

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА С УЧЁТОМ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ ЦЕПИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Ш. ХАЛАС

(Поступило 12 декабря 1967 г.)

Кафедра Электрических машин. Представлено проф. И. Рац.

§ 1. Постановка задачи

В [1] рассмотрено оптимальное управление двигателем постоянного тока независимого возбуждения при пренебрежении постоянной времени цепи возбуждения. Учет этой постоянной времени приводит к задаче об оптимальном управлении нелинейной системой с двумя параметрами управления (напряжение якоря и напряжение возбуждения двигателя), в которой учитываются электромагнитные переходные процессы в одном из каналов управления, причем определенная специфичность задачи состоит в том, что напряжение возбуждения представляет собой как бы побочный параметр управления, однозначно и независимо от первого управления определяющего величину одного из параметров системы — потока двигателя.

Цель данной работы состоит в том, чтобы выявить влияние величины постоянной времени цепи возбуждения двигателя на быстродействие системы, указать пути разумного выбора величины постоянной времени и сформулировать правила синтеза подобных систем. Кроме этого, рассмотренная задача является интересным и полезным примером применения принципа максимума.

В ходе исследования магнитная цепь двигателя принимается ненасыщенной, что позволяет ограничиться случаем неизменных параметров цепи возбуждения; а также пренебрегается вихревыми токами в станине двигателя. Напряжение возбуждения может непрерывно меняться от наименьшего значения λ , соответствующего минимально возможному по условиям разнаса потоку, до номинального значения $u_{2H} = 1$.

Запишем уравнения движения системы (рис. 1):

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= (u_1 - v\varphi) \varphi - m; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\varrho} (u_2 - \varphi); \\ \frac{dx}{dt} &= v.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь:

$$u_1 = \frac{U_1}{U_{1H}} \text{ — напряжение якоря,}$$

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ — скорость вращения двигателя, } \omega_0 \text{ — скорость холостого хода при } \varphi = 1,$$

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\omega_0 T_M} \text{ — угол поворота вала электродвигателя, } T_M \text{ — электро-механическая постоянная времени при } \varphi = 1.$$

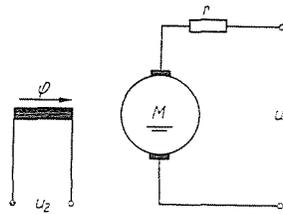


Рис. 1

$$t = \frac{t'}{T_M} \text{ — время,}$$

$$\varrho = \frac{T_B}{T_M} \text{ — постоянная времени цепи возбуждения,}$$

$$m = \frac{M_C}{M_H} r \text{ — постоянный (т. е. независимый от скорости и пути) момент сопротивления, } M_H \text{ — номинальный момент,}$$

r — относительное сопротивление якорной цепи.

Целью оптимального управления является достижение определенной скорости или же перевод системы из начального положения α_0, v_0, φ_0 в конечное положение α_k, v_k (при любом φ) за минимальное время.

Гамильтониан для системы (1) и сопряженная система записываются в виде [2]:

$$H = \psi_1 [(u_1 - v\varphi)\varphi - m] + \psi_2 \frac{1}{\varrho} (u_2 - \varphi) + \psi_3 v; \quad (2)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_1 \varphi^2 - \psi_3;$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 (u_1 - 2v\varphi) + \psi_2 \frac{1}{\varrho}; \quad (3)$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = 0,$$

следовательно ($-1 \leq u_1 \leq 1$):

$$u_1 = \text{sign } \psi_1; \quad (4)$$

$$u_2 = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \text{sign } \psi_2 = -1, \\ 1, & \text{если } \text{sign } \psi_2 = 1. \end{cases}$$

Соответственно поставленной задаче уравнения принципа максимума следует дополнить условием трансверсальности в конечной точке. Так как речь идет о выводе системы на прямую $\alpha = \alpha_k$; $v = v_k$ в пространстве переменных α , v , φ , то [2]:

$$\psi_{1k} \cdot 0 + \psi_{2k} \varphi + \psi_{3k} 0 = 0,$$

откуда условие трансверсальности формулируется в виде

$$\psi_{2k} = 0. \quad (5)$$

Прежде чем перейти к подробному разбору задачи отметим, что в результате симметрии мы ограничимся рассмотрением движения в той части пространства, где $v \geq 0$. Результаты, полученные для этого случая, могут быть легко интерпретированы на все пространство параметров системы.

§ 2. Оптимальное управление по скорости

Оптимальное управление по скорости выражается в том, что система обязана достигнуть заданной скорости за минимально возможное время. Сходная задача рассматривалась в [8], однако полученное авторами решение носит частный характер. Чтобы по (4) определить величину управляющих параметров на различных этапах управления, следует найти число изменений знаков u_1 и u_2 . Так как при оптимальном управлении по скорости $\psi_3 \equiv 0$, то согласно (3) имеем:

$$\psi_1 = c_1 e^{\int \varphi^2 dt};$$

$$\psi_2 = e^{\frac{1}{\varphi}} \left[- \int (u_1 - 2v\varphi) \psi_1 e^{-\frac{1}{\varphi} t} dt + c_2 \right], \quad (6)$$

где c_1 и c_2 постоянные. Из (6) следует, что ψ_1 и u_1 не меняют своего знака, а число перемен знака ψ_2 приходится исследовать более подробно.

Наиболее просто число перемен знака ψ_2 определяется при $\psi_1 < 0$ (торможение, $u_1 < 0$). Ведь в этом случае подынтегральное выражение второго уравнения (6) не меняет своего знака, таким образом функция

$\psi_2/e^{1/2 t}$ монотонно уменьшается. Так как в конце ψ_2 должно быть равно нулю (5), то $c_2 > 0$ и соответственно $\psi_2 > 0$, т. е. на участке торможения $u_2 = 1$.

В случае разгона системы число перемен знака ψ_2 зависит от числа изменений знака подинтегрального выражения $u_1 - 2v\varphi = 1 - 2v\varphi$. Знак этого выражения меняется каждый раз, когда траектория системы пересекает гиперболу $v\varphi = 0,5$. Нам известно [1], что гипербола $v\varphi = 0,5$ является оптимальной траекторией системы при $\varrho = 0$. Поэтому при любом ϱ желательно провести систему по траектории, расположенной как можно «ближе» к гиперболе $v\varphi = 0,5$. При достаточно больших ϱ это удастся достичь только путем однократного пересечения гиперболы траекторией системы. Так как в этом случае подинтегральное выражение меняет свой знак только один раз, то число переключений знака ψ_2 также должно быть равно единице. При этом точка переключения располагается ниже гиперболы $v\varphi = 0,5$: ведь по условиям трансверсальности (5) в конце траектории ψ_2 снова должно обратиться в нуль, а это возможно только в том случае, если траектория системы между двумя нулями ψ_2 проходит через гиперболу.

При малых постоянных времени цепи возбуждения часть траектории системы может лежать на гиперболе $v\varphi = 0,5$. Мы назовем эту часть траектории особой. Согласно принципу максимума это возможно, если при достижении особого участка ψ_2 обращается в нуль. Но при этом $\psi_2 = 0$ на всем особом участке, так как вдоль него ψ_2 не меняет своего значения. Именно поэтому каждая точка особого участка может быть и конечной точкой траектории.

Управление, при котором система движется по особому участку, мы назовем особым. Очевидно, что при особом управлении $\lambda \leq u_2 \leq 1$, т. е. принимает не только свои крайние значения, как раньше по (4) при $\psi_2 \neq 0$. Выясним размеры особого участка и определим u_2 при особом управлении.

Разделив второе уравнение (1) на первое, получим уравнение траекторий системы в плоскости v, φ ($u_1 = 1$):

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{1}{\varrho} \frac{u_2 - \varphi}{(1 - v\varphi)\varphi - m}. \quad (7)$$

При движении по траектории $v\varphi = 0,5$ имеем

$$\frac{d\varphi}{dv} = -2\varphi^2. \quad (8)$$

Очевидно, наша система будет способна двигаться по гиперболе $v\varphi = 0,5$ только тогда, когда после подстановки в (7) $v\varphi = 0,5$, можно найти такое значение $\lambda < u_2 < 1$, при котором (7) и (8) равны между собой:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{u_2 - \varphi}{0,5\varphi - m} = -2\varphi^2. \quad (9)$$

На основании (9) определяется искомое значение u_2 :

$$u_2 = \varphi + 2\rho m\varphi^2 - \rho\varphi^3. \tag{10}$$

На рис. 2, в качестве примера для $\lambda = 0,3$, приведены кривые $u_2(\varphi)$ для различных ρ и m . При построении кривых было учтено, что наибольшее значение m , при котором задача достижения скорости v_{\max} может быть выполнена, равно

$$m = \frac{1}{4v_{\max}} = \frac{\varphi_{\min}}{2}.$$

Из рис. 2 ясно, что наиболее трудным с точки зрения вывода системы на траекторию $v\varphi = 0,5$ является точка $\varphi = 1, v = 0,5$. Лишь при $m < 0,15$

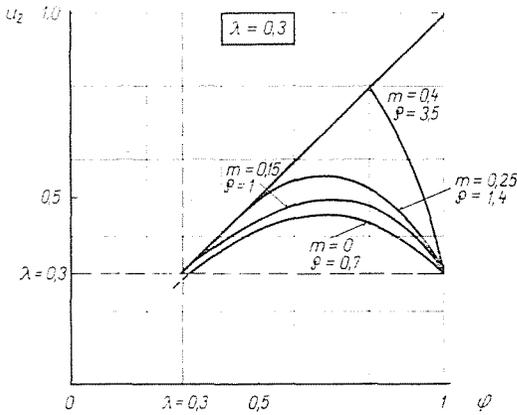


Рис. 2

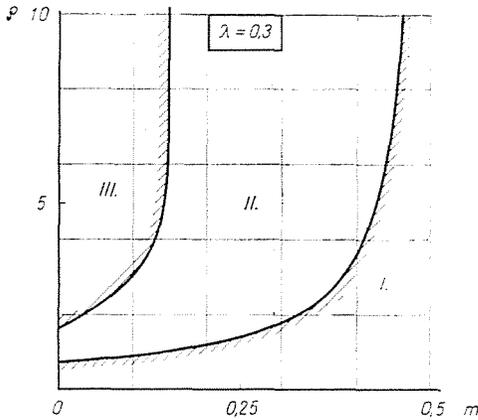


Рис. 3

теоретически не удастся довести систему по упомянутой траектории до максимально возможной скорости, однако даже при $m = 0$ (мы ограничиваемся случаем $m \geq 0$) и $\varrho = 0,7$ практически все же система движется по наилучшей траектории до $\varphi = \lambda$, так как сходит с нее лишь при $\varphi \cong 0,32$. Таким образом, если при $\varphi = 1$ соблюдается граничное условие для u_2 , т. е. $u_2 = \lambda$, то согласно (9) для всех

$$\varrho \leq \frac{1 - \lambda}{1 - 2m} \quad (11)$$

особый режим будет возникать всегда. Построив в плоскости $\varrho(m)$ кривую, соответствующую (11), можно выделить область параметров обязательного особого режима I. На рис. 3 эта область построена для $\lambda = 0,3$.

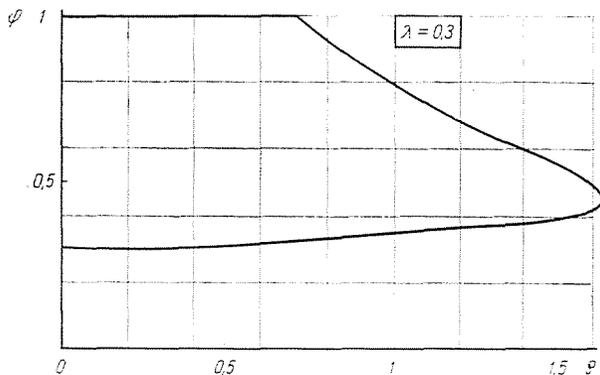


Рис. 4

Для ϱ , не удовлетворяющих (11), особый режим возможен, но не обязателен. Чтобы выделить область возможного особого режима, следует подставить в (10) $u_2 = \lambda$ и определить соответствующие значения ϱ и m , при которых (10) имеет два равных действительных корня в пределах изменения $\lambda \leq \varphi \leq 1$. При этом следует иметь в виду, что при $m > 0,5\lambda$ установившаяся скорость системы снижается настолько, что попадает на участок гиперболы $\lambda < \varphi < 1$, а это, согласно (9), при любом ϱ приводит к возникновению особого режима в окрестностях установившейся скорости.

Выполнив расчет для $\lambda = 0,3$, получаем:

$$-2,4m^3 \varrho^2 + [m^2 - 2,7m + 0,608] \varrho - 1 = 0. \quad (12)$$

Задавая различные значения m до $m = 0,5\lambda = 0,15$ определяем соответствующие значения ϱ , после чего можно построить кривую (рис. 3), раз-

деляющую область возможного особого режима II от области III, где особый режим исключен.

После разделения различных областей управления (рис. 3) синтез системы при разгоне выполняется следующим образом:

1. Для области I выше гиперболы $v\varphi = 0,5$ следует положить $u_2 = \lambda$, ниже — $u_2 = 1$. При достижении траекторией точки гиперболы $v\varphi = 0,5$ в дальнейшем u_2 меняется сообразно с (10).

2. В области III особый режим невозможен и следовательно подынтегральное выражение (6) меняет свой знак только один раз, не обращаясь в нуль ни на каком отрезке пути. При заданных m , ϱ и конечной скорости v_k , используя уравнение принципа максимума, всегда можно рассчитать координаты точек переключения (см. ниже) и осуществить синтез системы, приняв ниже линии переключения $u_2 = \lambda$ и выше — $u_2 = 1$.

3. В области II синтез системы осуществляется аналогично с областью III, с той разницей, что определенная часть линии переключения может лежать на гиперболе $v\varphi = 0,5$. Подставив в (10) $u_2 = \lambda$ и решив уравнение относительно φ , можно определить ту часть линии переключения, которая может лежать на гиперболе $v\varphi = 0,5$. На рис. 4 это сделано для $\lambda = 0,3$ и $m = 0$.

Рассмотрим вопрос нахождения линий переключения более подробно. Ограничимся случаем $m = 0$ и $v_k = 1 \div 2$. Будем решать поставленную задачу методом обращенного времени с помощью моделирования. Для этого введем новые переменные:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{4}; \\ y &= \frac{\varphi}{1,25}; \\ \tau &= 2(T - t), \end{aligned} \quad (13)$$

после чего, с учетом (3) и (11), будем иметь следующие машинные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (-0,1563 + 0,7813xy)y; \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{2\varrho}(y - 0,8u_2); \\ \frac{d\psi_1}{d\tau} &= -0,7813\psi_1 y^2; \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= \psi_1(0,5 - 5yx) + \psi_2 \frac{1}{2\varrho}. \end{aligned} \quad (14)$$

Программа моделирования, соответствующая (14) и (5), представлена на рис. 5. Задаваясь последовательно $v_k = 1; 1,5$ и 2 и непрерывно варьируя φ_k , можно легко получить оптимальные траектории системы. Следует однако иметь в виду, что для тех φ , при которых особый режим возможен, модели-

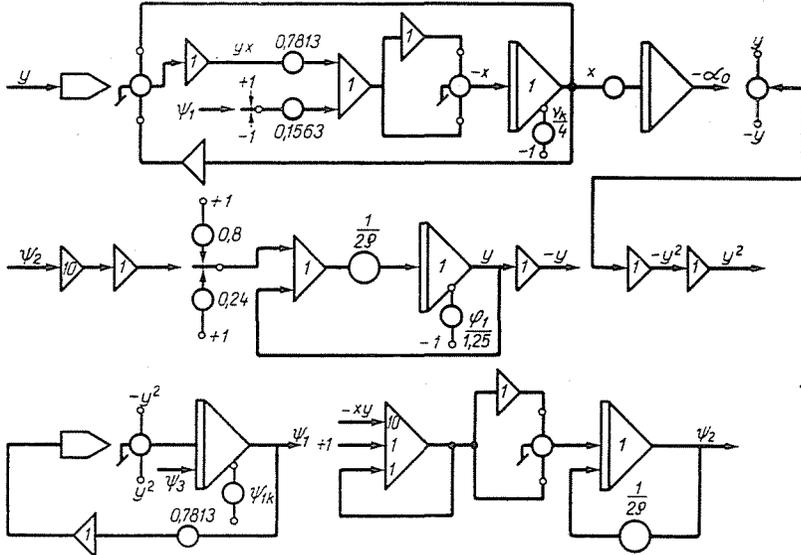


Рис. 5

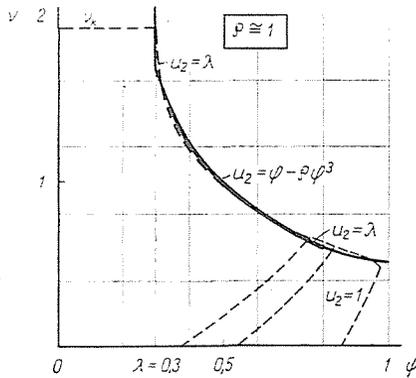


Рис. 6

рование методом обращенного времени дает одну из бесконечного числа возможных оптимальных траекторий. Это происходит потому, что отрезок линии переключения, лежащий по гиперболе $v\varphi = 0,5$, сам является участком оптимальной траектории для определенной области начальных условий. Чтобы получить все траектории системы, необходимо выполнить моделирование в два приема: сначала при $u_2 = \lambda$ для v_k большего, чем макси-

мальная скорость на участке особого режима, и затем при $u_2 = 1$ и $u_2 = \lambda$ для различных ν , лежащих на особом отрезке линии переключения. Вся оптимальная траектория получается составлением из оптимальных траекторий до особого участка, части самого участка и оптимальной траектории от особого участка (рис. 6).

Серьезные трудности возникают также при моделировании систем с большим $\nu_k (> 2)$ и малым ρ , так как при этом оптимальные траектории в точке ν_k проходят так близко ($\varphi_k \cong \lambda$), что их трудно определить моделированием, так как точность и стабильность аналоговой машины может оказаться недостаточной.

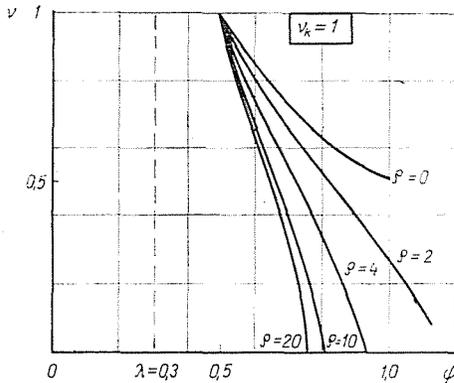


Рис. 7

По результатам моделирования для различных ρ и ν_k можно построить линии переключения, при этом легко показать, что линии переключения для различных постоянных времени оканчиваются в одной точке, лежащей на гиперболе $\nu\varphi = 0,5$ при соответствующей конечной скорости системы. Для иллюстрации на рис. 7 приведены линии переключения для $\nu_k = 1$.

Определим влияние ρ на увеличение времени разгона системы. Для этого с учетом полученных линий переключения рассчитаем оптимальное время разгона системы с $\nu_0 = 0$ для двух крайних наиболее вероятных начальных значений потока: $\varphi_0 = 0,5$ и $\varphi_0 = 1$.

Результаты моделирования для $\lambda = 0,3$, полученные в прямом времени, сведены в таблицы 1—2, где также рассчитано относительное увеличение времени разгона по отношению к случаю $\rho = 0$.

На основании таблиц 1—2 построены графики рис. 8—9, дающие представление об увеличении времени разгона вследствие влияния постоянной времени цепи возбуждения. При $\varphi_0 = 1$ время разгона системы сначала мало зависит от ρ (как отмечено выше до $\rho = 0,7$ вообще еще не зависит), но затем резко увеличивается, что особенно резко проявляется с увеличением конечной скорости системы. Это объясняется тем, что постоянная времени

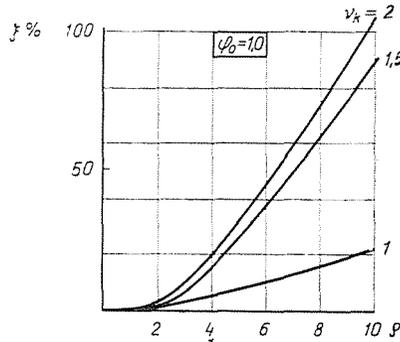


Рис. 8

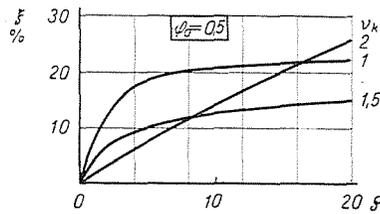


Рис. 9

Таблица № 1

v_k	φ_0	$q=0$		$q=2$		$q=4$		$q=5$		$q=6$		$q=7,5$		$q=10$	
		t_0	t	ξ	t	ξ									
1,0	1,0	2,19	2,22	1,0	2,32	5,45	2,36	7,85	2,44	11,3	2,53	15,4	2,68	21,8	
1,5	1,0	4,69	4,74	1,1	5,31	13,2	5,95	26,9	6,53	39,3	7,27	55,0	8,77	87,0	
2,0	1,0	8,25	0,18	2,2	1,53	18,6	2,63	31,9	3,80	46,1	5,98	72,6	8,38	103,0	

Таблица № 2

v_k	φ_0	$q=0$		$q=2$		$q=4$		$q=10$		$q=20$		$q=\infty$	
		t_0	t	ξ	t	ξ	t	ξ	t	ξ	t	ξ	
1,0	0,5	2,19	2,48	12,7	2,59	17,8	2,66	20,9	2,69	22,3	2,77	25,9	
1,5	0,5	4,69	4,98	6,2	5,15	9,8	5,29	12,8	5,38	14,7	5,54	18,1	
2,0	0,5	8,25	8,50	3,0	8,8	6,6	9,39	13,8	10,4	26,0			

$$\xi = \frac{t-t_0}{t_0} 100\%$$

цепи возбуждения оказывает решающее влияние на время разгона только при $v \geq 1$, так как в этой области уменьшение потока является непременным условием увеличения скорости системы.

При $\varphi_0 = 0,5$ время разгона возрастает с увеличением q более резко при малых q . Для $v_k = 2$ время разгона системы ограничено сверху временем разгона при $q = \infty$.

На основании графиков рис. 8—9 можно прийти к выводу, что желательно иметь $\rho \leq 1$: в этом случае время разгона системы увеличивается максимум на 20% при разгоне системы с $v_0 = 0$ до $v_k \leq 2$ и $\varphi_0 = 0,5 \div 1$. В противном случае становится определяющим время разгона с $\varphi_0 = 1$, которое уже при $\rho = 10$ и $v_k = 2$ увеличивается более чем вдвое по сравнению со случаем $\rho = 0$.

При выборе постоянной времени цепи возбуждения мы до сих пор исходили из времени разгона системы. Однако следует учитывать, что время торможения более зависит от величины постоянной времени цепи возбуждения, чем время разгона. Если считать, что после достижения заданной скорости поток двигателя увеличивается до максимального значения, обуславливаемого возможностью установившегося режима, то при $\rho = 2$

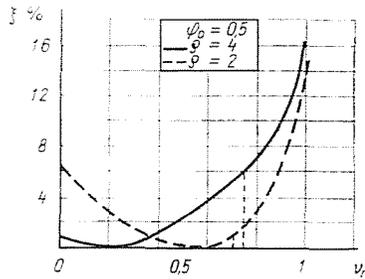


Рис. 10

время торможения увеличивается на 21% при $v_0 = 1,5$ и 75% при $v_0 = 2$ по отношению ко времени торможения с $\varphi = 1 = \text{const}$. Для $\rho = 4$ эти величины соответственно равны 26 и 100%. На основании этого можно заключить, что в тех системах, где важно и время торможения, следует выбирать в значительно меньшее, чем только по условиям разгона.

Для реализации синтеза системы на практике удобно пойти на некоторые упрощения. На рис. 10 приведены кривые увеличения времени разгона в функции скорости переключения для $v_k = 2$ и $\rho = 2$ и 4. На рисунке отмечены скорости переключения, соответствующие переключению n_2 в точке достижения гиперболы $v\varphi = 0,5$. Оказывается, что время разгона системы в определенной области мало зависит от места переключения. Согласно рис. 10 время разгона системы с $\varphi_0 = 0,5$ при переключении в точке достижения гиперболы увеличивается примерно на 1% для $\rho = 2$ и на 6% для $\rho = 4$, причем дополнительное моделирование показывает, что приведенные цифры мало зависят от φ_0 в пределах $\varphi_0 = 0,5 \div 1,0$. Поэтому для $\rho \leq 4$ можно пойти на универсальный синтез систем, справедливый для всех ρ и v_k , и принять за линию переключения гиперболу $v\varphi = 0,5$.

Для больших ρ удобнее и точнее производить синтез отдельно для определенного интервала ρ , так, например, для $\rho = 4 \div 10$ можно принять

за линию переключения ось абсцисс $v = 0$. Это значительно упрощает синтез системы и обеспечивает быстрое действие, близкое к оптимальному.

§ 3. Оптимальное управление по углу поворота

При управлении по положению вала электродвигателя порядок системы повышается до трех, в результате чего движение системы приходится рассматривать в трехмерном пространстве переменных α , v , φ . Для сопряженных функций, согласно (3), имеем:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{\int \sigma^2 dt} \left[-c_3 \int e^{-\int \sigma^2 dt} dt + c_1 \right]; \\ \psi_2 &= e^{\frac{1}{\sigma} t} \left[- \int (u_1 - 2v\varphi) \psi_1 e^{-\frac{1}{\sigma} t} dt + c_2 \right]; \\ \psi_3 &= c_3 \end{aligned} \quad (15)$$

На основании (15) можно сделать следующие выводы:

1. Функция ψ_1 переходит через нуль только один раз, следовательно число изменений знака u_1 , равно единице.

2. Для функции ψ_2 остаются в силе все полученные раньше выводы относительно отсутствия или возникновения особого режима. Если же отвлечься от особого режима, то наибольшее число переходов ψ_2 через нуль равно двум: первый нуль ψ_2 , как и при управлении по скорости, лежит ниже гиперболы $v\varphi = 0,5$, второй — выше гиперболы. Следовательно при наибольшем числе переключений u_2 принимает последовательно значения 1, λ и снова 1.

3. Оба перехода через нуль происходят до переключения u_1 . Это объясняется тем, что после переключения u_1 подынтегральное выражение второго уравнения (15) не изменяет своего знака, т. е. ψ_2 изменяется монотонно до $\psi_2 = 0$, что необходимо по условию трансверсальности (5).

Для осуществления синтеза системы следует найти уравнения поверхностей переключения: более простой для синтеза по u_1 и более сложной для синтеза по u_2 . Обычно для этого используются вычислительные машины в обратном времени с последующим нахождением приближенного уравнения поверхностей, например, по методу Пайка—Сильверберга [3]. Рассчитывать при этом на то, что уравнения поверхностей будут относительно простыми нельзя, ибо уравнение движения системы зависит от величины потока двигателя весьма сложно.

Именно поэтому целесообразно ограничиться рассмотрением движения системы при больших начальных рассогласованиях. Смысл данного ограничения состоит в том, что при больших рассогласованиях система достигает окрестностей установившейся скорости и поэтому можно наде-

яться на значительное упрощение синтеза системы в результате сближения фазовых траекторий системы.

Используя схему моделирования рис. 5 можно определить все фазовые траектории системы, перебирая различные пары c_3 и φ_k при постоянном

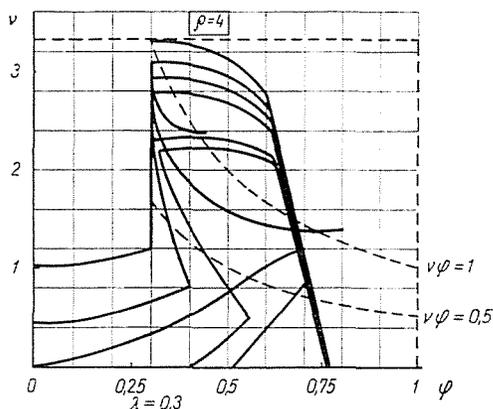


Рис. 11а

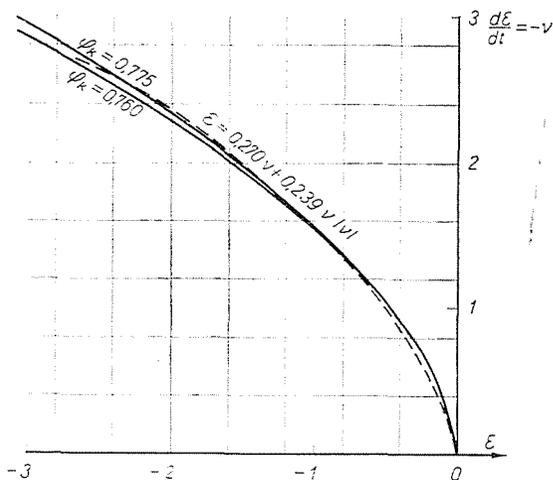


Рис. 11б

ψ_{1k} . При этом оказывается, что конечное значение потока для больших рас-
согласований почти постоянно. Для $\rho = 4$ результаты моделирования пред-
ставлены на рис. 11, откуда следует, что $\varphi_k \cong 0,76 \div 0,775$, причем при
других φ_k попасть в окрестность установившейся скорости вообще невозможно.

Другим следствием моделирования является примерное постоянство
величины изменения потока между переключением u_1 и u_2 (рис. 11а). Это

в свою очередь, означает, что время между переключением u_1 и u_2 почти постоянно. В случае $\varrho = 4$ имеем ($\varphi_1 = 0,30 \div 0,32$; $\varphi_2 = 0,76 \div 0,77$):

$$\Delta t = \varrho \ln \frac{1 - \varphi_1}{1 - \varphi_2} = 2,28 \div 2,37. \quad (16)$$

На рис. 12 представлены $\Delta t(\varrho)$ и $\varphi_k(\varrho)$, построенные по результатам моделирования для $\varrho = 2, 4, 7$ и 10 .

Покажем как можно произвести синтез оптимальных систем для больших рассогласований на примере системы с $\varrho = 4$.

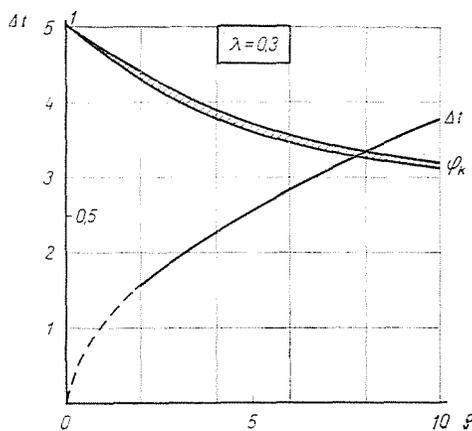


Рис. 12

Момент переключения u_1 находится по

$$\varepsilon - \varepsilon^* = 0,$$

где $\varepsilon = \alpha_3 - \alpha$ — ошибка системы (α_3 — задание),

$\varepsilon^*(\nu, \varphi)$ — угол поворота после переключения (уравнение линии переключения).

Однако зависимость ε^* от потока не слишком существенна (рис. 11/б), поэтому поверхность переключения для больших сигналов можно аппроксимировать выражением:

$$\varepsilon^* = b_1 \nu + b_2 \nu |\nu| = 0,270\nu + 0,239\nu|\nu|. \quad (17)$$

Согласно рис. 11б при линейно-параболической аппроксимации поверхности переключения по (17) обработка задания будет происходить с незначительным перерегулированием.

Хотя синтез системы и производится для больших рассогласований, все-таки желательно обеспечить, по крайней мере, грубо оптимальный

синтез и для небольших начальных рассогласований. В этом случае (рис. 11/б) следует ожидать возникновение скользящего режима, менее или более значительно затягивающего процесс в зависимости от значения потока. Процесс наиболее затягивается против оптимального при торможении с $\varphi = 1$. Расчеты показывают, что в этом случае при торможении с $v = 1$ до $v = 0$ время торможения увеличивается из-за скользящего режима примерно на 50% по сравнению с оптимальным.

Синтез по u_2 требует двух переключений. Первое переключение происходит с $u_2 = 1$ на $u_2 = \lambda$. В предыдущем параграфе было выяснено, что момент этого переключения в определенной области мало влияет на время ускорения системы и поэтому и в данном примере можно пойти на упрощение и принять $u_2 = \lambda$ для больших рассогласований. При отработке заданий с $v = 0$ это приближение не будет оказывать заметное влияние на время отработки (рис. 11/а).

Последующий переход на $u_2 = 1$ подготавливает начало торможения двигателя. Согласно моделированию не слишком значительное изменение момента этого переключения практически не влияет на время отработки задания, поэтому момент переключения согласно рис. 11 можно достаточно точно определить по уравнению:

$$|\varepsilon - \varepsilon^*| - K|v| \Delta t = 0, \quad (18)$$

где: Δt — время до переключения u_1 , определяемое по рис. 11.

K — коэффициент, учитывающий изменение скорости в период Δt .

В коэффициенте K удобно учесть также изменение ε^* за время Δt , особенно если принять во внимание, что вследствие малого изменения скорости за время Δt последнее изменяет момент переключения незначительно.

Подставляя для $q = 4$: $\Delta t = 2,3$; $K = 0,930$, имеем:

$$|\varepsilon - \varepsilon^*| - 2,16|v| = 0. \quad (18/a)$$

Введение абсолютных значений в (18) необходимо для правильной отработки заданий обоих знаков. Кроме этого, введение абсолютных значений позволяет осуществить синтез цепи возбуждения вообще только по (18), приняв:

$$\begin{aligned} u_2 &= \lambda, \text{ если } |\varepsilon - \varepsilon^*| - K\Delta t|v| > 0; \\ u_2 &= 1, \text{ если } |\varepsilon - \varepsilon^*| - K\Delta t|v| < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом случае при больших рассогласованиях автоматически соблюдается $u_2 = \lambda$. Некоторое улучшение режима происходит при отработке задания со значительной скоростью противоположного знака, так как в этом случае вначале по (18) можно получить $u_2 = 1$, затем $u_2 = \lambda$ и в конце снова $u_2 = 1$, что желательно и по условиям оптимального режима.

В случае небольших начальных рассогласований обработка задания в оптимальном режиме должна производиться только с $u_2 = 1$ (рис. 11/а). При синтезе по (19) это не осуществляется, однако вследствие малости задания переход на $u_2 = 1$ происходит уже при относительно малых скоростях, т. е. по потоку синтез, в первом приближении, можно считать удовлетворительным.

К достоинству синтеза по (19) следует также отнести тот факт, что при этом скользящий режим по u_2 исключается. Это объясняется тем, что выра-

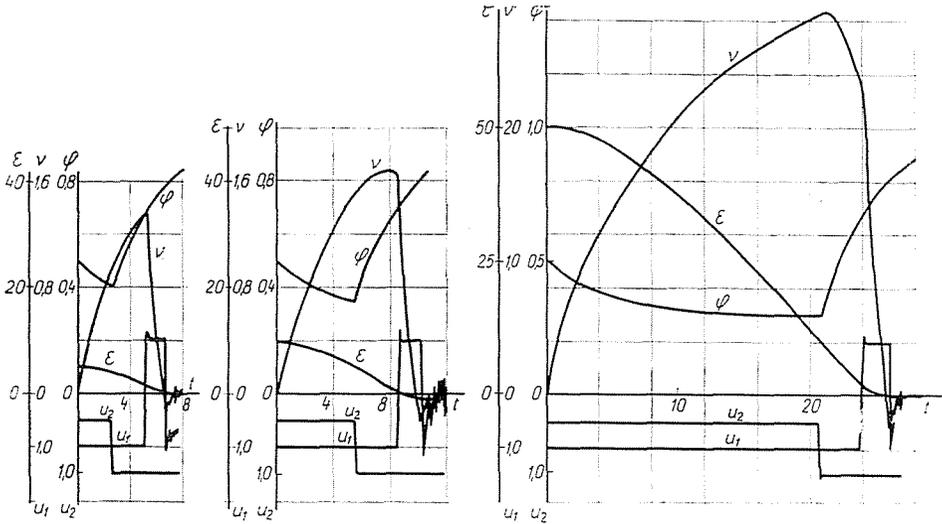


Рис. 13

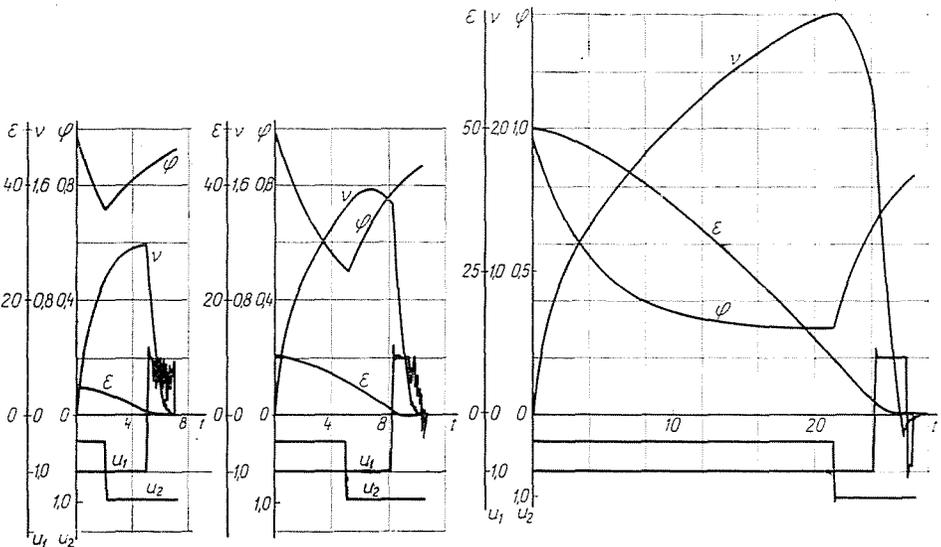


Рис. 14

жение (18) после перехода через нуль сохраняет свой знак вплоть до $v = 0$, т. е. до конца отработки задания.

Результаты проверки предложенного метода синтеза приведены на рис. 13—14.

Как видно из рисунков при пониженных начальных рассогласованиях возможен скользящий режим, вероятность которого тем больше, чем выше начальное значение потока. В то же время при $\varphi_0 = 0,5$ скользящий режим отсутствует, отработка задания происходит с незначительным перерегулированием, в результате чего вид переходного процесса получается весьма удовлетворительным, несмотря на то, что режим отработки при малых рассогласованиях, вообще говоря, не строго оптимален. Хороший вид переходного процесса в данном случае объясняется тем, что значение потока в момент переключения u_1 приблизительно равно значению потока по рис. 11/а для соответствующей скорости на тормозном участке.

Используя вышеописанный метод синтеза, можно исследовать влияние постоянной времени цепи возбуждения двигателя на время отработки системой заданий различных величин.

Для существенных постоянных времени переходный процесс отработки задания наиболее затягивается для максимального начального значения потока (рис. 13—14). Поэтому поставленную задачу достаточно решить для этого случая.

Относительное увеличение времени переходного процесса

$$\xi = \frac{\tau_e - \tau_0}{\tau_0} 100\%,$$

где: τ_e — время отработки задания при постоянной времени цепи возбуждения ϱ ,

τ_0 — время отработки задания при $\varrho = 0$,

в функции начального рассогласования ε_0 , очевидно, будет иметь максимум, соответствующий «средней» величине задания, когда система еще не успевает достичь установившейся скорости, но подходит достаточно близко к ней. Ввиду этого, в сущности, задача сводится к нахождению величин ξ_{\max} . Для этого зададимся $\varrho = 4, 7$ и 10 и последовательно для $\varepsilon_0 = 10 \div 80$ ($\Delta\varepsilon_0 = 10$) при помощи моделирования определим соответствующие времена отработки задания. Для синтеза системы пользуемся данными рис. 12 и следующими приближенными уравнениями для синтеза системы по напряжению главной цепи:

$$\varepsilon^* = 0,310v + 0,310v|v|; \quad K \Delta t = 2,9 (\varrho = 7);$$

$$\varepsilon^* = 0,207v + 0,400v|v|; \quad K \Delta t = 3,5 (\varrho = 10).$$

Некоторые примеры моделирования приведены на рис. 15–16, а результаты обработки полученных данных представлены на рис. 17–18. Приведенные на рис. 17 кривые для $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ получены аналитическим расчетом (см. приложение I).

Из рис. 18 следует, что наибольшее затягивание переходного процесса ξ_{\max} равно приблизительно 27,0%-ам, 18,5%-ам и 9,0%-ам для $\rho = 10$, 7 и 4, соответственно.

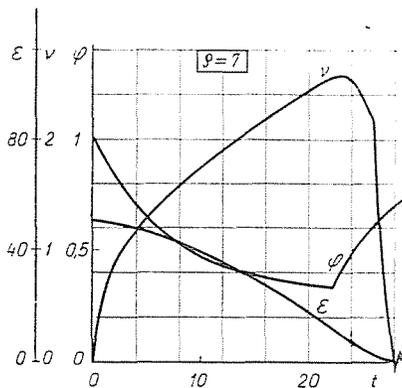


Рис. 15

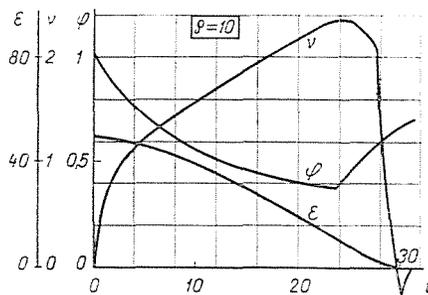


Рис. 16

На основании рис. 18 для $\lambda = 0,3$ всегда можно выбрать такое значение постоянной времени цепи возбуждения, чтобы время переходного процесса затягивалось лишь на допустимую величину. Так, например, если считать, по-прежнему, допустимой величиной $\xi_{\max} = 20\%$ -ам, то нужное значение постоянной времени приблизительно равно 7,5.

§ 4. Обсуждение результатов

Полученные выше результаты позволяют правильнее спроектировать систему управления электродвигателем с двумя параметрами управления, когда ограничения по току двигателя не возникают.¹

¹ См. приложение 2.

Учитывая влияние постоянной времени цепи возбуждения на время разгона и торможения, можно прийти к выводу, что при управлении по углу поворота минимальное желаемое значение постоянной времени лежит в пределах $\varrho = 7 \div 10$.

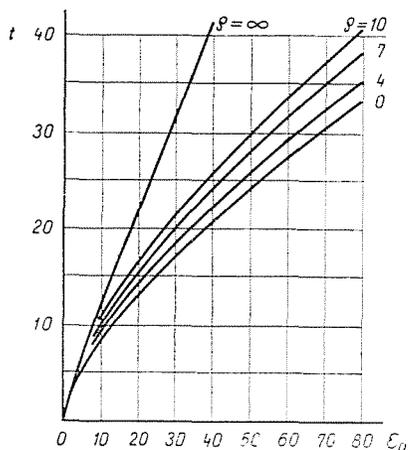


Рис. 17

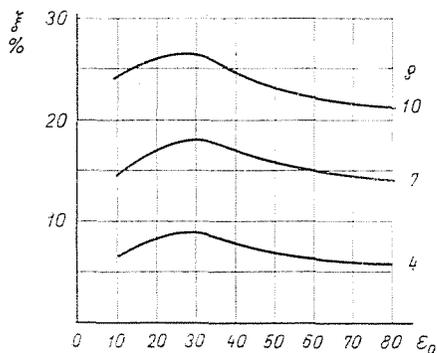


Рис. 18

Электродвигатели обычного исполнения до 10 квт с дополнительными сопротивлениями в якоре, ограничивающими величину тока двигателя приблизительно до двукратного, имеют электромеханические постоянные примерно $T_M = 0,05 \div 0,25$ сек. Постоянные времени цепи возбуждения этих двигателей соответственно равны: $T_B = 0,1 + 0,5$ сек [4], следовательно $\varrho = 2 \div 5$. Таким образом для обычных двигателей приемлемые для оптимального управления значения ϱ соблюдаются автоматически.

Двигатели с печатной обмоткой или с барабанным якорем [5—6] допускают значительную кратность тока, поэтому добавочных сопротивлений может вообще не потребоваться. В результате их электромеханические

постоянные малы и величина ϱ получается большой. Следовательно для лучшего использования достоинств управления по двум параметрам необходимо уменьшить величину ϱ . Проще всего это достигается введением обратной связи по току возбуждения двигателя. Так как при этом уравнение цепи возбуждения после приведения, т. е. с новым ϱ и прежним — но теперь только расчетным — u_2 , совпадает со вторым уравнением (1), то все полученные ранее выводы об оптимальном управлении справедливы и в этом случае.

Так как введение обратной связи по току возбуждения увеличивает мощность источника возбуждения, то коэффициент обратной связи должен быть выбран так, чтобы получить удовлетворительную величину ϱ и приемлемую величину мощности.

Полученные выше результаты справедливы для $\lambda = 0,3$, однако совершенно ясно, что и для любых других λ всегда можно добиться нужных результатов, используя те же методы синтеза и расчета, что и в приведенных примерах.

Выше уже отмечалось, что точность и стабильность аналоговых вычислительных машин не всегда достаточна для исследований. Этот недостаток особенно проявляется при вычислении погрешностей, ошибок, или, например, относительного увеличения времени отработки заданий из-за наличия постоянной времени цепи возбуждения. Мы смогли ограничиться аналоговой машиной только потому, что нас, в первую очередь, интересовали принципиальные вопросы, а также ввиду того, что получаемая точность расчетов (порядка 10—20%-ов для погрешностей) с практической точки зрения вполне устраивала нас. Однако при желании «отчеканить» результаты, использование цифровых вычислительных машин становится неизбежным.

Останавливаясь на достаточных условиях оптимального управления, предложенного в данной статье, следует отметить, что при управлении по скорости достаточность условий принципа максимума не вызывает сомнений: ведь при разгоне системы требуется только одно переключение управляющего параметра и две фазовые траектории для различного знака управляющего параметра пересекаются друг с другом только один раз.

Значительно сложнее обстоит дело в системе позиционного управления электродвигателем. Для того, чтобы быть абсолютно уверенным в корректности полученных выше результатов необходимо:

1. Показать, что принцип максимума обеспечивает для данной задачи все необходимые и достаточные условия оптимального управления;

2. Математически строго доказать, что при значительных начальных рассогласованиях конечное значение потока двигателя должно удовлетворять рис. 11. Нами этот результат был получен в ходе моделирования, но моделирование не является математическим доказательством.

Рассмотрение поднятых вопросов выходит за пределы данной работы.

Приложение 1

Время обработки задания при $q = \infty$ складывается из времени разгона ($\alpha_p =$ угол разгона):

$$t_p = \alpha_p + \nu$$

(после $t = 3 \div 4$ можно принять $\nu = 1$) и времени торможения

$$t_T = \nu - \alpha_T,$$

причем:

$$\alpha_3 = \alpha_p + \alpha_T.$$

Так как для существенных рассогласований $\nu = 1$, $\alpha_T = 0,207$; $t_T = 0,693$, то

$$t_p + t_T = \alpha_3 - 0,307 + 1 + 0,693 = \alpha_3 + 1,386.$$

Время обработки задания при $q = 0$ рассчитывается по участкам:

1. Ускорение до $\nu = 0,5$;
2. Ускорение по гиперболе $\nu\varphi = 0,5$ до $\nu = 1,67$;
3. Ускорение при $\varphi = 0,3 = \text{const}$ от $\nu = 1,67$ до ν_{\max} ;
4. Торможение с ν_{\max} ($\varphi = 1$).

Значение ν_{\max} проще всего находить подбором так, чтобы

$$\alpha_3 = \alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_{III} + \alpha_{IV},$$

тогда:

$$\Sigma t = t_I + t_{II} + t_{III} + t_{IV}.$$

Расчетные значения максимальной скорости и полного времени обработки приведены в нижеследующей таблице:

ε_0	10	20	30	40	50	60	70	80
ν_{\max}	1,900	2,374	2,650	2,840	2,980	3,067	3,130	3,179
Σt	8,45	13,05	16,92	20,56	24,09	27,50	30,60	33,62

Приложение 2

В процессе окончания работы по данной теме была получена статья [7], в которой рассмотрены и сходные вопросы. В основном результаты, полученные авторами статьи в отношении «пределной системы привода» совпадают с нашими результатами, особенно если принять $\lambda = -1$, как это сделано в статье.

Основное расхождение между нами состоит в том, что в статье предлагается производить первое переключение u_2 для любого ρ при достижении системой гиперболы $\nu\varphi = 0,5$, что, отчасти, объясняется значительным снижением нижней границы изменения u_2 . Если же нижняя граница $u_2 = 0,3$, то предложенный нами метод синтеза более прост, так как не требует определения точки пересечения траектории системы и гиперболы $\nu\varphi = 0,5$ и более точен, ибо u_2 уже вначале отработки принимает значение $u_2 = \lambda$, что необходимо для больших рассогласований и существенных ρ . Таким образом для выбора метода синтеза по u_2 решающее значение имеет сопоставление величин λ и ρ .

Отметим два утверждения авторов, которые по нашему мнению теоретически не верны:

1. Начальное значение потока принимается максимальным ($\varphi_0 = 1$).
2. Начальное значение u_2 берется максимальным ($u_2 = 1$).

Неверность этих утверждений ясна из данной работы. Во всяком случае эти положения не следуют из принципа максимума.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Халас, Ш., Некоторые вопросы оптимального управления электродвигателями, *Periodika Polytechnika, Electrical Engineering*, vol. 11, No 1—2, 1967
- [2] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Тамкредлидзе Р. В. Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
- [3] РИКЕ, Е. W., SILVERBERG, T. R., *Designing Mechanical Computers, Part I. Machine Design*, July, 1952.
- [4] Гейлер Л. Б., Электропривод в тяжелом машиностроении, Машгиз, 1958.
- [5] Казанский В. М., Основич Л. Д., Маломинерционные электродвигатели постоянного тока с печатной обмоткой на якоре, Изд. «Энергия», 1965.
- [6] BLAKE BOND, M., Meet a Brand-new Servomotor with Starting Performance, *Control Engineering*, 1966, No 5.
- [7] Чистов В. П., Матафанов П. П., Троян В. А., Оптимальное по быстродействию управление электроприводами постоянного тока, *Электричество*, 1967, № 5.
- [8] Бычков Ю. А., Смольников Л. П., К оптимальному по быстродействию управлению двигателем независимого возбуждения, с двумя управляющими воздействиями, *Известия ВУЗ-ов, Приборостроение*, № 1, 1966.

РЕЗЮМЕ

В статье с помощью принципа максимума исследован вопрос оптимального управления двигателем постоянного тока независимого возбуждения с управлением по напряжениям главной цепи и цепи возбуждения. Выявлены различные условия оптимального управления (полное или частичное наличие особого управления), определен вид фазовых траекторий системы. Как для позиционного управления двигателем, так и для управления по скорости предложены методы синтеза систем, обеспечивающие переходный процесс, близкий к оптимальному. Показано влияние величины постоянной времени цепи возбуждения на время переходных процессов, определены постоянные времени, при которых оптимальный процесс по времени мало отличается от соответствующего процесса при нулевой постоянной времени.