

# COURANT DE COURT-CIRCUIT ET COUPLE DE DEMARRAGE EN REGIME PERMANENT DES MACHINES ASYNCHRONES ASYMETRIQUES

Par

L. BAJZA

Chaire des Machines Electriques de l'Université Technique de Budapest

(Reçu le 11 août 1967)

L'étude traite des machines à courant alternatif pouvant être classées, du point de vue des caractéristiques générales de leur structure, dans le groupe des machines à induction asynchrones. Supposons que le stator comporte deux enroulements en quadrature, dont les conducteurs sont répartis dans des encoches. Admettons que ces enroulements diffèrent par leur nombre de spires et leur disposition géométrique et qu'une impédance quelconque, mais linéaire, soit reliée en série à chacun d'eux.

Le rotor est à pôles saillants. Les réductances de l'entrefer dans les directions  $d$  et  $q$  en quadrature sont différentes, c'est-à-dire  $A_d > A_q$ . Conformément à la pratique courante une cage en court-circuit est montée sur le rotor. En général les éléments de la cage se trouvant dans les axes correspondant aux entrefers minimum et maximum ne sont pas équivalents, par conséquent le rotor — même à cage, — ne possède que deux axes de symétrie du point de vue des circuits. Pour des raisons de structure, ce sont les axes  $d$  et  $q$  déjà mentionnés. Un tel enroulement peut être remplacé par deux bobines court-circuitées, dont l'une donne une f. m. m. de direction  $d$  et l'autre une f. m. m. de direction  $q$  [1, 3]. Les paramètres de ces bobines diffèrent entre eux conformément à ce que nous venons de dire.

L'étude théorique des machines électriques peut être divisée en deux parties bien distinctes, qui sont:

- a) la détermination des paramètres de la machine dans le cas où les conditions géométriques et les caractéristiques des matériaux sont données;
- b) l'établissement et l'analyse des relations fixant le comportement électromécanique de la machine dans le cas de circuits extérieurs et de conditions mécaniques donnés.

Notre étude se bornera à l'examen du second ordre de problèmes et tout particulièrement des conditions du régime permanent. Nous supposons que les constantes de la machine sont connues. Pour le calcul, nous utiliserons la méthode vectorielle élaborée par KOVÁCS et RÁCZ, qui comporte de remarquables avantages [7].

## 1. Schéma des connexions, approximations

La figure 1 montre le schéma des connexions. Elle indique en même temps la position dans l'espace des parties de la machine à examiner, de même

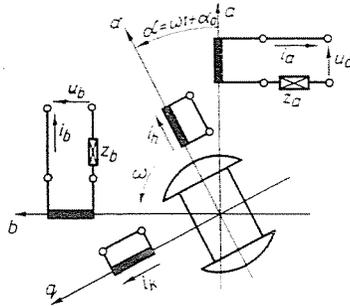


Fig. 1

que les directions positives des tensions et courants de phase et celles de la vitesse angulaire.

Pour simplifier l'étude, nous adoptons les approximations suivantes, couramment utilisées dans la théorie des machines électriques:

- a) l'impédance interne du réseau d'alimentation est négligeable pour toutes les fréquences,
- b) les quatre bobines donnent une f. m. m. sinusoïdale dans l'espace, dont la demi-longueur d'onde est égale au pas polaire,
- c) les résistances sont indépendantes de la fréquence des courants qui les traversent,
- d) les inductances sont constantes et indépendantes du courant, les réactances sont proportionnelles aux fréquences,
- e) les pertes dans le fer sont négligeables,
- f) pour simplifier, on choisit le nombre des pôles égal à deux,
- g) on suppose que le moment d'inertie du rotor est très grand et qu'en régime permanent, la vitesse angulaire ( $\omega$ ) de l'axe est constante malgré les moments pulsateurs.

## 2. Phénomènes physiques de base

Pour permettre une meilleure vue d'ensemble de l'image physique, supposons que l'alimentation est sinusoïdale et bornons-nous à l'étude du régime permanent.

Soit  $\omega_0$  la pulsation de la tension d'alimentation et  $\omega$  la vitesse angulaire du rotor.

Comme on sait [2], les pulsations des composantes du courant du stator sont dans ce cas:

$$\Omega = \omega_0 + 2k\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1a)$$

et celles du courant du rotor:

$$\Omega' = \omega_0 + (2k - 1)\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1b)$$

En général les courants de phase relevant d'une fréquence donnée constituent un système asymétrique, par conséquent aux courants de pulsation  $\Omega$  correspondent des f. m. m. dont les vitesses angulaires sont  $\Omega$  et  $-\Omega$ . Les relations entre les f. m. m. sont indiquées schématiquement par la figure 2.

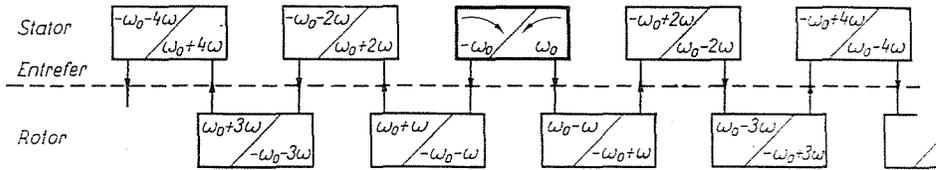


Fig. 2

### 3. Equations de tension

En vue des applications, considérons la phase *b* de la figure 1 comme phase principale et la phase *a* comme phase auxiliaire. Réduisons à la phase principale le nombre des spires de la phase auxiliaire.

Le rapport des nombres de spires est:

$$a = N_a \xi_a / N_b \xi_b,$$

d'où les valeurs instantanées réduites de la tension de la phase *a* et de son courant seront:

$$u'_a = u_a / a, \quad i'_a = a i_a.$$

Par suite de l'asymétrie du stator, la relation suivante peut s'écrire en général pour les résistances:

$$R'_a = R_a / a^2 \neq R_b,$$

et pour les inductances de fuite:

$$L'_{la} = L_{la} / a^2 \neq L_{lb}.$$

Nous considérons les résistances et les réactances de fuite du stator comme des impédances en série et les ajoutons aux impédances extérieures éventuelles. Les équations relatives aux tensions du stator peuvent donc s'écrire:

$$u'_a = \bar{Z}'_a(p) i'_a + p\psi'_a, \quad (2)$$

$$u_b = \bar{Z}_b(p) i_b + p\psi_b. \quad (3)$$

Formons maintenant les vecteurs suivants:

$$\mathbf{u}_s = u'_a + ju_b, \quad \mathbf{i}_s = i'_a + ji_b, \quad \psi_s = \psi'_a + j\psi_b. \quad (4)$$

Il s'ensuit que:

$$\mathbf{u}_s = \bar{Z}'_a(p) i_a + j\bar{Z}_b(p) i_b + p\psi_s.$$

De (4) nous tirons:

$$i'_a = \frac{\mathbf{i}_s + \hat{\mathbf{i}}_s}{2}, \quad ji_b = \frac{\mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s}{2},$$

par conséquent:

$$\mathbf{u}_s = \frac{\bar{Z}'_a(p) + \bar{Z}_b(p)}{2} \mathbf{i}_s + \frac{\bar{Z}'_a(p) - \bar{Z}_b(p)}{2} \hat{\mathbf{i}}_s + p\psi_s.$$

Si nous désignons par  $\bar{Z}_{sS}(p)$  la demi-somme des impédances du stator et par  $\bar{Z}_{sD}(p)$  leur demi-différence, nous avons:

$$\mathbf{u}_s = \bar{Z}_{sS}(p) \mathbf{i}_s + \bar{Z}_{sD}(p) \hat{\mathbf{i}}_s + p\psi_s. \quad (5)$$

En cas d'alimentation sinusoïdale, cette équation peut se mettre sous la forme:

$$\left[ \bar{Z}_{sS} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) + Z_{rs} \left( \frac{\Omega - \omega}{\omega_0} \right) \right] \bar{I}_\Omega + \bar{Z}_{sD} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \hat{I}_{-\Omega} + \\ + \bar{Z}_{rD} \left( \frac{\Omega - \omega}{\omega_0} \right) \hat{I}_{-\Omega+2\omega} e^{j2z_0} = \begin{cases} \frac{\bar{U}_\Omega}{\Omega/\omega_0} & (k=0), \\ 0 & (k \neq 0). \end{cases}$$

#### 4. Circuit équivalent

Si nous considérons les courants figurant dans l'équation (I. A. 14) comme des courants de boucle et les impédances comme des impédances de boucle ou des impédances mutuelles, alors sur la base de cette même équation, nous pouvons dessiner la figure 3, qui en est le circuit équivalent.

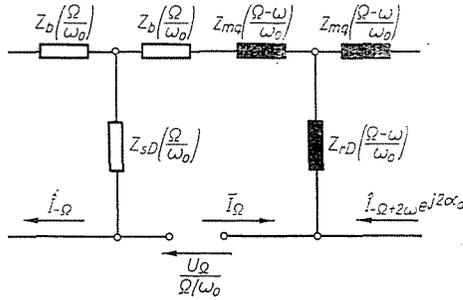


Fig. 3

Pour simplifier les écritures, introduisons la vitesse angulaire relative  $v = \omega/\omega_0$ . Dans l'équation de la tension (I. A. 14) substituons  $\Omega$  par ses valeurs indiquées dans la figure 2. A côté des vitesses angulaires prescrites par l'équation (1a), il faut également prendre en considération leur multiple par  $-1$ , puisque par suite de l'asymétrie, à toute fréquence correspond en général une f. m. elliptique.\*

En remplaçant  $\Omega$  par  $\omega_0$  on a:

$$[\bar{Z}_{sS}(1) + \bar{Z}_{rs}(1-v)] I_{\omega_0(0)} + \bar{Z}_{sD}(1) \hat{I}_{\omega_0(0)} + \bar{Z}_{rD}(1-v) \hat{I}_{-\omega_0(-2)} e^{j2\alpha_0} = \bar{U}_{\omega_0}.$$

A cette équation correspond le circuit de la figure 4. Si  $\Omega = -\omega_0$ , l'équation de tension (I. A. 14) prend la forme:

$$[\bar{Z}_{sS}(-1) + \bar{Z}_{rs}(-1-v)] \bar{I}_{-\omega_0(0)} + \bar{Z}_{sD}(-1) \hat{I}_{\omega_0(0)} + \bar{Z}_{rD}(-1-v) \hat{I}_{\omega_0(2)} e^{-j2\alpha_0} = -\bar{U}_{-\omega_0}.$$

Le circuit équivalent (fig. 5) correspondant au produit par-1 du conjugué de cette équation se superpose à celui de la figure 4 et peut être raccordé par conséquent à ce dernier. En répétant cette opération, on peut dresser le circuit équivalent de la machine asynchrone asymétrique (fig. 6)

On sait qu'en cas d'alimentation sinusoïdale ([7]), on a:

$$\mathbf{u}_s = \bar{U}_{\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \bar{U}_{-\omega_0} e^{-j\omega_0 t},$$

ou bien, en employant des notations plus courantes:

$$\mathbf{u}_s = \bar{U}_1 e^{j\omega_0 t} + \hat{U}_2 e^{-j\omega_0 t}.$$

\* Pour éviter des difficultés ultérieures, il faut modifier les indices utilisés pour discerner les courants. Les vitesses angulaires des composantes de courant sont données par  $\pm\Omega = \pm\omega_0(1+2kv)$  et sont donc fonctions de  $\omega_0$  et  $2k$ . Pour le cas où  $\Omega = \omega_0$  c'est l'indice  $\omega_0(0)$  qui est valable, puisque là  $2k = 0$ . Dans le cas où  $\Omega = -\omega_0$  l'indice du troisième courant de l'équation (I. A. 14) s'écrit:

$$-\Omega + 2\omega = -\omega_0 + 2\omega = -\omega_0(1-2v) \rightarrow -\omega_0(-2).$$



Les tensions d'alimentation du circuit équivalent (fig. 6) sont donc les composantes symétriques de la tension aux bornes. Le même raisonnement s'applique à  $\bar{I}\omega_{0(0)}$  et  $\hat{I}_{-\omega_0(0)}$  qui sont les composantes de séquence directe et inverse de la composante fondamentale du courant absorbé par la machine.

Dans notre circuit équivalent, les courants de fréquences dérivées (ou «réfléchies») se présentent également séparés en deux composantes. Cependant, seuls les courants de réseau de côté gauche peuvent être considérés comme des composantes d'ordre positif et négatif prises dans le sens habituel. Leur sens de rotation est indépendant de  $v$ . A la vitesse synchrone ( $v = 1$ ), ils passent dans les composantes symétriques des harmoniques. Le sens de rotation des f. m. m. correspondant aux courants de la partie droite du réseau est fonction de  $v$ .

Étant donné que les conditions préliminaires concernant la structure de la machine et son alimentation contiennent relativement peu de restrictions, l'équation de tension (I. A. 14) et les schémas équivalents qui en dérivent peuvent servir de base à l'étude des machines asynchrones (et synchrones) de structure et d'alimentation asymétriques.

## 5. Etude du régime en court-circuit

### 5.1. Expression du courant de stator

D'après l'équation (I. A. 2), le vecteur du courant de stator s'exprime par:

$$\mathbf{i}_s = \sum_{-\Omega}^{\Omega} \bar{I}_{\Omega} e^{j\Omega t}.$$

En utilisant l'expression (1a), on peut l'écrire sous la forme:

$$\mathbf{i}_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{\omega_0(2k)} e^{j\omega_0(1+2kv)t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{-\omega_0(2k)} e^{-j\omega_0(1+2kv)t}.$$

Puisque dans notre cas  $v = 0$ , en extrayant les fonctions de temps on a:

$$\mathbf{i}_s = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{\omega_0(2k)} + e^{-j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{-\omega_0(2k)}, \quad (6)$$

d'où il ressort que:

$$\bar{I}_{\omega_0} \equiv \bar{I}_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{\omega_0(2k)} \quad (7)$$

et

$$\hat{I}_{-\omega_0} \equiv \bar{I}_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{I}_{-\omega_0(2k)}. \quad (8)$$

Les composantes symétriques du vecteur du courant de stator peuvent donc s'obtenir par des séries infinies. Il faut remarquer à ce propos qu'en substituant  $\omega = 0$ ,  $\Omega = \omega_0$  et  $\Omega = -\omega_0$  dans l'équation (I. A. 14), nous obtenons les relations:

$$[\bar{Z}_{sS}(1) + \bar{Z}_{rS}(1)] \bar{I}_{\omega_0} + [\bar{Z}_{sD}(1) + \bar{Z}_{rD}(1) e^{j2z_0}] \hat{I}_{-\omega_0} = \bar{U}_{\omega_0}, \quad (9a)$$

$$[\bar{Z}_{sD}(1) + \bar{Z}_{rD}(1) e^{-j2z_0}] \bar{I}_{\omega_0} + [\bar{Z}_{sS}(1) + \bar{Z}_{rS}(1)] \hat{I}_{-\omega_0} = \hat{U}_{-\omega_0}. \quad (9b)$$

A partir de ces équations, on peut exprimer d'une manière relativement simple les composantes symétriques du courant du stator et dresser leur circuit équivalent (fig. 7).

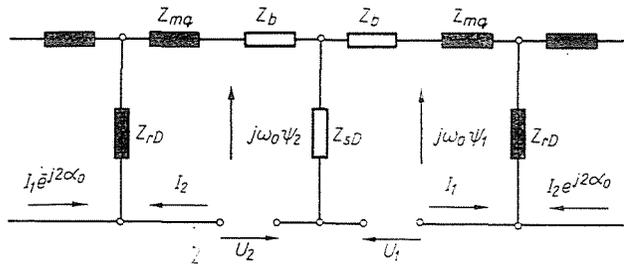


Fig. 7

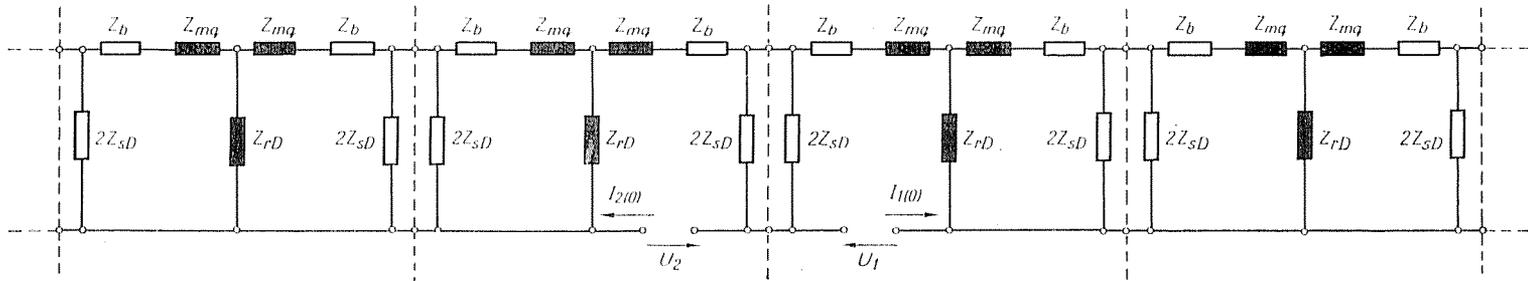
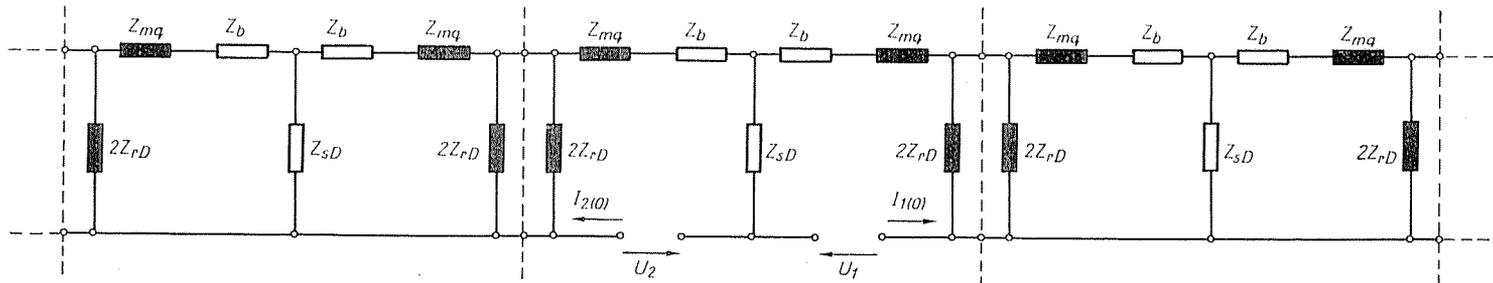
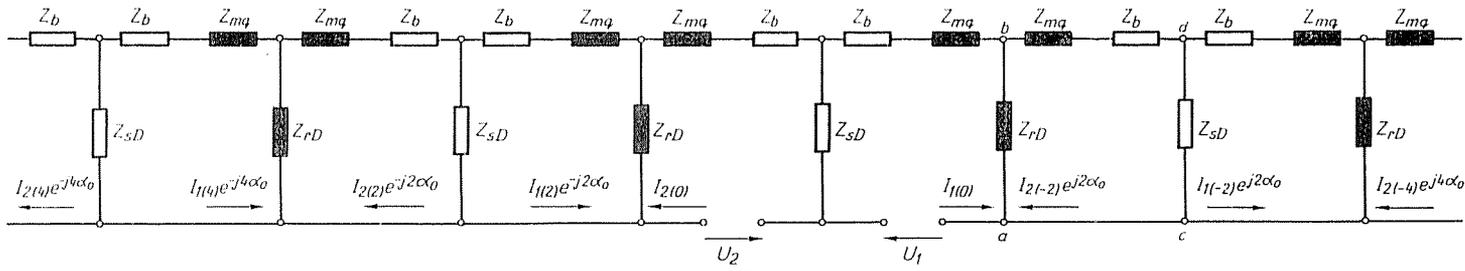
Toutefois, une étude s'appuyant sur les équations (9a, b) présenterait le grand inconvénient de séparer totalement l'état  $v = 0$  de l'état  $v \neq 0$ , à cause même de l'état fini du schéma équivalent. Aussi faudra-t-il préférer le raisonnement conduisant aux équations (7) et (8), si l'on veut sauvegarder l'unité de la forme et du contenu de la théorie. De cette manière, on peut en déduire pour le cas de  $v = 0$ , le schéma équivalent de la fig. 8. Ce schéma composé de deux quadripôles symétriques, forme une chaîne alternante et infinie dans les deux directions. En divisant les impédances  $Z_{rD}$  ou  $Z_{sD}$  en deux branches parallèles, on peut transformer le réseau en une chaîne homogène composée de quadripôles symétriques (fig. 9a et 9b).

Etant donné qu'en court-circuit tous les courants de boucle font partie des composantes soit d'ordre positif soit d'ordre négatif (de fréquence du réseau), nous pouvons employer des notations plus simples et plus usuelles pour les courants de boucle. Dans ce qui suit, nous allons désigner les composantes d'ordre positif par l'indice 1 au lieu de  $\omega_0$ , et les composantes d'ordre négatif par l'indice 2 au lieu de  $-\omega_0$ . Ainsi pour les courants par exemple, nous avons:

$$\bar{I}_{\omega_0(2k)} \equiv \bar{I}_{1(2k)}$$

et

$$\hat{I}_{-\omega_0(2k)} \equiv \bar{I}_{2(2k)}.$$



Soit  $\bar{Z}'_0$  l'impédance caractéristique relative à la variante 9a, et  $\bar{Z}^s_0$  celle relative à la variante 9b. D'après l'Annexe II nous avons:

$$\bar{Z}'_0 = 2\bar{Z}_{rD} \sqrt{\frac{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})}} = 2\bar{Z}_{rD} \bar{r},$$

et

$$\bar{Z}^s_0 = 2\bar{Z}_{sD} \sqrt{\frac{(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})}} = 2\bar{Z}_{sD} \bar{s}.$$

A l'aide de ces impédances caractéristiques on peut exprimer avec une simplicité relative les courants  $\bar{I}_{1(0)}$  et  $\bar{I}_{2(0)}$ . L'impédance caractéristique  $\bar{Z}'_0$

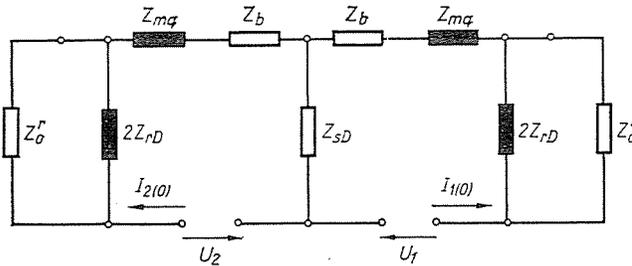


Fig. 10

permet, en effet, de clore des deux côtés le quadripôle médian contenant les tensions intercalées (fig. 10). Par conséquent  $\bar{I}_{1(0)}$  et  $\bar{I}_{2(0)}$  sont donnés et ne dépendent pas de  $\alpha_0$ , ainsi qu'il ressort de la figure 10. Dans celle-ci, nous avons donc réduit la machine asynchrone asymétrique (p. ex. à pôles saillants) à une machine asynchrone de structure symétrique, bien que chacune des deux composantes de courant soit restée fonction des deux composantes de tension.

De même que  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  sont déterminés par les expressions (17) et (18), on peut aussi bien écrire:

$$\bar{I}_{1(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{I}_1 dx$$

et

$$\bar{I}_{2(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{I}_2 dx. \quad (10a)$$

En outre

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (I_1^2 - I_2^2) dx = I_{1(0)}^2 - I_{2(0)}^2. \quad (10b)$$

Donc  $\bar{I}_{1(0)}$  et  $\bar{I}_{2(0)}$  sont d'une part les valeurs moyennes des composantes de courant de stator correspondant aux différentes positions du rotor, et d'autre part, leur propriété exprimée par (10b) permet d'exprimer directement la valeur moyenne du couple de démarrage de caractère asynchrone, de sorte qu'on peut considérer  $I_{1(0)}$  et  $I_{2(0)}$  comme des composantes caractéristiques symétriques.

En cas d'alimentation monophasée on peut, en utilisant le schéma équivalent de la figure 10, établir l'impédance additionnelle et cette valeur du rapport qui permet de satisfaire la condition  $I_{2(0)} = 0$ .

Connaissant  $\bar{I}_{1(0)}$ , on peut écrire également l'équation du courant de la boucle située à sa droite. En effet, à la base des figures 11 et 12 et vu que ces

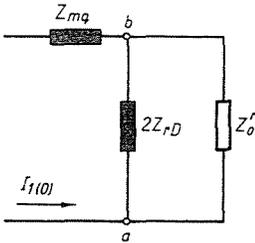


Fig. 11

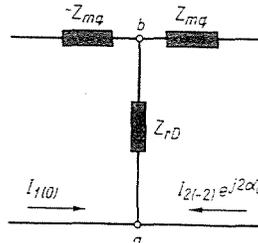


Fig 12

réseaux sont équivalents, on tire de l'équation des tensions entre les points a et b:

$$I_{1(0)} \frac{2\bar{Z}_{rD} \bar{Z}'_0}{2\bar{Z}_{rD} + \bar{Z}'_0} = (\bar{I}_{1(0)} + \bar{I}_{2(-2)} e^{j2\alpha_0}) \bar{Z}_{rD}, \quad (11a)$$

d'où

$$\bar{I}_{2(-2)} = -\bar{I}_{1(0)} \frac{2\bar{Z}_{rD} - \bar{Z}'_0}{2\bar{Z}_{rD} + \bar{Z}'_0} e^{-j2\alpha_0}.$$

Portant la valeur de  $Z'_0$  dans ces équations, on a:

$$\bar{I}_{2(-2)} = -\bar{I}_{1(0)} \frac{1 - \bar{r}}{1 + \bar{r}} e^{-j2\alpha_0}. \quad (11b)$$

On obtient une forme plus simple encore si l'on introduit le quotient

$$\bar{q}_r = -\frac{1 - \bar{r}}{1 + \bar{r}}, \quad (11c)$$

qui est le rapport des courants voisins de l'impédance  $Z_{rD}$  caractérisant l'asymètre du rotor.

D'où:

$$\bar{I}_{2(-2)} = \bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2\alpha_0}. \quad (11d)$$

Opérant de même, on peut calculer aussi le courant de la boucle suivante,  $\bar{I}_{1(-2)}$ .

Si l'on décompose le schéma en quadripôles symétriques selon la figure 9b, alors la branche  $c-d$  et son voisinage visibles sur figure 8 prendront les formes des figures 13 et 14.

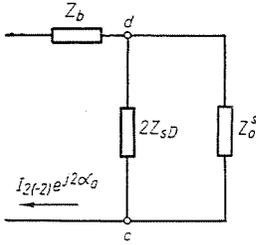


Fig. 13

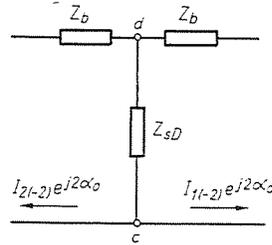


Fig. 14

A l'aide du même raisonnement simple, on obtient:

$$\bar{I}_{2(-2)} \frac{2\bar{Z}_{sD} \bar{Z}_0^s}{2\bar{Z}_{sD} + \bar{Z}_0^s} = (\bar{I}_{2(-2)} + \bar{I}_{1(-2)}) \bar{Z}_{sD}.$$

D'où:

$$\bar{I}_{1(-2)} = -\bar{I}_{2(-2)} \frac{2\bar{Z}_{sD} - \bar{Z}_0^s}{2\bar{Z}_{sD} + \bar{Z}_0^s}. \quad (12a)$$

En substituant l'expression de  $\bar{Z}_0^s$ , on a:

$$\bar{I}_{1(-2)} = -\bar{I}_{2(-2)} \frac{1 - \bar{s}}{1 + \bar{s}}, \quad (12b)$$

et introduisant

$$\bar{q}_s = -\frac{1 - \bar{s}}{1 + \bar{s}}, \quad (12c)$$

le quotient des courants reliés par l'impédance  $\bar{Z}_{sD}$  qui caractérise l'asymétrie du stator, on obtient:

$$\bar{I}_{1(-2)} = \bar{I}_{2(-2)} \bar{q}_s. \quad (12d)$$

En utilisant les équations 11d et 12d, on a en définitive:

$$\bar{I}_{1(-2)} = \bar{I}_{1(0)} \bar{q}_s \bar{q}_r e^{-j2\alpha_0},$$

que l'on peut, à laide de la notation

$$\bar{q}_s \bar{q}_r = \bar{q} \quad (13)$$

écrire sous la forme plus simple:

$$\bar{I}_{1(-2)} = \bar{I}_{1(0)} \bar{q} e^{-j2z_0}.$$

Il s'ensuit évidemment que

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1(-4)} &= \bar{I}_{1(0)} (\bar{q} e^{-j2z_0})^2, \\ \bar{I}_{1(2k)} &= \bar{I}_{1(0)} (\bar{q} e^{-j2z_0})^{-k}; \quad k \leq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Des rapports analogues sont valables pour la partie du réseau se trouvant à gauche des points d'alimentation, mais en ce cas on mettra  $e^{j2z_0}$  au lieu de  $e^{-j2z_0}$ , donc:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2(2)} &= \bar{I}_{2(0)} \bar{q} e^{j2z_0}, \\ \bar{I}_{2(4)} &= \bar{I}_{2(0)} (\bar{q} e^{j2z_0})^2, \\ \bar{I}_{2(2k)} &= \bar{I}_{2(0)} (\bar{q} e^{j2z_0})^k; \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

En utilisant judicieusement l'équation (11d) et les résultats obtenus jusqu'ici, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2(-2)} &= \bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2z_0}, \\ \bar{I}_{2(-4)} &= \bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2z_0} \bar{q} e^{-j2z_0}, \\ \bar{I}_{2(2k)} &= \bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2z_0} (\bar{q} e^{-j2z_0})^{(-1-k)}; \quad k < 0, \end{aligned} \quad (16a)$$

et sur le même modèle:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1(2)} &= \bar{I}_{2(0)} \bar{q}_r e^{j2z_0}, \\ \bar{I}_{1(4)} &= \bar{I}_{2(0)} \bar{q}_r e^{j2z_0} \bar{q} e^{j2z_0}, \\ \bar{I}_{1(2k)} &= \bar{I}_{2(0)} \bar{q}_r e^{j2z_0} (\bar{q} e^{j2z_0})^{(-1+k)}; \quad k > 0. \end{aligned} \quad (16b)$$

Étant donné que le circuit équivalent de la figure 8 est formé de quadripôles passifs à pertes, on a:  $|\bar{q}| < 1$ . Les séries géométriques obtenues à l'aide des relations (14) et (16) sont donc convergentes et en utilisant les relations (7) et (8), on peut écrire:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{1(0)} \frac{1}{1 - \bar{q} e^{-j2z_0}} + \bar{I}_{2(0)} \bar{q}_r e^{j2z_0} \frac{1}{1 - \bar{q} e^{j2z_0}}, \quad (17)$$

et

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2z_0} \frac{1}{1 - \bar{q} e^{-j2z_0}} + \bar{I}_{2(0)} \frac{1}{1 - \bar{q} e^{j2z_0}}. \quad (18)$$

## 5.2. Calcul des flux du stator

De même que pour le calcul des courants, on dispose pour le calcul des flux de deux méthodes différentes sensiblement entre elles.

L'utilisation de la condition  $\omega = 0$  conduit aux équations (9a et 9b), ainsi qu'au circuit équivalent de la figure 7. Partant de ce schéma, on peut déduire directement les composantes de séquence directe et inverse du flux:

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{j\omega_0} (\bar{I}_1 \bar{Z}_{rS} + \bar{I}_2 \bar{Z}_{rD} e^{j2z_0}), \quad (19)$$

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{j\omega_0} (\bar{I}_1 \bar{Z}_{rD} e^{-j2z_0} + \bar{I}_2 \bar{Z}_{rS}). \quad (20)$$

De l'équation (I. A. 3) relative au cas général, nous pouvons tirer les relations:

$$\bar{\psi}_1 = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{1(2k)}, \quad (21)$$

et

$$\bar{\psi}_2 = e^{j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{2(2k)}. \quad (22)$$

En ce qui suit, nous exprimerons les flux au moyen de courants et d'impédances. Pour écrire ces expressions du flux, il est avantageux d'introduire de nouvelles impédances caractéristiques.

Désignons par  $\bar{R}$  l'impédance d'entrée de la chaîne infinie, coupée entre les impédances  $\bar{Z}_b$  et  $\bar{Z}_{mq}$  et commençant par  $\bar{Z}_{mq}$ . De même, désignons par  $\bar{S}$  l'impédance d'entrée de la chaîne infinie se présentant de la même façon, mais commençant par  $\bar{Z}_b$ .

D'après les figures 15 et 16, nous pouvons écrire:

$$j\omega_0 \bar{\psi}_{1(2k)} = \bar{I}_{1(2k)} \bar{R} \quad (k \leq 0), \quad (23a)$$

$$j\omega_0 \bar{\psi}_{2(2k)} = -\bar{I}_{2(2k)} \bar{S} \quad (k < 0), \quad (23b)$$

$$j\omega_0 \bar{\psi}_{2(2k)} = \bar{I}_{2(2k)} \bar{R} \quad (k \geq 0), \quad (23c)$$

$$j\omega_0 \bar{\psi}_{1(2k)} = -\bar{I}_{1(2k)} \bar{S} \quad (k > 0). \quad (23d)$$

En partant des équations (21), (23a), et (23d), on obtient:

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{j\omega_0} \left( \bar{R} \sum_{k=-\infty}^0 \bar{I}_{1(2k)} - \bar{S} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{I}_{1(2k)} \right). \quad (24)$$

De même, en partant des équations (22), (23b) et (23c), on a:

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{j\omega_0} \left( -\bar{S} \sum_{k=-\infty}^{-1} \bar{I}_{2(2k)} + \bar{R} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{I}_{2(2k)} \right). \quad (25)$$

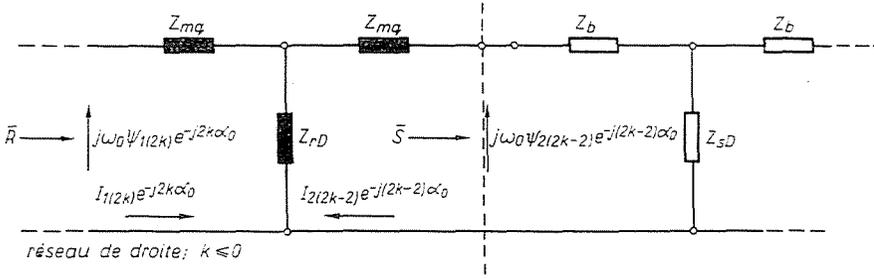


Fig. 15

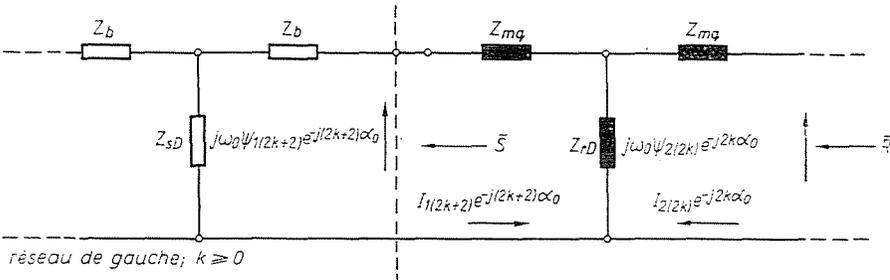


Fig. 16

Enfin, en utilisant judicieusement les expressions (14) et (16), on peut écrire:

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{j\omega_0} \left( I_{1(0)} \bar{R} \frac{1}{1 - \bar{q}e^{-j2z_0}} - \bar{I}_{2(0)} \bar{q}_r e^{j2z_0} \bar{S} - \frac{1}{1 - \bar{q}e^{j2z_0}} \right), \quad (26)$$

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{j\omega_0} \left( -\bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2z_0} \bar{S} - \frac{1}{1 - \bar{q}e^{-j2z_0}} + \bar{I}_{2(0)} \bar{R} \frac{1}{1 - \bar{q}e^{j2z_0}} \right). \quad (27)$$

Nous allons établir les relations qui existent entre  $\bar{R}$ ,  $\bar{S}$  et les impédances caractéristiques  $\bar{Z}_0^r$  et  $\bar{Z}_0^s$  définies pour le calcul des courants. Sur la base de ce qui a été établi jusqu'à présent, nous pouvons dessiner les figures (17) et (18) sans aucune difficulté.

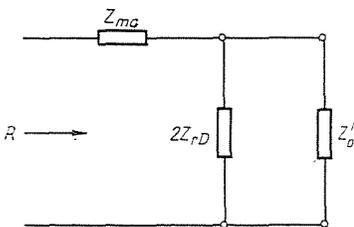


Fig. 17

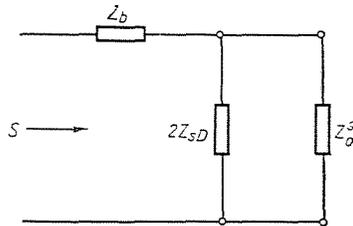


Fig. 18

De ces figures nous tirons:

$$\bar{R} = \bar{Z}_{mq} + \frac{2\bar{Z}_{rD}\bar{Z}'_0}{2\bar{Z}_{rD} + \bar{Z}'_0} \quad \text{et} \quad \bar{S} = \bar{Z}_b + \frac{2\bar{Z}_{sD}\bar{Z}'_0}{2\bar{Z}_{sD} + \bar{Z}'_0}.$$

Après avoir été ordonnées, ces relations prennent les formes:

$$\bar{R} = \frac{\bar{Z}_{mq} + \bar{r}\bar{Z}'_{md}}{1 + \bar{r}}, \quad \bar{S} = \frac{\bar{Z}_b + \bar{s}\bar{Z}'_a}{1 + \bar{s}}. \quad (28a, b)$$

### 5.3. Calcul du couple de démarrage

Pour le calcul de ce couple, nous partons de l'équation générale:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\psi}_s \times \mathbf{i}_s.$$

Puisque dans notre cas  $\boldsymbol{\psi}_s$  et  $\mathbf{i}_s$  sont des vecteurs complexes, le produit de ces vecteurs s'écrit sous la forme:

$$M = \text{Im} [\boldsymbol{\psi}_s \mathbf{i}_s]. \quad (29)$$

Si pour des raisons de simplification et de clarté nous nous passons de l'examen du couple pulsatoire, nous contentant de l'étude du couple moyen essentiel du point de vue de l'accélération, nous pouvons écrire la relation [7]:

$$M = \text{Im} [\hat{\psi}_1 \bar{I}_1 + \bar{\psi}_2 \hat{I}_2]. \quad (30)$$

La valeur absolue des vecteurs figurant dans l'équation (30) du couple est égale à la valeur efficace de la quantité en question, et l'expression donne le couple par phase.

Le couple de démarrage se calcule facilement et avec rapidité si l'on se contente de l'exprimer par les composantes symétriques des courants, c'est-à-dire si dans l'équation (30) on substitue aux flux leur forme exprimée par des courants. Basons-nous tout d'abord sur les équations (19) et (20). En effectuant les substitutions, nous avons:

$$M = \text{Im} \left[ \frac{j}{\omega_0} (I_1^2 \hat{Z}_{rs} - \bar{I}_1 \hat{I}_2 \hat{Z}_{rD} e^{-j2z_0}) - \frac{j}{\omega_0} (\bar{I}_1 \hat{I}_2 \bar{Z}_{rD} e^{-j2z_0} + I_2^2 \bar{Z}_{rS}) \right]. \quad (31)$$

Introduisons en outre les notations:

$$\bar{Z}_{rS} = R_{rS} + jX_{rS}, \quad (32)$$

$$\bar{Z}_{rD} = R_{rD} + jX_{rD}, \quad (33)$$

$$\bar{I}_1 \hat{I}_2 = I_1 I_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (34)$$

Il en résulte:

$$M = \frac{1}{\omega_0} [(I_1^2 - I_2^2) R_{rS} + 2I_1 I_2 X_{rD} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\alpha_0)]. \quad (35)$$

Dans son étude d'une haute valeur [6], S. S. L. CHANG présente une expression semblable pour le couple de démarrage des moteurs monophasés à réluctance à condensateur. La seule différence est que CHANG exprime le couple au moyen des courants de phase et donne à l'équation une forme plus concise par l'introduction d'une quantité auxiliaire ( $I_k$ ). Avec les notations employées ici, nous avons:

$$M = \frac{1}{\omega_0} [I'_a I_b \sin(I'_a, I_b) R_{rS} - I_k^2 X_{rD} \sin 2(\Delta_k + \alpha_0)].$$

$I_k$  et  $\text{tg } 2 \Delta_k$  sont définis par

$$I_k^4 = \frac{1}{4} (I_b^2 - I_a'^2)^2 + I_a'^2 I_b^2 \cos^2(I'_a, I_b),$$

et

$$\text{tg } 2\Delta_k = \frac{2I_a'^2 I_b \cos(I'_a, I_b)}{I_b^2 - I_a'^2}.$$

De cette équation, CHANG déduit que le premier membre, c'est-à-dire le couple asynchrone est indépendant de la position du rotor et que le second membre, le couple synchrone varie d'une manière sinusoïdale avec la position du rotor. En réalité  $I'_a = f_1(\alpha_0)$  et  $I_b = f_2(\alpha_0)$ , c'est pourquoi le premier membre de (35) est, lui aussi, fonction de  $\alpha_0$ .

En étudiant l'expression  $I_k$ , CHANG arrive à la conclusion qu'en cas de machines à stator symétrique alimentées par une tension polyphasée symétrique, le deuxième membre de l'expression du couple de démarrage, c'est-à-dire le couple synchrone s'annule, car dans ce cas  $I'_a = I_b$  et  $\sphericalangle(I'_a, I_b) = 90^\circ$ . On peut toutefois étudier la question d'une manière plus exacte de la façon suivante:

En cas d'alimentation polyphasée symétrique  $U_2 = 0$  et en cas de stator symétrique  $\bar{Z}_{rD} = 0$ . Avec ces conditions on peut déduire du schéma équivalent général de la figure 8 le schéma équivalent du moteur à alimentation et à stator également symétriques (fig. 19.). Or il en ressort que  $\bar{I}_2 \neq 0$ , ou est tout au plus petit si  $\bar{Z}_{rD}$  est petit, comme c'est généralement le cas à l'état de court-circuit. En outre, si la résistance du stator est négligeable, il n'y a pas de puissance d'entrefer de séquence inverse. C'est ce qui permet justement d'expliquer, pourquoi il ne se pose pas de problèmes de démarrage, si les moteurs à réluctance sont alimentés par une source polyphasée.

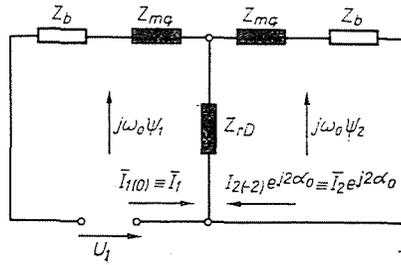


Fig. 19

On obtient une image très claire du couple de démarrage des machines asynchrones asymétriques sur le stator et sur le rotor, si on le calcule des expressions générales du courant et du flux. Cette fois encore, on ne considère pas les couples pulsatoires. En substituant les expressions (17), (18), (24) et (25) dans l'équation (29) du couple, on obtient le couple de démarrage sous la forme suivante (voir Annexe III):

$$M = \frac{1}{\omega_0} \left[ \frac{I_{1(0)}^2}{1 + q^2 - 2q \cos(\tau - 2\alpha_0)} - \frac{I_{2(0)}^2}{1 + q^2 - 2q \cos(\tau + 2\alpha_0)} \right] R_{s(0)} - \frac{2}{\omega_0} I_{1(0)} I_{2(0)} X_{D(0)} \operatorname{Im} \left[ \frac{e^{j[\varphi_{1(0)} - \varphi_{2(0)}]}}{e^{j2\alpha_0} + q^2 e^{-j2\alpha_0} - 2q \cos \tau} \right]. \quad (\text{III. A. 4})$$

Cette expression ne contenant qu'une seule variable permet de tracer la courbe des couples sans qu'on soit obligé de calculer  $I_1$  et  $I_2$  pour chaque valeur de  $\alpha_0$ . Elle importe aussi du point de vue théorique, car elle montre avec une clarté relative l'influence de la position du rotor sur le couple de démarrage. Par contre  $R_{rS}$  et  $X_{rD}$  ont disparu de l'expression du couple, quoique, par suite de leur signification physique, ces quantités s'intègrent d'une manière suggestive dans l'image que nous nous faisons du caractère et du mode de formation des couples asynchrone et synchrone. Les expressions compliquées  $R_{s(0)}$  et  $X_{D(0)}$  des constantes de machine qui les remplacent ne peuvent pas être interprétées par des moyens simples (voir les relations II. A. 1 et II. A. 2).

### Annexe I

En vue d'éliminer de l'équation (5) le vecteur du flux, nous allons la ramener au système de coordonnées du rotor:

$$\mathbf{u}_{sr} e^{jz} = \bar{Z}_{sS}(p) \mathbf{i}_{sr} e^{jz} + \bar{Z}_{sD}(p) \mathbf{i}_{sr} e^{-jz} - p\psi_{sr} e^{jz}.$$

En effectuant la différentiation dans le dernier membre et simplifiant par  $e^{jz}$ , on a:

$$\mathbf{u}_s = e^{-jz} \bar{Z}_{sS}(p) \mathbf{i}_s e^{jz} + e^{-jz} \bar{Z}_{sD}(p) \hat{\mathbf{i}}_s e^{-jz} + (p + j\omega) \psi_s. \quad (\text{I. A. 1})$$

Dans cette équation et dans celles qui suivent, l'indice  $r$  se rapportant au système de coordonnées du rotor peut être abandonné sans risque de malentendu. Étant donné que même en cas d'alimentation non sinusoïdale, les effets des harmoniques de la tension d'alimentation peuvent être étudiés séparément, il suffit de se borner à l'étude du premier harmonique. D'après ce que nous venons de dire, en cas d'alimentation sinusoïdale et en régime permanent les relations

$$\mathbf{i}_r = \sum_{\Omega'} (\bar{I}_{\Omega'} e^{j\Omega't} + \bar{I}_{-\Omega'} e^{-j\Omega't}) = \sum_{-\Omega'}^{\Omega'} \bar{I}_{\Omega'} e^{j\Omega't}, \quad (\text{I. A. 2})$$

et

$$\psi_s = \sum_{\Omega'} (\bar{\psi}_{\Omega'} e^{j\Omega't} + \bar{\psi}_{-\Omega'} e^{-j\Omega't}) = \sum_{-\Omega'}^{\Omega'} \bar{\psi}_{\Omega'} e^{j\Omega't} \quad (\text{I. A. 3})$$

doivent satisfaire à l'équation (6). Étant donné que la tension aux bornes est sinusoïdale, son vecteur est, dans le système de coordonnées du rotor:

$$\mathbf{u}_s = \bar{U}_{(\omega_0-\omega)} e^{j(\omega_0-\omega)t} + \bar{U}_{-(\omega_0-\omega)} e^{-j(\omega_0-\omega)t}. \quad (\text{I. A. 4})$$

Faisant la substitution (I. A. 2) — (I. A. 4) on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{(\omega_0-\omega)} e^{j(\omega_0-\omega)t} + \bar{U}_{-(\omega_0-\omega)} e^{-j(\omega_0-\omega)t} &= e^{-jz_0} \bar{Z}_{sS}(p) \sum_{-\Omega'}^{\Omega'} \bar{I}_{\Omega'} e^{j\Omega't} e^{jz} + \\ &e^{-jz} \bar{Z}_{sD}(p) \sum_{-\Omega'}^{\Omega'} \bar{I}_{\Omega'} e^{-j\Omega't} e^{-jz} + (p + j\omega) \sum_{-\Omega'}^{\Omega'} \bar{\psi}_{\Omega'} e^{j\Omega't}. \end{aligned} \quad (\text{I. A. 5})$$

L'équation (I. A. 5) doit être valable pour toute fréquence prise isolément. En choisissant les composantes de la tension ayant la même fréquence et en écrivant  $j\Omega'$  au lieu de  $p$ , l'on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{sS}(\Omega' + \omega) \bar{I}_{\Omega'} + \bar{Z}_{sD}(\Omega' + \omega) \hat{I}_{-\Omega'-2\omega} e^{-j2z_0} + \\ + j(\Omega' + \omega) \bar{\psi}_{\Omega'} &= \begin{cases} \bar{U}_{\Omega'} & (k = 0), \\ 0 & (k \neq 0), \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I. A. 6})$$

et

$$\Omega' = \omega_0 + (2k - 1)\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où  $\psi_{\Omega'}$  est la composante du flux de stator, tournant à la vitesse angulaire  $\Omega'$ . En l'exprimant au moyen des composantes à vitesse angulaire  $\Omega'$  des flux de direction  $d$  et  $q$ , l'on a:

$$\bar{\psi}_{\Omega'} = \frac{\bar{\psi}_{d\Omega'} + j\bar{\psi}_{q\Omega'}}{2}. \quad (\text{I. A. 7})$$

D'autre part les flux  $\psi_{d\Omega}$ , et  $\psi_{q\Omega}$ , peuvent s'exprimer au moyen des schémas équivalents de direction  $d$  et  $q$  (voir Fig. I. A. 1):

$$j\Omega' \bar{\psi}_{d\Omega'} = I_{d\Omega'} \bar{Z}_{md}(\Omega') \quad \text{et} \quad j\Omega' \bar{\psi}_{q\Omega'} = \bar{I}_{q\Omega'} \bar{Z}_{mq}(\Omega'), \quad (\text{I. A. 8})$$

Par définition nous avons:

$$i_d = \text{Re} [i_{sr}] = \frac{i_{sr} + \hat{i}_{sr}}{2}.$$

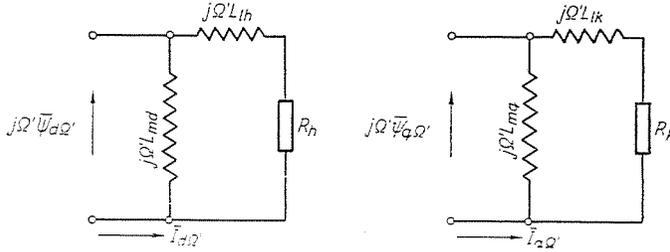


Fig. I. A. 1

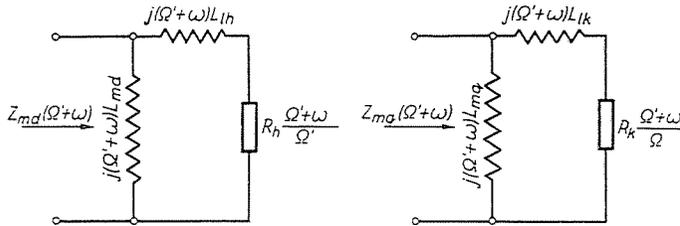


Fig. I. A. 2

Par conséquent:

$$i_{d\Omega'} = \text{Re} [\bar{I}_{\Omega'} e^{j\Omega't} + \bar{I}_{-\Omega'} e^{-j\Omega't}],$$

c'est-à-dire

$$i_{d\Omega'} = \frac{(\bar{I}_{\Omega'} + \hat{I}_{-\Omega'}) e^{j\Omega't} + (\hat{I}_{\Omega'} + \bar{I}_{-\Omega'}) e^{-j\Omega't}}{2},$$

d'où:

$$\bar{I}_{d\Omega'} = \bar{I}_{\Omega'} + \hat{I}_{-\Omega'}. \quad (\text{I. A. 9})$$

En opérant de même, on obtient:

$$I_{q\Omega'} = -j\bar{I}_{\Omega'} + j\hat{I}_{-\Omega'}. \quad (\text{I. A. 10})$$

En utilisant les équations (I. A. 7) — (I. A. 10), on a :

$$\bar{\psi}_{\Omega'} = -j(\bar{I}_{\Omega'} + \hat{I}_{-\Omega'}) \frac{\bar{Z}_{md}(\Omega')}{2\Omega'} - j(\bar{I}_{\Omega'} - \hat{I}_{-\Omega'}) \frac{\bar{Z}_{mq}(\Omega')}{2\Omega'}.$$

Enfin, compte tenu de (I. A. 6) :

$$j(\Omega' + \omega) \bar{\psi}_{\Omega'} = \bar{I}_{\Omega'} \frac{\bar{Z}_{md}(\Omega' + \omega) + \bar{Z}_{mq}(\Omega' + \omega)}{2} + \hat{I}_{-\Omega'} \frac{\bar{Z}_{md}(\Omega' + \omega) - \bar{Z}_{mq}(\Omega' + \omega)}{2}. \quad (\text{I. A. 11})$$

La figure (I. A. 2) définit les impédances figurant dans (I. A. 11). Si en désignant par  $Z_{rS}(\Omega' + \omega)$  leur demi-somme et par  $Z_{rD}(\Omega' + \omega)$  leur demi-différence on les substitue dans l'équation (I. A. 11), l'équation (I. A. 6) prendra la nouvelle forme :

$$[\bar{Z}_{sS}(\Omega' + \omega) + \bar{Z}_{rS}(\Omega' + \omega)] \bar{I}_{\Omega'} + \bar{Z}_{sD}(\Omega' + \omega) \hat{I}_{-\Omega' - 2\omega} e^{-j2z_0} + \bar{Z}_{rD}(\Omega' + \omega) \hat{I}_{-\Omega'} = \begin{cases} \nearrow \bar{U}_{\Omega'} & (k = 0), \\ \searrow 0 & (k \neq 0). \end{cases} \quad (\text{I. A. 12})$$

Après avoir éliminé le flux des équations de tension, nous revenons au système de coordonnées du stator. Les indices  $r$  et  $s$  se rapportent au rotor et au stator respectivement.

En général

$$\mathbf{i}_{sr} e^{jz} = \mathbf{i}_{ss}.$$

Dans le cas présent :

$$\bar{I}_{\Omega'} e^{j\Omega't} e^{j(\omega t - z_0)} = \bar{I}_{\Omega'} e^{jz_0} e^{j\Omega t} = \bar{I}_{\Omega} e^{j\Omega t}.$$

Par l'utilisation judicieuse de cette équation, on peut écrire la relation (I. A. 12) sous la forme suivante :

$$[\bar{Z}_{sS}(\Omega) + \bar{Z}_{rS}(\Omega)] \bar{I}_{\Omega} + \bar{Z}_{sD}(\Omega) \hat{I}_{-\Omega} + \bar{Z}_{rD}(\Omega) \hat{I}_{-\Omega + 2\omega} e^{j2z_0} = \begin{cases} \nearrow \bar{U}_{\Omega} & (k = 0), \\ \searrow 0 & (k \neq 0). \end{cases} \quad (\text{I. A. 13})$$

Étant donné que  $\Omega' + \omega = \Omega$ , c'est la pulsation  $\Omega$  se rapportant au système de coordonnées fixe qui figure dans cette équation, à la place de  $\Omega' + \omega$ . Il reste encore à réduire les impédances à la fréquence  $\omega_0$  du réseau. Selon

notations utilisées jusqu'à présent, nous avons pour le cas général:

$$\bar{Z}(\Omega) = R + j\Omega L + \frac{1}{j\Omega C},$$

d'où, en multipliant  $\bar{Z}(\Omega)$  par  $\omega_0/\Omega$  l'on a:

$$\frac{\omega_0}{\Omega} \bar{Z}(\Omega) = \frac{R}{\Omega/\omega_0} + j\omega_0 L + \frac{1}{(\Omega/\omega_0)^2 j\omega_0 C}.$$

Dans cette équation, la réactance inductive figure avec sa valeur calculée du moyen de la fréquence de réseau. Conformément à la pratique usuelle, la relation de dépendance entre l'impédance et la fréquence sera marquée par la suite au moyen du dénominateur du membre conductif.

Par conséquent nous posons:

$$\frac{\omega_0}{\Omega} \bar{Z}(\Omega) = \bar{Z}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right).$$

Par une transformation semblable, les impédances  $\bar{Z}_{md}(\Omega)$  et  $\bar{Z}_{mq}(\Omega)$  visibles sur la figure I. A. 2 prendront leur forme courante dans la théorie des machines

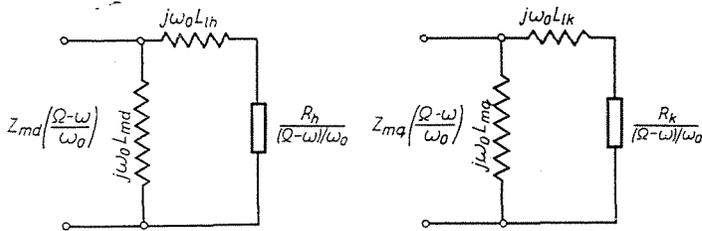


Fig. I. A. 3

asynchrones (voir fig. I. A. 3). Après multiplication par  $\omega_0/\Omega$  et introduction des notations adoptées pour l'impédance, l'équation (I. A. 13) prend la forme:

$$\left[ \bar{Z}_{sS} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) + \bar{Z}_{rS} \left( \frac{\Omega - \omega}{\omega_0} \right) \right] \bar{I}_{\Omega} + \bar{Z}_{sD} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \hat{I}_{-\Omega} + \bar{Z}_{rD} \left( \frac{\Omega - \omega}{\omega_0} \right) \hat{I}_{-\Omega + 2\omega} e^{j2z_0} = \begin{cases} \frac{\bar{U}_{\Omega}}{\Omega/\omega_0}, & (k = 0), \\ 0, & (k \neq 0). \end{cases} \quad (\text{I. A. 14})$$

Annexe II

Décomposons le quadripôle symétrique de la figure 9a, le long de l'impédance  $\bar{Z}_{sD}$ , en deux demis symétriques (figure II. A. 1).

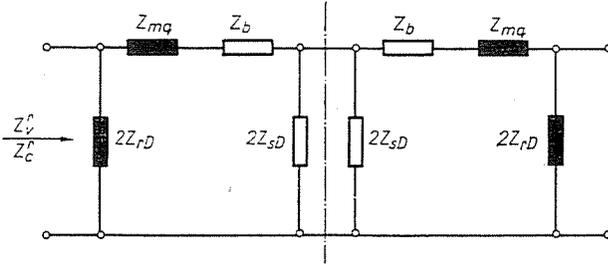


Fig. II. A. 1

L'admittance du demi-membre en marche à vide est:

$$\bar{Y}_v^r = \frac{1}{2\bar{Z}_{rD}} + \frac{1}{\bar{Z}_{mq} + \bar{Z}_b + 2\bar{Z}_{sD}} = \frac{1}{2\bar{Z}_{rD}} + \frac{1}{\bar{Z}_{mq} + \bar{Z}'_a}$$

D'où l'impédance de la marche à vide:

$$\bar{Z}_v^r = \frac{2\bar{Z}_{rD}(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})}{\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md}} \tag{II. A. 1}$$

L'impédance du demi-membre en court-circuit est:

$$\bar{Z}_c^r = \frac{2\bar{Z}_{rD}(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{2\bar{Z}_{rD} + \bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq}} = \frac{2\bar{Z}_{rD}(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md}} \tag{II. A. 2}$$

Pour l'impédance caractéristique du membre entier on a, en utilisant les relations (II. A. 1) et (II. A. 2):

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\bar{Z}_v^r \bar{Z}_c^r} = 2\bar{Z}_{rD} \sqrt{\frac{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})}}$$

Posons:

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})}} \tag{II. A. 3}$$

A l'aide de cette relation, l'impédance caractéristique du quadripôle de l'équation 9a et de la figure II. A. 1 s'écrit:

$$\bar{Z}_0 = 2\bar{Z}_{rD} \bar{r} \tag{II. A. 4}$$

On peut opérer de même pour l'admittance de la fig. 9b. L'admittance du demi-membre en marche à vide (fig. II. A. 2), s'écrit sous la forme:

$$\bar{Y}_v^s = \frac{1}{2\bar{Z}_{sD}} + \frac{1}{\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq} + 2\bar{Z}_{rD}} = \frac{1}{2\bar{Z}_{sD}} + \frac{1}{\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md}}$$

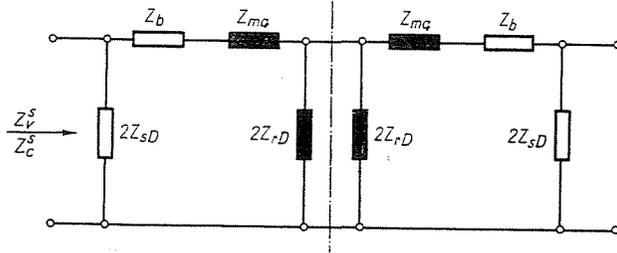


Fig. II. A. 2

Sa réciproque est:

$$\bar{Z}_v^s = \frac{2\bar{Z}_{sD}(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})}{2\bar{Z}_{sD} + \bar{Z}_b + \bar{Z}_{md}} = \frac{2\bar{Z}_{sD}(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})}{\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md}} \quad (\text{II. A. 5})$$

L'impédance en court-circuit du demi-membre s'écrit:

$$\bar{Z}_c^s = \frac{2\bar{Z}_{sD}(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{2\bar{Z}_{sD} + \bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq}} = \frac{2\bar{Z}_{sD}(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq}} \quad (\text{II. A. 6})$$

En utilisant les relations (II. A. 5) et (II. A. 6), l'impédance caractéristique du membre entier sera:

$$\bar{Z}_0^s = \sqrt{\bar{Z}_v^s \bar{Z}_c^s} = 2\bar{Z}_{sD} \sqrt{\frac{(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})}}$$

on bien, en utilisant la relation

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}_b + \bar{Z}_{mq})}{(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{md})(\bar{Z}'_a + \bar{Z}_{mq})}} \quad (\text{II. A. 7})$$

nous obtenons:

$$\bar{Z}_0^s = 2\bar{Z}_{sD}\bar{s} \quad (\text{II. A. 8})$$

### Annexe III

Conformément à l'équation (30), le couple de démarrage (d'une phase) s'exprime par:

$$M = \text{Im} [\psi_1 \bar{I}_1 - \psi_2 \bar{I}_2].$$

En substituant les valeurs des courants et des flux exprimés par les relations (17), (18), (26) et (27), on obtient pour le couple de démarrage:

$$M = \text{Im} \left\{ \frac{j}{\omega_0} \left[ \frac{\hat{I}_{1(0)} \hat{R}}{1 - \hat{q} e^{j2z_0}} - \frac{\hat{I}_{2(0)} \hat{S} \hat{q}_r \bar{e}^{j2z_0}}{1 - \hat{q} e^{-j2z_0}} \right] \left[ \frac{\bar{I}_{1(0)}}{1 - \bar{q} e^{-j2z_0}} + \frac{\bar{I}_{2(0)} \bar{q}_r e^{j2z_0}}{1 - \bar{q} e^{j2z_0}} \right] - \frac{j}{\omega_0} \left[ - \frac{\hat{I}_{1(0)} \hat{S} \hat{q}_r e^{j2z_0}}{1 - \hat{q} e^{j2z_0}} + \frac{\hat{I}_{2(0)} \hat{R}}{1 - \hat{q} e^{-j2z_0}} \right] \left[ \frac{\bar{I}_{1(0)} \bar{q}_r e^{-j2z_0}}{1 - \bar{q} e^{-j2z_0}} + \frac{I_{2(0)}}{1 - \bar{q} e^{j2z_0}} \right] \right\}.$$

En effectuant les multiplications et en utilisant la relation  $\text{Im}[j\bar{A}] = \text{Re}[\bar{A}]$ , on a:

$$M = \frac{1}{\omega_0} \text{Re} \left\{ \frac{I_{1(0)}^2 (\hat{R} + \hat{S} \hat{q}_r^2)}{(1 - \hat{q} e^{j2z_0}) (1 - \bar{q} e^{-j2z_0})} - \frac{I_{2(0)}^2 (\hat{R} + \hat{S} \hat{q}_r^2)}{(1 - \hat{q} e^{-j2z_0}) (1 - \bar{q} e^{j2z_0})} + \hat{I}_{1(0)} \bar{I}_{2(0)} \frac{\hat{R} \bar{q}_r e^{j2z_0} + \hat{S} \hat{q}_r e^{j2z_0}}{(1 - \hat{q} e^{j2z_0}) (1 - \bar{q} e^{-j2z_0})} - I_{1(0)} \hat{I}_{2(0)} \frac{\hat{S} \hat{q}_r e^{-j2z_0} + \hat{R} \bar{q}_r e^{-j2z_0}}{(1 - \hat{q} e^{-j2z_0}) (1 - \bar{q} e^{j2z_0})} \right\}.$$

Écrivons  $\bar{q}$  sous la forme exponentielle:

$$\bar{q} = q e^{j\tau}.$$

Le dénominateur du premier membre s'écrit alors:

$$[1 - q e^{j(2z_0 - \tau)}] [1 - q e^{-j(2z_0 - \tau)}] = 1 + q^2 - 2q \cos(2z_0 - \tau).$$

Le dénominateur du second membre:

$$[1 - q e^{-j(2z_0 + \tau)}] [1 - q e^{j(2z_0 + \tau)}] = 1 + q^2 - 2q \cos(2z_0 + \tau).$$

En multipliant la fraction du troisième membre par  $e^{-j2z_0}$  nous avons:

$$\frac{\hat{R} \bar{q}_r + \hat{S} \hat{q}_r}{(e^{-j2z_0} - \hat{q}) (1 - \bar{q} e^{j2z_0})} = \frac{\hat{R} \bar{q}_r + \hat{S} \hat{q}_r}{e^{-j2z_0} + q^2 e^{j2z_0} - 2q \cos \tau}.$$

En multipliant par  $e^{j2z_0}$  le quatrième membre:

$$\frac{\hat{R} \bar{q}_r + \hat{S} \hat{q}_r}{(e^{j2z_0} - \hat{q}) (1 - \bar{q} e^{-j2z_0})} = \frac{\hat{R} \bar{q}_r - \hat{S} \hat{q}_r}{e^{j2z_0} + q^2 e^{-j2z_0} - 2q \cos \tau}.$$

Après substitution de ces équations, on obtient:

$$M = \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{I_{1(0)}^2}{1 + q^2 - 2q \cos(2\alpha_0 - \tau)} - \frac{I_{2(0)}^2}{1 + q^2 - 2q \cos(2\alpha_0 + \tau)} \right) \operatorname{Re} [R + \bar{S}q_r^2] + \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re} \bar{I}_{1(0)} \hat{I}_{2(0)} \frac{\bar{R}\hat{q}_r + \bar{S}\hat{q}_r - (\hat{R}\hat{q}_r + \hat{S}\hat{q}_r)}{e^{j2\alpha_0} + q^2 e^{-j2\alpha_0} - 2q \cos \tau}.$$

Introduisons les notations suivantes:

$$\operatorname{Re}[\bar{R} + \bar{S}q_r^2] = R_{S(0)}, \quad (\text{III. A. 1})$$

et

$$\bar{R}\hat{q}_r + \bar{S}\hat{q}_r - \hat{R}\hat{q}_r - \hat{S}\hat{q}_r = 2j X_{D(0)}. \quad (\text{III. A. 2})$$

Posons:

$$\bar{I}_{1(0)} = I_{1(0)} e^{j\varphi_{1(0)}}, \quad \bar{I}_{2(0)} = I_{2(0)} e^{j\varphi_{2(0)}}, \quad (\text{III. A. 3})$$

et puisque  $\operatorname{Re}(j\bar{B}) = -\operatorname{Im}(\bar{B})$ , on peut écrire:

$$M = \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{I_{1(0)}^2}{1 + q^2 - 2q \cos(2\alpha_0 - \tau)} - \frac{I_{2(0)}^2}{1 + q^2 - 2q \cos(2\alpha_0 + \tau)} \right) R_{S(0)} - \frac{2}{\omega_0} I_{1(0)} I_{2(0)} X_{D(0)} \operatorname{Im} \frac{e^{j(\varphi_{1(0)} - \varphi_{2(0)})}}{e^{j2\alpha_0} + q^2 e^{-j2\alpha_0} - 2q \cos \tau}. \quad (\text{III. A. 4})$$

### Résumé

L'équation de tension des machines asynchrones asymétriques est déduite sur la base des approximations habituelles, ce qui permet de tracer leur schéma équivalent, une chaîne de quadripôles infinie en deux directions. Les composantes de séquence directe et inverse du courant de court-circuit sont exprimées par des séries infinies. Les moyennes simples de chacune des deux séries sont définies comme des composantes caractéristiques. Ces dernières étant indépendantes de la position du rotor rapportée au stator et précisée par l'angle  $\alpha_0$ , apportent une fonction explicite du couple de démarrage avec la seule variable  $\alpha_0$ ; l'analyse qualitative ou quantitative du couple de démarrage est rendue ainsi plus simple et plus aisée.

### Littérature

1. LINVILLE, T. M.: Starting performance of salient pole synchronous motors. AIEE Transactions, **49**, 531. (1930).
2. LYON, W. V.: An extension of the method of symmetrical components using ladder networks. AIEE Transactions **59**, 1025 (1940).

3. LIWSCHITZ, M. M.: Starting performance of salient pole synchronous motors. AIEE Transactions. **59**, 913 (1940).
4. TUSCHÁK, R.: The equivalent circuit of negative sequence reactances of synchronous machines and its application to the analysis of short-circuit currents. Acta Technica **VI**, (1953).
5. KOVÁCS, K. P.: Etude théorique du service d'un moteur à réluctance. Institut de Formation Professionnelle d'Ingénieurs, Budapest 1954.
6. CHANG, S. S. L.: An analysis of unexcited synchronous capacitor motors. AIEE Transactions **70**, 1978 (1951).
7. KOVÁCS K. P. — RÁCZ I.: Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1959.

Dr. Lajos BAJZA; Budapest, XI. Egry József u. 18—20. Hongrie