann gelten allgemein folgende Feststellungen:

Ist der Fortpflanzungskoeffizient reell, dann nimmt die Wellenamplitude in Abhängigkeit von der Koordinate in jedem Augenblick ohne Vorzeichenänderung monoton ab. Ist der Fortpflanzungskoeffizient komplex, dann ändern die für die Welle charakteristischen Feldstärken ihr Vorzeichen zu einem gegebenen Zeitpunkt an bestimmten Stellen, und ihr Maximalwert zwischen je zwei benachbarten Nullstellen sinkt bei wachsenden Koordinatenwerten monoton ab.

In verlustfreien Fällen ist γ_0 stets imaginär, während γ und g sowohl reell als auch imaginär und auch nullwertig sein können. Die möglichen Fälle sind folgende:

$$1. \quad \gamma = j\beta \quad \text{und} \quad g = jk,$$

d. h. beide Fortpflanzungskoeffizienten sind imaginär. In diesem Falle kommt es zur Wellenbildung sowohl in longitudinaler als auch in transversaler Richtung. Ein solcher Fall liegt bei den sich ausbreitenden Wellen von Hohlleitern vor.

$$2. \quad \gamma = j\beta \text{ imaginär} \quad \text{und} \quad g = h \text{ reell.}$$

In longitudinaler Richtung bildet sich eine Welle aus, während sich das Feld in Richtung irgendeiner transversalen Koordinate stark abschwächt. Um solche Wellen handelt es sich bei den Oberflächenwellen.

$$3. \quad \gamma = \alpha \text{ reell} \quad \text{und} \quad g = jk \text{ imaginär.}$$

Das Feld schwächt sich in Längsrichtung stark ab, während in transversaler Richtung eine Welle entsteht. Ein derartiges Feld liegt im Hohlleiter vor, wenn die Wellenlänge λ des Signals größer ist als Grenzwellenlänge.

$$4. \quad \gamma = j\beta \text{ imaginär, } g = 0.$$

Nur in Längsrichtung kommt es zur Wellenbildung, so in mehradrigen Wellenleitern vom Wellentyp TEM.

$$5. \quad \gamma = 0, \quad g = jk \text{ imaginär.}$$

Zur Wellenbildung kommt es nur in der transversalen Richtung, das Feld ist von der longitudinalen Richtung unabhängig. Dieser Fall liegt beim Hohlraumresonator vor, wenn der dritte Index gleich Null ist.

Die verschiedenen möglichen Fälle sind in der Tabelle I zusammengefaßt.

Tabelle I

	γ	g	v_f	Λ	Beispiel
1	$j\beta$	jk	$v_f > c$	$\Lambda > \lambda$	Hohlleiter bei Wellenlängen kleiner als die Grenzwellenlänge
2	$j\beta$	h	$v_f < c$	$\Lambda < \lambda$	Oberflächenwelle
3	α	jk	—	—	Hohlleiter bei Wellenlängen größer als die Grenzwellenlänge
4	$j\beta$	0	$v_f = c$	$\Lambda = \lambda$	Wellentyp TEM mehradriger Wellenleiter (z. B. eines Koaxialkabels)
5	0	jk	$v_f = 0$	$\Lambda = \infty$	Welle im Hohlraumresonator, wenn der dritte Wellentypindex gleich Null ist (z. B. TE_{010})

Im folgenden sollen nun einige Beispiele durchgerechnet werden, die sich zur Behandlung in rechtwinkligen oder in Zylinderkoordinatensystemen eignen.

Beispiele für die Behandlung im Zylinderkoordinatensystem

Die Lösung der Gl. (4) für eine einzige Wellenform schreibt sich im Zylinderkoordinatensystem zu

$$\Pi(r, z, \varphi) = Z_m(-jgr) \cos m\varphi [A_z^{(+)} e^{-\gamma z} + A_z^{(-)} e^{\gamma z}]. \quad (17)$$

Hier ist m eine für die Lösung kennzeichnende ganze Zahl, Z_m hingegen irgendeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung m -ter Ordnung.

Im weiteren soll die Abhängigkeit von z unbeachtet bleiben, da ja für diese die Ausführungen im vorangegangenen Teil dieser Arbeit gültig sind.

Im Sinne der Gl. (17) ist das Feld in φ periodisch, und die Periodizität wird eben durch das m bestimmt. Bei $m = 0$ ist das Feld rotationssymmetrisch.

Im verlustbehafteten Fall ist g komplex, sonst imaginär, reell oder gleich Null. Ist g imaginär ($g = jk$), wird man die Funktion $Z_m(-jgr)$ zweckmäßig in der Form

$$Z_m(-jgr) = Z_m(kr) = A_t J_m(kr) + B_t N_m(kr) \quad (18)$$

schreiben, wobei J_m die Besselsche, N_m hingegen die Neumannsche Funktion — jeweils m -ter Ordnung — bezeichnet.

Ist g reell, wird man Z_m zweckmäßig entweder mit den modifizierten Besselschen oder mit den Hankelschen Funktionen beschreiben. Mit diesen letzteren hat man

$$Z_m(-jgr) = A_t' H_m^{(1)}(-jgr) + B_t' H_m^{(2)}(-jgr), \quad (19)$$

worin $H_m^{(1)}$ und $H_m^{(2)}$ Hankelsche Funktionen erster bzw. zweiter Art und jeweils m -ter Ordnung bedeuten.

Besteht das elektromagnetische Feld im Bereich zwischen zwei coaxialen Zylinderflächen mit den Halbmessern r_1 und r_2 ($r_1 < r_2$, $r_1 \neq 0$ und $r_2 \neq \infty$) dann läßt sich das Feld sowohl mit (18) als auch mit (19) beschreiben [in der Regel wird die Gl. (18) angewandt]. Diese Feststellung trifft für die von der TEM-Form abweichenden Wellenformen in Koaxialleitern und in coaxialen Hohlraumresonatoren zu.

Ist $r_1 = 0$, muß $B_i = 0$ sein, d. h. es wird

$$Z_m(kr) = A_i J_m(kr). \quad (20)$$

Dies ist u. a. für den kreisquerschnittigen Hohlraumleiter und für den zylindrischen Hohlraumresonator gültig.

Ist $r_2 = \infty$, dann muß das Feld eine Schwächung erfahren, die stärker ist als $1/\sqrt{r}$. Bei $\operatorname{Re} g < 0$, ist $B_i' = 0$ und somit

$$Z_m(-jgr) = A_i' H_m^{(1)}(-jgr). \quad (21)$$

ist dagegen $\operatorname{Re} g > 0$, wird $A_i' = 0$ und

$$Z_m(-jgr) = B_i' H_m^{(1)}(-jgr). \quad (22)$$

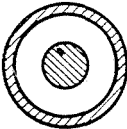
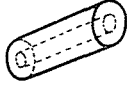
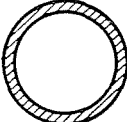

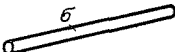
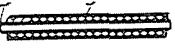
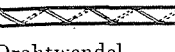
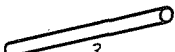
Die beiden letztgenannten Fälle ergeben sich aus der Tatsache, daß der Ausdruck $g = \pm \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma^2}$ zwei Wurzeln hat. Von den beiden im übrigen gleichwertigen Lösungen kann nach Belieben die eine oder die andere gewählt werden.

Da bei den Oberflächenleitern, die in den Zylinderkoordinaten der verschiedenen Typen behandelt werden können, $r_2 = \infty$, gelten für diese die obigen Feststellungen.

Zwischen der zur Wellenform TEM gehörigen Gestalt des Hertzischen Vektors einerseits und r andererseits besteht ein logarithmischer Zusammenhang, während den Zusammenhang zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld der Quotient $1/r$ beschreibt. Beim Wellentyp TEM ist $g = 0$, wofür der Basiswellentyp des Koaxialkabels und des Koaxial-Hohlraumresonators Beispiele bieten.


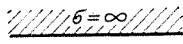
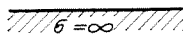


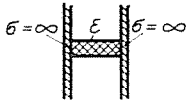
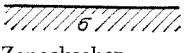
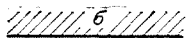
Die Kennwerte einiger Wellentypen, die in Zylinderkoordinaten beschrieben werden können, sind in Tabelle II zusammengefaßt. Sie enthält die Kennwerte von Wellentypen, wie sie in den verschiedenen Wellenleitern — in Koaxialkabeln, in coaxialen Hohlraumresonatoren, in zylindrischen Hohlleitern und Hohlraumresonatoren und an den unter den Nummern 5 bis 8 angeführten unterschiedlichen Oberflächenleitern — zur Anwendung gelangen.

Tabelle II

Nr.	Wellenleiter	Wellentyp	γ	λ	Funktion zur Beschreibung der Änderung in Längsrichtung
1	 Koaxialkabel	TEM	$\gamma_0 = j\beta_0$	$\lambda = \lambda$	$A_z e^{-j\beta_0 z}$
		TE } TM }	$j\beta$	$\lambda > \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$
2	 koaxialer Hohlraum- resonator	TEM	$\gamma_0 = j\beta_0$	$\lambda = \lambda$	$A_z \sin \beta_0 z + B_z \cos \beta_0 z$
		TE } TM }	$\begin{cases} j\beta \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda > \lambda \\ \lambda = \infty \end{cases}$	$\begin{cases} A_z \sin \beta z + B_z \cos \beta z \\ \text{konstant} \end{cases}$
3	 zylindrischer Hohlleiter	TE } TM }	$\begin{cases} j\beta \\ \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda > \lambda \\ - \end{cases}$	$\begin{cases} A_z e^{-j\beta z} \\ A_z e^{-\alpha z} \end{cases}$
4	 zylindrischer Hohlraumresonator	TE } TM }	$\begin{cases} j\beta \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda > \lambda \\ \lambda = \infty \end{cases}$	$\begin{cases} A_z \cos \beta z + B_z \sin \beta z \\ \text{konstant} \end{cases}$
5	 Sommerfeldscher Oberflächenleiter	TM_0	$\alpha + j\beta$	$\lambda < \lambda$	$A_z e^{-(\alpha + j\beta)z}$
6	 Goubauscher Ober- flächenleiter	TM_0	$j\beta$	$\lambda < \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$
7	 Drahtwendel	$TM_0 + TE_0$	$j\beta$	$\lambda < \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$
8	 Dielektrikumstab	$TE_{11} + TM_{11}$	$j\beta$	$\lambda < \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$
		TM } TE }	$j\beta$	$\lambda < \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$

g	Funktion zur Beschreibung der Änderung in transversaler Richtung	Anmerkung	
0	$A_t \frac{1}{r}$		
jk	$[A_t J_m(kr) + B_t N_m(kr)] \cos m\varphi$	Wellentypen unterhalb der Grenzwellenlänge	
0	$A_t \frac{1}{r}$	Resonator in Eigenschwingung	
jk	$[A_t J_m(kr) + B_t N_m(kr)] \cos m\varphi$		
jk	$A_t J_m(kr) \cos m\varphi$	bei Wellentypen unterhalb der Grenzwellenlänge $\gamma = j\beta$ bei Wellentypen oberhalb der Grenzwellenlänge $\gamma = \alpha$	
jk	$A_t J_m(kr) \cos m\varphi$	Resonator in Eigenschwingung	
h + jk	$A_t H_0^{(1)}(-jgr)$	die Gleichungen beziehen sich auf das den Wellenleiter umgebende Feld	
h	$A_t H_0^{(1)}(-jhr)$	die Gleichungen beziehen sich auf das den Leiter umgebende Feld	
h	$A_t H_0^{(1)}(-jhr)$	die Gleichungen beziehen sich auf das den Leiter umgebende Feld	
h	$A_t H_0^{(1)}(-jhr)$	Wellentyp ohne Grenzwellenlänge	die Gleichungen beziehen sich auf das den Leiter umgebende Feld
h	$A_t H_0^{(1)}(-jhr) \cos m\varphi$	Wellentyp oberhalb d. Grenzwellenlänge	

Tabelle III

Nr.	Anordnung 	Wellentyp	γ	Δ	Gleichung zur Beschreibung d. Abhängigkeit in Richtung z	g	g_x
1	 $\sigma = \infty$	TEM	$\gamma_0 = j\beta_0$	$\Delta = \lambda$	$A_z e^{-j\beta_0 z}$	0	0
	 zwei parallele leitende Flächen $\sigma = \infty$	TE } TM }	$j\beta$	$\Delta > \lambda$	$A_z e^{-j\beta_0 z}$	jk	0
2	 Hohlleiter mit Rechteckquerschnitt	TM } TE }	$j\beta$	$\Delta > \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$	jk	0
		α			—		$A_z e^{-\alpha z}$
3	 Rechteckresonator	TM } TE }	$j\beta$	$\Delta > \lambda$	0 ∞ konstant	jk	0
		$j\beta$			$A_z \cos \beta z + B_z \sin \beta z$		jk_x
4	 H-förmiger Wellenleiter $\sigma = \infty$ ϵ $\sigma = \infty$	TM	$j\beta$	$\Delta < \lambda$	$A_z e^{-j\beta z}$	h	jk_x
5	 Zenneckscher Oberflächen-Wellenleiter $\sigma = \infty$ ϵ	TM	$\alpha + j\beta$	$\Delta < \lambda$	$A_z e^{-(\alpha + j\beta)z}$	$h + jk$	0
5	 zwei parallele verlustbehaftete Flächen σ σ	TM	$\alpha + j\beta$	$\Delta < \lambda$	$A_z e^{-(\alpha + j\beta)z}$	$h + jk$	0

Gleichung zur Beschreibung d. Abhängigkeit in der Richtung x	g_y	Gleichung zur Beschreibung d. Abhängigkeit in der Richtung y	Anmerkung
konstant	0	konstant	
konstant	jk_y	$A_y \sin k_y y + B_y \cos k_y y$	unterhalb der Grenzwellenlänge
konstant	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ jk_y \end{array} \right.$	konstant	unter der Grenzwellenlänge: $\gamma = j\beta$ oberhalb der Grenzwellenlänge: $\gamma = \alpha$ g_x und g_y können nicht gleichzeitig Null sein
$A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x$		$A_y \cos k_y y + B_y \sin k_y y$	
konstant	0	konstant	Bei dem in Eigenschwingung befindlichen Resonator können bei dem Wellentyp TE jeweils höchstens zwei der Größen g_x , g_y , und γ gleichzeitig gleich Null sein; bei dem Wellentyp TM kann zu einem gegebenen Zeitpunkt jeweils höchstens eine der drei Größen g_x , g_y und γ gleich Null sein.
$A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x$	jk_y	$A_y \cos k_y y + B_y \sin k_y y$	
$A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x$	h_y	$A_y e^{-h_y y}$	Die Gleichungen beziehen sich auf das Feld außerhalb des Dielektrikums
konstant	$h_y + jk_y$	$A_y e^{-(h_y + jk_y)y}$	Die Gleichungen beziehen sich auf den oberhalb des Leiters befindlichen Teil des Feldes
konstant		$A_y \operatorname{sh} g_y y + B_y \operatorname{ch} g_y y$	Die Gleichungen beziehen sich auf das Feld zwischen den Leitern

Bei den unter Nr. 5 angeführten Sommerfeldschen und bei den unter Nr. 8 figurierenden Goubauschen Wellenleitern ist das Feld rotationssymmetrisch. Bei den unter Nr. 7 genannten Drahtwendeln besteht das resultierende Feld aus der Summe der rotationssymmetrischen Wellentypen TE und TM. Beim Dielektrikumstab (Nr. 8) haben die möglichen Wellentypen TM und TE je eine Grenzwellenlänge, während der als Summierung von TE_{11} und TM_{11} anzusehende Wellentyp keine Grenzwellenlänge hat.

Beispiele für die Betrachtung im rechtwinkligen Koordinatensystem

Die Lösung der Gl. (4) für einen Wellentyp lautet — auf das rechtwinklige Koordinatensystem bezogen —,

$$\Pi(x, y, z) = A X(x) Y(y) Z(z), \quad (23)$$

worin

$$\begin{aligned} X(x) &= A_x e^{-g_x x} + B_x e^{g_x x}, \\ Y(y) &= A_y e^{-g_y y} + B_y e^{g_y y}, \\ Z(z) &= A_z e^{-\gamma z} + B_z e^{\gamma z}. \end{aligned} \quad (24)$$

Hier bezeichnet g_x den Fortpflanzungskoeffizienten in der Richtung x ; g_y hingegen denjenigen in der Richtung y , und es gilt

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2 \quad (25)$$

und auf Grund von (11)

$$g_x^2 + g_y^2 + \gamma^2 = \gamma_0^2. \quad (26)$$

Im Sinne von (24) und (26) scheint keine der Koordinatenrichtungen bevorzugt zu sein.

Bei g_x und g_y handelt es sich im allgemeinen um komplexe Größen. Wenn der Leiter verlustfrei ist, können die Fortpflanzungskoeffizienten reell, imaginär oder nullwertig, keinesfalls aber können sie beide zugleich reell sein, oder beide zugleich den Wert Null haben. Sind die Werte reell, wird man die Gl. (24) mitunter zweckmäßig durch Hyperbelfunktionen ausdrücken. Es wird dann

$$\begin{aligned} \text{wenn } \gamma &= \alpha, & Z(z) &= C_z \operatorname{sh} \alpha z + D_z \operatorname{ch} \alpha z, \\ \text{wenn } g_x &= h_x, & X(x) &= C_x \operatorname{sh} h_x x + D_x \operatorname{ch} h_x x \\ \text{wenn } g_y &= h_y, & Y(y) &= C_y \operatorname{sh} h_y y + D_y \operatorname{ch} h_y y. \end{aligned} \quad (27)$$

Sind jedoch die Fortpflanzungskoeffizienten imaginär, erweist es sich als zweckmäßig, die Lösungen in Gestalt von Winkelfunktionen aufzuschreiben.

$$\begin{aligned} \text{Wenn } \gamma &= j\beta, & \text{dann ist } Z(z) &= E_z \sin \beta z + F_z \cos \beta z \\ \text{wenn } g_x &= jk_x, & \text{dann ist } X(x) &= E_x \sin k_x x + F_x \cos k_x x \\ \text{wenn } g_y &= jk_y, & \text{dann ist } Y(y) &= E_y \sin k_y y + F_y \cos k_y y. \end{aligned}$$

Beim Wellentyp TEM ist $g_x = 0$ und $g_y = 0$. In diesem Fall hängt das Feld nur von der Koordinate z ab. Dieser Wellentyp ist zwischen zwei zueinander parallelen, ideal leitenden Metallplatten möglich.

Bei Hohlleitern mit Rechteckquerschnitt zur Führung von Wellen unter der Grenzwellenlänge und bei Rechteckresonatoren sind sämtliche Fortpflanzungskoeffizienten imaginär. In Hohlleitern bilden sich in den Richtungen x und y , in Hohlraumresonatoren in allen drei Richtungen stehende Wellen aus. Bei Hohlraumresonatoren kann jeder beliebige der drei Fortpflanzungskoeffizienten den Wert Null annehmen. Von der betreffenden Richtung ist dann das Feld unabhängig.

Einzelne Oberflächenwellen betrachtet man zweckmäßig im kartesischen Koordinatensystem, so etwa die Zenneck-Welle an der Oberfläche einer Metallplatte mit der endlichen spezifischen Leitfähigkeit σ oder die Welle im H-förmigen Wellenleiter, der aus zwei zueinander parallelen Metallplatten und aus einer zwischen diesen angeordneten Dielektrikumschicht besteht. In diesem Wellenleiter ist die eine der transversal (y) gerichteten Fortpflanzungskoeffizienten komplex oder reell.

Zur Illustration des Gesagten soll die Tabelle III dienen, in der die wichtigeren realisierbaren und im rechtwinkligen Koordinatensystem der Untersuchung zugänglichen Wellentypen zusammengefaßt sind.

Zusammenfassung

Die elektromagnetischen Wellen können nach verschiedenen Gesichtspunkten, so u. a. auch nach dem Wellentyp eingeteilt werden. Eine weitere Unterteilungsmöglichkeit ergibt sich aus der Gruppierung der Wellentypen nach der Art der Fortpflanzungskoeffizienten. Neben dem Koeffizienten der längsgerichteten lassen sich auch eine oder mehrere Koeffizienten der transversalen Fortpflanzung definieren. Die Fortpflanzungskoeffizienten können komplex, imaginär, reell oder gleich Null sein, was in der gegebenen Richtung auch ihre Art bestimmt. Die Arbeit behandelt mehrere Beispiele für die Lösung verschiedener Fälle u. zw. sowohl im Zylinder- als auch im rechtwinkligen Koordinatensystem.

Dr. István VÁGÓ; Budapest, XI. Egry József u. 18—20. Ungarn