BEITRAG SOWJETISCHER FORSCHER ZUR ENTWICKLUNG DER REGELUNGSTHEORIE

Von

F. Csáki

Lehrstuhl für Automatisation, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 23. November 1967)

1. Einleitung

Die Regelungstechnik — und ihre Grundlage, die Regelungstheorie — gehört zu den jüngeren Disziplinen, vermag sie doch erst auf eine Vergangenheit von kaum einigen Jahrzehnten zurückzublicken. In dieser kurzen Zeit hat sie jedoch eine gewaltige Entwicklung durchlaufen und auch heute zählt sie zu jenen Wiesenschaftszweigen, die in ständiger rascher Umwälzung begriffen sind. An dieser rasanten Entwicklung waren die sowjetischen Forscher maßgeblich beteiligt. So bildet beispielsweise das von Pontrjagin und Mitarbeitern erarbeitete Maximum-Prinzip eine der Grundlagen der optimalen Lenkung, die zum zentralen Thema unserer Tage geworden ist. Zum Teil greifen die sowjetischen Forscher in ihren Arbeiten auf russische Forschungsergebnisse zurück. Ein Beispiel hierfür stellt das Verfahren des russischen Akademikers Ljapunow zur Untersuchung der Stabilität nichtlinearer Systeme dar, das 1892 veröffentlicht wurde und das eine bedeutsame Fortentwicklung durch sowjetische Forscher erfahren hat.

Der enge Rahmen eines kurzen Beitrags macht es unmöglich, von den Resultaten der sowjetischen Forscher auch nur eine skizzenhafte Übersicht zu geben, weshalb sich die hier folgenden Ausführungen auf eine mosaikartige Darlegung einiger wichtigerer Verfahren beschränken müssen.

2. Einige Ergebnisse auf dem Gebiet der linearen Systeme

Einen der wichtigsten Problemkreise der stetigen linearen Systeme mit konzentrierten Parametern bildet die Stabilität. Mihajlow formulierte das Stabilitätskriterium 1938 wie folgt: Setzt man in das charakteristische Polynom

$$K(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n \, (a_0 > 0)$$

statt s den Wert $j\,\omega$ und läßt man die Kreisfrequenz ω den Bereich $0 \leqq \omega < \infty$ durchlaufen, so ist das System dann und nur dann stabil, wenn die Ortskurve $K(j\,\omega)$ eben n Viertel der komplexen Zahlenebene durchquert (d. h. wenn sie den Nullpunkt eben durch n Viertelebenen hindurch umgibt). Ist für irgendeine Kreisfrequenz ω_k die Beziehung $K(j\,\omega_k) = 0$, dann entsteht im System ein mit dieser kritischen Kreisfrequenz verharrende Schwingung.

Eine andere wichtige Methode der Stabilitätsprüfung stellt die D-Trennung dar, die nicht nur die Entscheidung über die Stabilität, sondern auch die Bestimmung des zulässigen Bereichs eines Parameters — in der Regel desjenigen der Kreisverstärkung — gestattet.

Dieses von NEUMARK stammende Verfahren verdankt seine Verbreitung MEJEROW. Es bezeichne $D(\mu, \iota, \nu)$ eine Koeffizienten- oder eine Systemparametermenge, der μ negative realteilige Wurzeln, ι Wurzeln mit dem Realteil gleich Null und ν positiv realteilige Wurzeln der charakteristischen Gleichung n-ten Grades zugeordnet sind ($n = \mu + \iota + \nu$). Um entscheiden zu können, ob die Stabilität gegeben ist, muß man feststellen, ob es eine Menge $D(n, 0, 0)$ gibt und bejahendenfalls um welche es sich handelt, d. h. welchen Koeffizienten- bzw. Parameterbereichen sie zugeordnet werden kann.

Eine einfache Stabilitätsprüfung liegt nur dann vor, wenn sich ein einziger Koeffizient oder ein einziger Parameter P frei ändern kann. In solchen Fällen geht die charakteristische Gleichung

$$K(s) = 0$$

in die Form

$$Q(s) + PR(s) = 0$$

oder in die Form

$$P = -\frac{Q(s)}{R(s)}$$

über. Obgleich der Parameter P im allgemeinen nur eine reale Zahl sein kann, ist es zulässig, ihm auch einen komplexen Wert zuzuordnen. Mit der Substitution $s = j\,\omega$ hat man

$$P(j\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}\;.$$

Während die Kreisfrequenz den Bereich $-\infty < \omega < \infty$ durchläuft, kommt es im Grunde genommen zu einer konformen Abbildung der imaginären Achse der komplexen Zahlenebene s auf die Kurve $P(j\,\omega)$ der komplexen Zahlenebene $P(s)$. Da die linksseitige Halbebene s, wenn man auf der imaginären Achse in Richtung des wachsenden ω fortschreitet, links von der Achse zu liegen kommt, haben überhaupt nur die linke Seite der Kurve $P(j\,\omega)$, u. zw. die von ihr eingeschlossenen innersten linksseitigen Bereiche Anspruch darauf, als die Menge $D(n, 0, 0)$ bezeichnet zu werden. Ob diese Bereiche in der Tat jene Werte des Parameters P bestimmen, der die Stabilität gewährleistet, oder ob man es lediglich mit der Menge $D(\mu, \iota, \nu)$ zu tun hat, die den größten linksseitigen Wurzelwert μ liefert, kann mit einem angenommenen geeigneten P-Wert und durch anderweitige Untersuchungen entschieden werden.

Aus dem von der Kurve $P(j\,\omega)$ umschlossenen Stabilitätsbereich gehen auch die zulässigen Höchst- und Mindestwerte des Parameters P hervor.

1947 untersuchte MEJEROW die strukturelle Stabilität von Mehrschleifensystemen. Hierbei stellte er beispielsweise fest, daß sich in einem starr rückgekoppelten System, das aus Verzögerungsgliedern mit der Übertragungsfunktion $K_i/(1 + sT_i)$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$ besteht, durch ein nachgebendes Stabilisierungsglied mit der Übertragungsfunktion $sT/(1 + sT)$ höchstens die Zwischenrückkopplung zweier Verzögerungsglieder verwirklichen läßt, sofern der resultierende Übertragungsfaktor der betreffenden beiden Glieder beliebig zu vergrößern ist. Selbstredend setzt die Sicherung der Stabilität auch die Erfüllung einer Reihe anderer Bedingungen voraus. Auf Grund eingehender Untersuchungen mehrerer Systeme hat MEJEROW für diese die Stabilitätsbedingungen festgelegt. Sie finden sich in seinem auch in deutscher, englischer, ungarischer Sprache erschienen einschlägigen Buch.

Von ZYPKIN und BROMBERG wurde 1945 der Begriff des »*Stabilitätsgrades*« eingeführt. Auf Grund des ROUTH—HURWITZschen Stabilitätskriteriums legten sie die Bedingungen fest, die gegeben sein müssen, damit sich keine der Wurzeln der linken Seite der charakteristischen Gleichung $K(s) = 0$ der imaginären Achse auf einen geringeren Abstand als δ nähert. Dies besagt, daß auch jene Komponente des Übergangsprozesses, die die langsamste Dämpfung erfährt, dem Nullwert mindestens ebenso zustrebt wie das $e^{\delta t}$, oder mit anderen Worten: selbst die größte Zeitkonstante des Systems ist kleiner als $T = 1/\delta$.

Dieser Problemkreis bildet bereits einen Übergang zur qualitativen Untersuchung der linearen Systeme. Große Bedeutung hat für diese SOLODOWNIKOWS Trapezregel erlangt, die er in Artikeln aus den Jahren 1945 und 1948 publizierte und die es gestattet, die Übergangsfunktion aus dem Frequenzgang rechnerisch zu ermitteln. Bei Approximation des Realteiles $Re\, W(j\,\omega)$ der Frequenzkennlinie $W(j\,\omega)$ des geschlossenen Kreises mit Trapezen sei die Gleichung der i-ten Trapezapproximation

$$Re\, W(j\omega) = \lambda_i\,; \qquad 0 \leqq \omega \leqq \omega_i - \Delta_i\,,$$

$$Re\, W(j\omega) = \lambda_i \left[1 - \frac{\omega - \omega_i + \Delta_i}{2\Delta_i}\right], \quad \omega_i - \Delta_i \leqq \omega \leqq \omega_i + \Delta_i\,.$$

Die i-te Komponente der Übergangsfunktion hat in diesem Fall die Form

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi}\,\lambda_i \left\{\mathrm{Si}\,(\varkappa t) + \frac{1}{1-\varkappa}\left[\mathrm{Si}\,(t) - \mathrm{Si}\,(\varkappa\, t) + \frac{\cos t - \cos \varkappa t}{t}\right]\right\},$$

wobei $\varkappa = (\omega_i - \Delta_i)/(\omega_i + \Delta_i) = \omega_i - \Delta_i$, sofern $\omega_i + \Delta_i = 1$ gesetzt wird, während Si $(\varkappa\, t)$ für die sogenannte Integralsinusfunktion

$$\mathrm{Si}\,(\varkappa t) = \int_0^{\varkappa} \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega$$

steht.

Nach der von WORONOW (1952) statt der Trapezapproximation angewandten Dreiecksapproximation ist $\varkappa = 0$ und die i-te Komponente der Übergangsfunktion

$$h_i\,(t) = \frac{2}{\pi}\,\lambda_i \left[\mathrm{Si}\,(t) - \frac{1 - \cos t}{t}\right].$$

Die Überprüfung auf Güte und die Optimalisierung wird häufig auf Grund von Integralkriterien der Form

$$I = \int_0^{\infty} F\big(x\,(t), t\big)\, \mathrm{d}t = \mathrm{Min}$$

vorgenommen. HARKEVITSCH, FELDBAUM und KRASOWSKI schlugen zeitbelegte lineare und allgemeine quadratische Integralkriterien vor.

Neuerdings spielen in der Regelungstechnik die intermittierend arbeitenden Abtastregelungen und die digitalen Systeme eine zunehmend wichtige Rolle. Auf diesem Gebiet hat besonders ZYPKIN eine bemerkenswerte Tätigkeit entfaltet.

Mehr und mehr treten auch die statistischen Untersuchungs- und Bemessungsverfahren in den Vordergrund. Von den auf diesem Gebiet tätigen zahlreichen sowjetischen Forschern seine hier besonders SOLODOWNIKOW, PUGATSCHOW und KASAKOW erwähnt.

Die Erarbeitung des sogenannten Invarianzprinzips hat eine eigene sowjetische Schule entstehen lassen. Die Methode prüft die Möglichkeiten der völligen Ausschaltung gewisser Störungen aus Regelkreisen. Als prominente Vertreter dieser Schule sind KULEBAKIN, PETROW, KUCHTJENKO, TSCHINAJEW bekannt geworden.

Im Zusammenhang mit den mit veränderlichen Parametern arbeitenden Systemen muß der Name SOLODOWS hervorgehoben werden, während auf dem Gebiet der Systeme mit verteilten Parametern LERNER, BUTKOWSKI, JEGOROW bahnbrechende Leistungen vollbracht haben.

Nach dieser flüchtigen Übersicht über die auf dem Gebiet der linearen Regelungstheorie erzielten sowjetischen Ergebnisse sollen nun einige Hinweise auch auf eine Anzahl bemerkenswerter Erfolge auf dem Gebiet der Untersuchung nichtlinearer Systeme gegeben werden.

3. Einige Resultate im Zusammenhang mit dem Ljapunowschen Stabilitätsprüfverfahren

Das wichtigste Problem von Regelungssystemen bildet die Stabilität. Auf nichtlineare Systeme läßt sich das vom russischen Akademiker LJAPUNOW noch vor der Jahrhundertwende entwickelte Verfahren anwenden.

Dieses Verfahren beurteilt die Stabilität bzw. die asymptotische Stabilität des Systems anhand einer z. B. positiv definiten LJAPUNOWschen Funktion und auf Grund der Frage, ob es sich bei der abgeleiteten Funktion um eine negativ definite oder um eine negativ semi-definite handelt.

Der Stabilitätssatz — **T** verweist auf das Transponieren —, lautet: Läßt sich für das in der Form der Vektor-Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}},$$

$$(\text{wenn } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{dann ist } \mathbf{f} = \mathbf{0})$$

geschriebene nichtlineare System n-ter Ordnung eine stetige und ableitbare definite Funktion $V = V(\mathbf{x})$ so wählen, daß ihre Ableitung nach der Zeit

$$W(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) = (\nabla_x V)^{\mathrm{T}}\, \dot{\mathbf{x}} = (\nabla_x V)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{f},$$

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

gleichfalls definit ist, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheint, dann ist das System in dem um den Nullpunkt gelegenen kleinen Bereich asymptotisch stabil. Ist die Funktion $W(\mathbf{x})$ bloß semi-definit, dann ist das System zwar stabil, aber nicht asymptotisch stabil. (Dagegen ist die Lösung — wie dies BARBASCHIN und KRASOWSKI nachgewiesen haben — asymptotisch stabil, sofern $W(\mathbf{x})$ semi-definit und $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ keine Trajektorie der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist.) Globale Stabilität bzw. globale asymptotische Stabilität besagt, daß die hinreichenden Bedingungen im gesamten Phasenraum erfüllt sind.

Der Labilitätssatz lautet: Kann für ein nichtlineares System n-ter Ordnung eine LJAPUNOWsche Gleichung $V(\mathbf{x})$ gefunden werden, die stetig und deren Ableitung nach der Zeit negativ definit ist, dann ist das System

a) labil in jenem endlichen Bereich, in dem $V(\mathbf{x})$ nicht positiv semidefinit ist, während

b) die Auslenkung des Systems mit fortschreitender Zeit über alle Grenzen hinaus anwächst, sofern $V(\mathbf{x})$ global nicht positiv semi-definit ist

Inzwischen sind zahlreiche Varianten dieses Verfahrens bekannt geworden. Sie betreffen die Beurteilung der Stabilität im kleinen und im großen. Die schwierigsten Probleme ergeben sich eben aus der Aufstellung der LJAPUNOWschen Funktionen $V(\mathbf{x})$. Hierfür sind bezüglich der autonomen Systeme mehrere Methoden bekannt geworden. Relativ wenige Sätze betreffen die nichtautonomen Systeme. Aus der überaus umfangreichen Literatur über das LJAPUNOWsche Verfahren seien hier die Autoren AJSERMAN, BARBASCHIN, TSCHETAJEW, DUBOSCHIN, JERUGIN, KRASOWSKI, LETOW, LURJE, MALKIN, MOISSEJEW, NEMYZKI, PERSIDSKI, RASUMICHIN, RUMJANZEW und SUBOW genannt.

Für autonome linear Systeme, für die $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ist die Wahl der LJAPUNOW-Funktion verhältnismäßig einfach. In solchen Fällen wählt man die positiv definite quadratische Form

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{x} ,$$

in der $\mathbf{P}$ eine positiv definite symmetrische Matrix bezeichnet. Die Ableitung von $V(\mathbf{x})$ kann in die Form

$$W(\mathbf{x}) = - \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

gebracht werden, in der

$$- \mathbf{Q} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} .$$

$W(\mathbf{x})$ ist negativ definit, wenn und nur wenn $\mathbf{Q}$ eine positiv definite symmetrische Matrix ist.

Für nichtlineare Systeme der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist der allgemeinste Satz derjenige von KRASOWSKI. Die LJAPUNOWsche Funktion für diese Systeme hat die positiv definite symmetrische quadratische Form

$$V(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{B} \, \mathbf{f}$$

mit der Ableitung in der quadratischen Form

$$W(\mathbf{f}) = - \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \, \mathbf{f} ,$$

in der

$$- \mathbf{C} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}} \mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{J} ,$$

während

$$\mathbf{J} = \mathbf{f}(\nabla_x)^{\mathrm{T}} \text{ mit } (\nabla_x)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

die JACOBIsche Matrix darstellt. Die quadratische Form $W(\mathbf{f})$ ist dann und nur dann negativ definit, wenn $\mathbf{C}$ eine positiv definite Matrix ist.

Vielfach leistet das Verfahren von AJSERMAN gute Dienste. Ist

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

die Differentialgleichung des nichtlinearen Systems und läßt sich eine Matrix **K** finden, für deren sämtliche Elemente

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{K}\mathbf{x}\,,$$

dann vereinfacht sich die Aufgabe nach AJSERMANs Vermutung zu einer Untersuchung des linearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{K})\,\mathbf{x}$$

nach dem für linear autonome Systeme bereits beschriebenen Verfahren.

Eine wichtige Rolle spielt in der Untersuchung der Stabilität nichtlinearer Systeme die LURJEsche erste kanonische Form. Die Systemgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,g(\sigma)$$
$$\sigma = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$$

lassen sich mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}\,\mathbf{z}$$

in die erste kanonische Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}\mathbf{z} + \mathbf{e}\,g(\sigma)$$

mit

$$\sigma = \alpha^{\mathrm{T}}\,\mathbf{z}$$

überleiten. Hierbei ist die Transformationsmatrix so zu wählen, daß man einerseits

$$\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{S} = \operatorname{diag}\,[s_1, s_2, \ldots, s_n]\,,$$

andererseits

$$\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{b} = \mathbf{e};\ \text{mit}\ \mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$$

erhält, wobei $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die einfachen, von Null verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|\mathbf{A} - s\mathbf{I}| = 0$ sind.

Schließlich kann für

$$\alpha^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{L}$$

die LJAPUNOWsche Funktion (unter Vernachlässigung eines beliebig niedrig anzusetzenden Gliedes) in der Form

$$V = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}\,\mathbf{z}$$

herangezogen werden, in der sich das Element p_{ik} der Matrix $\mathbf{P}$ zu

$$p_{ik} = \frac{a_i\, a_k}{s_i + s_j}$$

schreibt. Hierin sind a_i, a_k $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ Koeffizienten, die vorläufig nicht bestimmt werden können. Die Ableitung der LJAPUNOW-Funktion läßt sich unter Berücksichtigung der kanonischen Form in die Gestalt

$$\dot{V} = \mathbf{z}^{\mathrm{T}} (\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{S})\, \mathbf{z} - \sigma g(\sigma) + [\alpha^{\mathrm{T}} \mathbf{z} + 2\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}\mathbf{z}]\, g(\sigma)$$

bringen. $\dot{V}$ wird negativ definit, wenn der in den eckigen Klammern stehende Multiplikationsfaktor von $g(\sigma)$ gleich Null ist. Auf dieser Grundlage erhält man das quadratische Gleichungssystem

$$\alpha_i - 2a_i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_i + s_k} = 0\,; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Die hinreichende Bedingung der globalen asymptotischen Stabilität besteht darin, daß die den reellen (komplexen) Wurzeln s_i zugehörigen Lösungen a_i gleichfalls reell (komplex) sein müssen. LURJE und LETOW haben auch mehrere andere, dem beschriebenen ähnliche sogenannte sekundäre Stabilitätskriterien abgeleitet.

4. Resultate auf dem Gebiet der optimalen Lenkung

Auf diesem Gebiet haben FELDBAUM, LERNER, PONTRJAGIN und Mitarb., ferner BOLTJANSKI, GAMKREILIDZE, MISCHENKO bahnbrechende Leistungen vollbracht.

Selbst eine auch nur einigermaßen eingehendere Behandlung der einschlägigen Materie würde weit über den Rahmen dieser Ausführungen hinausgehen, weshalb hier lediglich auf die Ähnlichkeit zwischen der Formulierung des PONTRJAGINschen Maximum-Prinzips und den in den HAMILTONschen Gleichungen niedergelegten Formulierungen mechanischer Gesetze hingewiesen wird.

Die Differentialgleichung $(n + 1)$-ter Ordnung für das System laute

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,,$$

wobei $\mathbf{f}$ und $\mathbf{x}$ Säulenvektoren mit der Komponentenzahl $(n + 1)$, $\mathbf{u}$ hingegen einen Säulenvektor mit der Komponentenzahl r bezeichnen soll.

Es sei weiterhin

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

die Hamilton-Funktion mit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}} H; \quad \nabla_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} H; \quad \nabla_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}},$$

worin **T** auf das Transponieren hinweist.

Schließlich sei $\mathbf{u}(t)$, $0 \leqq t \leqq T$ ein zulässiger Richtungsvektor, der die Sicherheit bietet, daß die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ vom Punkt $\mathbf{x}(0)$ aus in den Punkt $\mathbf{x}(T)$ gelangt. Die notwendige Voraussetzung dafür, daß $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ optimal werden, ist die Existenz einer von Null verschiedenen Vektorfunktion $\mathbf{p}(t)$ mit der Komponentenzahl $(n+1)$, die eine Funktion von $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ ist, wobei

1. für jeden Zeitpunkt $t (0 \leqq t \leqq T)$ die Hamilton-Funktion $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ bei $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ den Maximumwert

$$H[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] = M[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)]$$

annehmen und

2. zum äußersten Zeitpunkt T

$$p_0(T) \leqq 0; \quad M[\mathbf{p}(T), \mathbf{x}(T)] \geqq 0$$

erfüllt sein muß. (Im allgemeinen ist die Bedingung unter 2. nicht nur für den Zeitpunkt T, sondern auch für jeden anderen Zeitpunkt $0 \leqq t \leqq T$ erfüllt.)

Hierzu die Bemerkung: In den obigen Vektorgleichungen figuriert die Optimalisierungsbedingung

$$J = \int_0^T f_0[\mathbf{x}(t), \ \mathbf{u}(t)]\, dt = x_0 = \mathrm{Min}$$

in der Form

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = f_0[x_1, \ldots, x_n, \mathbf{u}(t)].$$

Ist beispielsweise $f_0 \equiv 1$, dann ist die kürzeste Durchgangszeit gesucht.

$$J = T = \mathrm{Min}.$$

Das Pontrjagin-Prinzip liefert eine ganz allgemeine Formulierung der Optimumprobleme der Regelungstechnik. Und hier geht es nicht nur um Systeme mit optimaler Einstelldauer, vielmehr kann es sich auch um andere, etwa um optimale Systeme, die irgendein Integralkriterium minimalisieren oder um Systeme sonstiger Art handeln.

Das PONTRJAGIN-Prinzip ist verhältnismäßig neu. Dennoch kann die Zahl der Publikationen in der Fachliteratur, die sich mit ihm befassen, schon jetzt auf mehrere hundert beziffert werden. Sie haben vornehmlich die Zeit-Optimum-Systeme und nur zum geringeren Teil die der anderweitigen Optimum-Systeme zum Gegenstand. Die größte Bedeutung scheint man eben der Frage beizumessen, inwieweit es gelingen wird, die Schaltungshyperfläche auch in geschlossener Form anzugeben, wenn es sich um einen relativ komplizierten Funktionsausdruck handelt, wenn es also fraglich wird, ob die physikalische Realisierung möglich ist. Deshalb setzten sich denn auch die Untersuchungen teilweise das Ziel, klarzustellen, wie diese Schaltungshyperflächen durch praktisch einfacher realisierbare Ebenen oder Flächen angenähert werden können.

Zahlreiche Artikel der Fachliteratur weisen auf die engen Wechselbeziehungen zwischen Maximum-Prinzip, klassischer Variationsrechnung und dynamischer Programmierung hin. (Hierzu sei besonders die Artikelreihe in Automatik und Telemechanik von ROSENAUER hervorgehoben.) Das Maximum-Prinzip und die dynamische Programmierung bilden die Grundlage für eines der wichtigsten Kapitel der Regelungstechnik, mit Recht steht also zu erwarten, daß in den kommenden Jahren zu diesem Problemkreis noch zahlreiche Publikationen und Artikel erscheinen werden.

5. Einige anderweitige Resultate

Die nichtlineare Regelungstechnik hat eine Reihe von Verfahren entwickelt, die — obgleich sie mit der Lehre von den nichtlinearen Schwingungen in enger Verwandtschaft stehen — ihre eigentliche Entfaltung erst in der Regelungstechnik erfahren haben. Um ein solches Verfahren handelt es sich beispielsweise bei der Methode der harmonischen Linearisierung, die KRYLOW und BOGOLJUBOW zu verdanken ist. Dieses Verfahren der harmonischen Linearisierung oder — wie es auch genannt wird — der Beschreibungsfunktionen setzt bekanntlich am Eingang des nichtlinearen Gliedes sinusförmige Schwingungen voraus, während sie am Ausgang des nichtlinearen Gliedes die harmonischen Oberschwingungen vernachlässigt und nur die Grundharmonischen berücksichtigt. Da die sonstigen linearen Teile des Regelungssystems für gewöhnlich den Charakter von Tiefpässen tragen, führt die genannte Approximation häufig zu auffallend guten Ergebnissen, besonders soweit es die Beurteilung der Stabilität bzw. des Grenzzyklus betrifft. Die große Verbreitung der harmonischen Linearisierung ist dem Umstand zuzuschreiben, daß sie im Grunde genommen das Rechnen mit einem gleichwertigen linearen System gestattet und damit die Anwendung der gut bekannten und sicheren Methoden der linearen Regelungstechnik auf nichtlineare Systeme ermöglicht.

Es laute die Funktion des nichtlinearen Gliedes $x_a = f(x_e)$, worin x_a das Ausgangs-, x_e hingegen das Eingangssignal bezeichne. Handelt es sich bei diesem um ein harmonisches Signal im Sinne von

$$x_e(t) = B \sin \omega t,$$

dann hat man für das Ausgangssignal

$$x_a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)\,,$$

wobei A_0; A_n, B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Koeffizienten der Fourierreihe bezeichnen. Die harmonische Linearisierung berücksichtigt nur die konstante Komponente und die Grundschwingungen.

Das Ausgangssignal läßt sich mithin mit dem Ausdruck

$$x_a(t) \approx A_0 + q(B)\, B \sin \omega t + q'(B)\, B \cos \omega t$$

annähern, in dem

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(B \sin \omega t)\, d\omega t\,,$$

$$q(B) = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} f(B \sin \omega t) \sin \omega t\, d\omega t\,,$$

$$q'(B) = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} f(B \sin \omega t) \cos \omega t\, d\omega t$$

ist.

Die Beschreibungsfunktion selbst schreibt sich zu

$$N(B) = q(B) + j\, q'(B)\,.$$

Auch die Methode der Beschreibungsfunktionen hat eine ausgedehnte Literatur, und selbst in jüngster Zeit werden immer neuere Artikel publiziert, die einzelne Varianten des Verfahrens behandeln. (Beispiele bilden die Bücher von Popow und Paltow.)

Die sogenannte statistische Linearisierung bildet bei der Linearisierung im Zeitbereich eine ähnlich stark verbreitete Methode wie bei der harmonischen Linearisierung. Dieses Verfahren geht von der Annahme eines statistischen Eingangssignals aus, welches in der Regel als im Gaußschen Sinne normal verteilt angesehen wird. Eine normale Verteilung liegt auch beim Ausgangssignal vor, und auf Grund der beiden Signale läßt sich beispielsweise ein gleichwertiger linearer Verstärkungsfaktor für das nichtlineare Glied bestimmen. Naturgemäß können auch andere Kennwerte definiert werden, am häufigsten wird jedoch der linearisierte Übertragungsfaktor gebraucht.

Es sei (im einfachsten Fall) die Funktion $x_a = f(x_e)$ des nichtlinearen Gliedes unpaar und eindeutig, das Eingangssignal $x_e(t)$ hingegen ein stationäres stochastisches Signal mit dem voraussichtlichen Wert Null:

$$\mathbf{M}[x_e(t)] = 0.$$

Das reelle stochastische Signal $x_a(t)$ kann mit einem idealen Signal $x_i(t)$ so angenähert werden, daß die mittlere quadratische Abweichung zwischen den beiden Signalen ein Minimum wird:

$$\mathbf{M}\{[x_a(t) - x_i(t)]^2\} = \mathrm{Min}\,.$$

Nach der Methode der statistischen Linearisierung ist

$$x_i(t) = K_S\, x_e(t)$$

und der gleichwertige Übertragungsfaktor

$$K_S = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_e f(x_e)\, p(x_e)\, \mathrm{d}x_e}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_e^2\, p(x_e)\, \mathrm{d}x_e}\,,$$

worin bei stationärem Ablauf die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x_e)$ des Eingangssignals $x_e(t)$ von der Zeit unabhängig ist. Um die statistische Linearisierung hat sich in erster Linie KASAKOW verdient gemacht.

Ein weiterer Themenkreis der nichtlinearen Regelungstechnik, der eine beachtliche Entwicklung aufzuweisen hat, ist die Extremalregelung oder mit einem anderen Namen die Optimumansuche. Hier handelt es sich im Grunde genommen um das Auffinden des Extremwertes einer nichtlinearen Zielfunktion. Die Aufgaben lassen sich in zwei Gruppen aufteilen, einerseits in die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Gradienten, andererseits in die Schritte zum Extremum hin. Diesen letzteren Teil der Aufgabe nennt man oft auch die »Bergsteigermethode«. Am häufigsten bedient man sich des Gauß-Seidelschen, ferner des Gradientenverfahrens sowie der Methode des steilsten Falles. Die Literatur zu diesem Problemkreis ist überaus umfangreich. Sie gibt nicht nur über grundsätzliche Erwägungen, sondern auch über die Möglichkeiten der praktischen Verwirklichung Auskunft. Im Zusammenhang mit diesem Themenkreis sei hier auf die Tätigkeit von FELDBAUM, KRASOWSKI und anderen hingewiesen.

Die Methoden der Optimumsuche stellen eine der Untergruppen der adaptiven, d. h. der Systeme mit veränderlicher Struktur dar. Eben dieser Themenkreis ist es auch, der im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit auf diesem Fachgebiet steht, wie dies aus der großen Zahl von Fachpublikationen über die adaptiven Systeme hervorgeht. Als Vertreter der sowjetischen Forschung hat neuerdings ZYPKIN beachtenswerte Resultate erzielt.

6. Schluß

Die vorangehenden Ausführungen mußten sich — unter Verzicht auf Vollständigkeit — wegen des knappen Raumes notwendigerweise auf eine kurze Übersicht über einige wichtigere Resultate sowjetischer Forscher auf dem Gebiet der Theorie der linearen und nichtlinearen Regelung beschränken.

Ein günstiger Einfluß auf die Entwicklung der Regelungstheorie in Ungarn ist dem Umstand zu verdanken, daß Lehrkörper und Hörer der Budapester Technischen Universität Gelegenheit hatten, Vorträge der Herren Professoren KULEBAKIN — Mitglied der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften und Ehrendoktor der Universität —, MEJEROW, FELDBAUM, LERNER, ZYPKIN, SOLODOWNIKOW, FATJEJEW und WORONOW anzuhören und mit ihnen Konsultationen zu pflegen.

Die sowjetisch-ungarischen Beziehungen werden sich ganz gewiß auch auf dem Gebiet der Regelungstheorie, diesem wichtigen Zweig der modernen Technik, weiter vertiefen und neue Früchte tragen.

Zusammenfassung

Im Rahmen des Vortrages werden die Arbeiten und Ergebnisse der bedeutendsten sowjetischen Wissenschaftler im Bereich der linearen und nichtlinearen Regelungstechnik zusammenfassend besprochen. Unter anderen werden die Stabilitätstheorie von LJAPUNOW, das Maximumprinzip von PONTRJAGIN mit dessen Hilfe die Aufgabe der optimalen Systemsteuerung gelöst werden kann, ferner die Stabilitätstheorie von MIHAJLOW, Arbeiten von MEJEROW, die neuesten Ergebnisse von ZYPKIN usw. behandelt.

В рамках доклада в обобщенном виде излагается работа выдающихся советских исследователей и достигнутые ими результаты в области теории нелинейного и линейного регулирования. Так, в частности, мы сообщаем теорию устойчивости *Ляпунова*, принцип максимума *Понтрягина*, при помощи которого может быть разрешена задача оптимального управления системами, принцип устойчивости *Михайлова*, работы *Меерова*, новейшие результаты *Цыпкина* и т. д.

Literatur

1. Айзерман, М. А.: Лекции по теории автоматического регулирования. 2. изд. 1958, 520.
2. Айзерман, М. А.: Теория автоматического регулирования. 3. изд. 1966, 452.
3. Айзерман, М. А.: Теория автоматического регулирования двигателей. 1952, 524.
4. Боголюбов, Н. Н.—Митропольский, Ю. А.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 2. изд. 1958, 408.
5. Болтянский, В. Г.: Математические методы оптимального управления. 1966, 307.
6. Бутковский, А. Г.: Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. 1965, 474.
7. Воронов, А. А.: Элементы теории автоматического регулирования. 2. изд. 1954, 472.
8. Воронов, А. А.: Основы теории автоматического управления. 1966.
9. Еругин, Н. П.: Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. 1963, 271.
10. Красовский, А. А.: Основы автоматики и технической кибернетики. 1962, 800.
11. Крылов, А. Н.: Лекции о приближенных вычислениях. 5 изд. 1950, 400.
12. Крылов, А. Н.: О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. 1950, 368.
13. Кухтенко, А. И.: Проблема инвариантности в автоматике. 1963, 375.
14. (Ред.: Кулебакин, В. Н.—Петров, В. Н.): Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды 2. 1964, 503.
15. Лернер, А. Й.: Принципы построения быстродействующих следящих систем и регуляторов. 1961, 151.
16. Лернер, А. Й.: Введение в теорию автоматического регулирования. 1958, 352.
17. Летов, А. М.: Устойчивость нелинейных регулируемых систем. 1955, 312.
18. Ляпунов, А. М.: Общая задача об устойчивости движения. 1950, 472.
19. Малкин, И. Г.: Теория устойчивости движения. 2. изд. 1966, 530.
20. Мееров, М. В.: Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. 1959, 284.
21. Мееров, М. В.: Системы многосвязного регулирования. 1965, 384.
22. Мееров, М. В.: Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин. 1956, 418.
23. Попов, Е. П.—Пальтов, И. П.: Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. 1960, 792.
24. (Ред.: Петров, В. Н.): Математические модели технологических процессов и разработка систем автоматического регулирования с переменной структурой. 1964, 467.
25. Понтрягин—Болтянский: Математическая теория оптимальных процессов. 1961.
26. Попов, Е. П.: Автоматическое регулирование. 3. изд. 1959, 296.
27. Попов, Е. П.: Динамика систем автоматического регулирования. 1954, 798.
28. Солодов, А. В.: Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. 1962, 32.
29. Солодовников, В. В.: Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления. 1965, 354.
30. Солодовников, В. В.: Автоматическое управление и вычислительная техника. В. 3.
31. Солодовников, В. В.: Основы автоматического регулирования.
32. Солодовников, В. В.: Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. 1960, 656.
33. Солодовников, В. В.: Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. 1952, 368.
34. Фатеев, А. В.: Основы линейной теории автоматического регулирования. 1954, 296.
35. Фельдбаум, А. А.: Электрические системы автоматического регулирования. 2. изд. 1957, 808.
36. Фельдбаум, А. А.: Основы теории оптимальных автоматических систем. 1963, 552.
37. (Ред.: Фельдбаум, А. А.): Теоретические основы связи и управления. 1963, 932.
38. Харкевич, А. А.: Автоколебания. 1954, 172.
39. Цыпкин, Я. З.: Теория импульсных систем. 1958, 724.
40. Цыпкин, Я. З.: Теория линейных систем. 1963, 968.
41. Цыпкин, Я. З.: Теория релейных систем автоматического регулирования. 1955, 456.
42. Цыпкин, Я. З.: Автоматическое регулирование и управление. 1962, 526.
43. (Ред.: Цыпкин, Я. З.): Теория применения автоматических систем. 1964, 342.

44. Чинаев, П. И.—Чугунов, И. И.: Бесконтактные самонастраивающиеся системы на цифровых элементах. 1965, 68.
45. Чинаев, П. И.: Многомерные автоматические системы. 1963, 278.
46. Чинаев, П. И.: Самонастраивающиеся системы. 1963, 302.
47. Aizerman, M. A.—Gantmacher, F. R.: Absolute stability of regulator systems. 1964, 172 p.
48. Aizerman, M. A.: Theory of automatic control. 1963, 519 p.
49. (Ed.: Boltyansky, V. G.): The mathematical theory of optimal processes. 1963, 360 p.
50. (Ed.: Boltjansky, V. G.): Mathematische Theorie optimaler Prozesse. 1964, 340 p.
51. Fel'dbaum, A. A.: Rechengeräte in automatischen Systemen. 1962, 469 p.
52. Lerner, A. J.: Schnelligkeitsoptimale Regelungen 1963, 104 p.
53. Letov, A. M.: Stability in nonlinear control systems. 1961, 315 p.
54. Mejerow, M. W.: Grundlagen der selbsttätigen Regelung elektrischer Maschinen. 1954. 171 p.
55. Popow-Pal'tow, I. P.: Näherungsmethoden zur Untersuchung nichtlinearer Regelungssysteme. 1963, 786 p.
56. (Ed.: Pontryagin, L. S.): The mathematical theory of optimal processes. 1963, 360 p.
57. (Ed.: Pontrjagin, L. S.): Mathematische Theorie optimaler Prozesse. 1964, 340 p.
58. Popov, E. P.: The dynamics of automatic control systems. 1962, 761 p.
59. Solodownikow, W. W.: Einführung in die statistische Dynamik linearer Regelungssysteme. 1963, 620 p.
60. Solodownikow, W. W.: Grundlagen der selbsttätigen Regelung. 1959, 731—1180 p.
61. Solodownikow, W. W.—Usakow, A. S.: Statistische Analyse von Regelstrecken. 1963, 167 p.
62. Zypkin, J. S.: Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung. 1958.
63. Zypkin, J. S.: Theorie der linearen Impulssysteme. 1966.

Prof. Dr. Frigyes Csáki, Budapest, XI. Egry József u. 18—20. Ungarn