

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯМИ

Ш. ХАЛАС

(Поступило 18 ноября 1966 г.)

Кафедра Электрических машин. Представлено проф. И. Рац.

1. Постановка задачи

В последнее время уделяется много внимания вопросам оптимального управления электродвигателями [1], [2], [3], [4]. При этом критерии, по которым производится оптимализация, зависят от рода и технологических задач автоматической системы. Одним из распространенных критериев оптимальности является критерий минимума времени отработки задания, дающий наилучшее использование выбранного двигателя и наибольшее быстродействие автоматической системы.

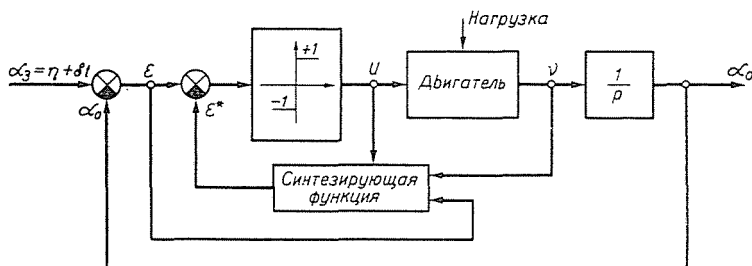


Рис. 1

Мы рассмотрим теорию и синтез оптимальных в смысле быстродействия следящих автоматических систем управления по углу поворота вала электродвигателя α_0 (рис. 1) при входном воздействии

$$\alpha_3 = \eta + \delta t,$$

где η и δ могут изменяться скачкообразно.

При этом примем следующие предположения:

1. Время электромагнитных переходных процессов сравнительно мало по сравнению со временем электромеханических переходных процессов и поэтому первыми можно пренебречь. Это условие обычно соблюдается для систем с серводвигателями постоянного тока, имеющими токоограничивающие сопротивления; для асинхронных серводвигателей с критическим скольжением близким или больше единицы, а также для двигателей с печатной обмоткой или с барабанным якорем.

2. Момент сопротивления электродвигателя зависит только от скорости двигателя, при этом эта зависимость может быть нелинейной, но однозначной и иметь разрыв при нулевой скорости.

3. Момент инерции системы постоянен.

При принятых предположениях динамический момент системы, являющийся разностью момента двигателя и момента сопротивления, становится явной и однозначной — в общем случае нелинейной — функцией скорости вращения двигателя и напряжения питания, вследствие чего, обычно, момент, ток и скорость вращения двигателя, которые практически могут быть достигнуты, являются допустимыми и поэтому параметры системы не ограничиваются.

Таким образом мы наложим ограничения только на управляющие сигналы. Такими при использовании двигателей постоянного тока являются напряжение главной цепи и напряжение возбуждения, а при применении двигателей переменного тока — напряжение питания и частота.

2. Уравнение движения и оптимальное управление

Уравнения движения двигателя в относительных единицах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \mu - \mu_c \\ \frac{d\alpha_0}{dt} &= v. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:

$v = \frac{\omega}{\omega_0}$ — скорость вращения двигателя, ω_0 — скорость холостого хода.

$\mu = \frac{M}{M_H}$ — момент двигателя, M_H — номинальный момент,

$\mu_c = \frac{M_c}{M_H}$ — момент сопротивления, приведенный к валу двигателя,

$t = \frac{t'}{T_n}$ — время,

$T = \frac{\Theta \omega_0}{M_H}$ — постоянная времени пуска,

$\alpha_0 = \frac{\alpha'}{\omega_0 T_n}$ — угол поворота.

Заменив в (1) угол поворота вала электродвигателя через рассогласование

$$\varepsilon = \alpha_s - \alpha_0 = \eta + \delta t - \alpha_0,$$

приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \mu - \mu_c \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -v + \delta.\end{aligned}\tag{2}$$

Воспользуемся методикой принципа максимума и составим гамильтонову функцию [5]:

$$H = \psi_1(\mu - \mu_c) + \psi_2(-v + \delta),\tag{3a}$$

где:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\psi_1 \frac{\partial(\mu - \mu_c)}{\partial v} + \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = 0.\end{aligned}\tag{3b}$$

Как известно, для получения наибольшего быстродействия (т. е. минимума времени отработки системой задания в виде $a_3 = \eta + \delta t$), необходимо обеспечить максимум функции H по управляющим параметрам, а так как управляющие параметры влияют только на момент двигателя, то для получения оптимальности в смысле быстродействия следует выполнить следующие необходимые условия:

$$\text{sign } \mu = \text{sign } \psi_1\tag{4}$$

$$\mu = \pm \mu_{\max}(v, u)\tag{5}$$

т. е. момент двигателя должен всегда принимать своё наибольшее по абсолютной величине значение и иметь знак, совпадающий со знаком ψ_1 .

Согласно (3b):

$$\psi_1 = e^{-\int \frac{\partial(\mu - \mu_c)}{\partial v} dt} [\psi_2 \int e^{\int \frac{\partial(\mu - \mu_c)}{\partial v} dt} dt + c]\tag{6}$$

где: $\psi_2 = \text{const}$, c — постоянная.

Из (6) следует, что ψ_1 меняет свой знак только один раз, таким образом и момент двигателя должен менять свой знак только один раз. Это означает, что оптимальное управление состоит из двух этапов: этапа разгона (сюда относится и установившийся режим) и этапа торможения.

При этом на первом этапе:

- а) при $\psi_1 > 0$: $\mu \geq 0$;
- б) при $\psi_1 < 0$: $\mu \leq 0$.

а на втором этапе:

а) при $\psi_1 > 0$: $\mu > 0$;

б) при $\psi_1 < 0$: $\mu < 0$.

Случай $\mu = 0$ соответствует работе двигателя со скоростью вращения, превышающей скорость холостого хода v_0 , (это возможно, например, при активном моменте сопротивления).

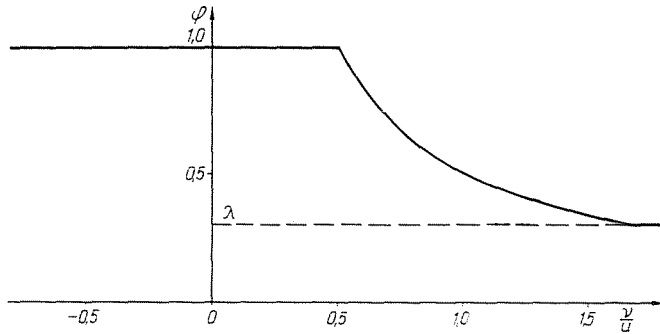


Рис. 2

Важные выводы следуют и из (5):

1. Момент двигателя постоянного тока равен:

$$\mu = i\varphi \quad (7)$$

где: $i = \frac{I}{I_n}$ — ток двигателя,

$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_n}$ — поток двигателя.

Так как:

$$i = \frac{u - \varphi v}{r},$$

где $u = \frac{U}{U_n}$ — напряжение двигателя,

$r = \frac{R I_n}{U_n}$ — сопротивление якорной цепи,

имеем:

$$\mu = \frac{1}{r} (u - v\varphi)\varphi. \quad (8)$$

Из (8) ясно, что момент двигателя имеет экстремум по потоку:

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{1}{r} (u - 2\varphi v) = 0, \quad (9)$$

откуда находим, что момент двигателя в случае $\frac{u}{v} > 0$ достигает своего наибольшего значения при:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{u}{v}, \quad (10)$$

что несколько в другом виде получено в [3].

Учитывая, что наибольшее значение потока равно $\varphi_{\max} = 1$, а минимально возможное по условиям разноса $\varphi_{\min} = \lambda$, для обеспечения максимума момента поток двигателя должен изменяться согласно рис. 2.

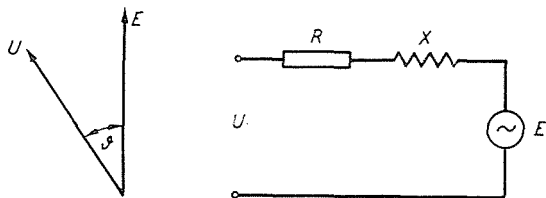


Рис. 3

Следует отметить, что закон изменения потока (10) и соответствующий ему закон изменения тока возбуждения двигателя остаются в силе и тогда, когда управление двигателем производится не напряжением двигателя, а посредством инерционных усилителей, на выход которых подключен двигатель.

2. Момент асинхронных двигателей пропорционален квадрату напряжения, т. е. максимума по напряжению не имеет, причем никакой асимметричный режим не может дать большего момента. Вывод [2] об оптимальном управлении при $v > v_0$ (а именно: наличие минимума момента при асимметричном режиме асинхронного двухфазного двигателя в этой области) теоретически не верен, ибо, как показано выше, в этой области должно быть $\mu = 0$.

3. В синхронных двигателях с неявновыраженными полюсами при синхронном пуске от частотного инвертора момент двигателя, пользуясь схемой замещения рис. 3, равен [6]:

$$M = \frac{3 U E}{\omega} \frac{R}{R^2 + X^2} \left(\cos \vartheta + \frac{X}{R} \sin \vartheta - \frac{E}{U} \right) \quad (11)$$

где: U — напряжение инвертора,

E — полюсное напряжение,

R — сопротивление цепи статора,

X — синхронное индуктивное сопротивление цепи статора,

ω — скорость вращения.

Находя экстремум момента по E и ϑ , имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{X}{R} = \frac{\omega L}{R} \\ E &= \frac{1}{2} U \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как полюсное напряжение по величине ограничено величиной $E_{\text{дон}}$, соответствующей допустимому току возбуждения, и учитывая, что нас интересует только максимум момента, в итоге имеем:

При пуске:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\omega L}{R}; \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}; \quad (13)$$

$$E = \frac{1}{2} U \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \quad \text{при } E < E_{\text{дон}} \text{ и}$$

$$E = E_{\text{дон}} \quad \text{при } \omega > \frac{R}{4} \sqrt{4E_{\text{дон}}^2 - 1}.$$

При торможении:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\omega L}{R}; \quad -\pi \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{2} \quad (14)$$

$$E = E_{\text{дон}}.$$

С учетом (13) и (14) момент двигателя становится функцией скорости, поэтому при соблюдении (13) и (14) становятся справедливыми уравнения (3) и (6), следовательно оптимальное управление в этом случае также состоит из двух этапов.

Таким образом, перечисленные двигатели не имеют максимума по напряжению главной цепи, т. к. большему напряжению всегда соответствует больший момент, причем знак момента и напряжения совпадают.* Следовательно, учитывая (4), имеем следующий закон изменения напряжения:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} u &= \operatorname{sign} \psi_1 \\ u &= \pm u_{\max}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

в результате чего напряжение главной цепи должно всегда принимать свое максимальное значение и при изменении знака ψ_1 скачкообразно менять

* В двигателях переменного тока положительный знак u соответствует прямому следованию фаз, а отрицательный — обратному. Случаем генераторного торможения (на втором этапе), где знак момента и напряжения не совпадает, пренебрегаем.

свой знак. При этом случаю $\mu < 0$ ($|v| > |v_0|$), очевидно, соответствует $u = 0$, что следует понимать как разрыв цепи двигателя.

3. Оптимальные траектории и достаточные условия оптимального управления

Согласно (2) уравнение оптимальных траекторий:

$$\varepsilon(v) = - \int_{v_1}^{v_2} \frac{-v + \delta}{\mu - \mu_c} dv. \tag{16}$$

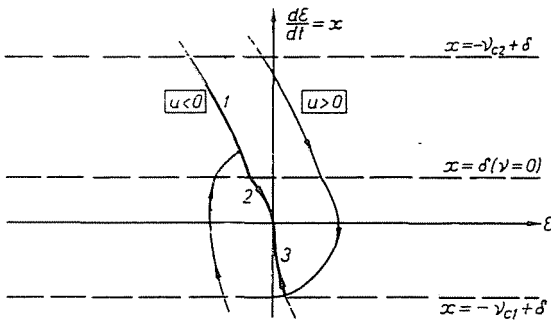


Рис. 4

Вводя:

$$x = \frac{d\varepsilon}{dt} = -v + \sigma \tag{17}$$

имеем:

$$\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x \cdot dx}{\mu(x, \delta) - \mu_c(x, \delta)}. \tag{18}$$

На рис. 4 приведены траектории (18) для $u > 0$ и $u < 0$, причем эти решения симметричны только при $\delta = 0$ и реактивном моменте сопротивления. Очевидно, что максимальная скорость, которая практически может быть достигнута, равна скорости установившегося режима v_c , причём $v_{c1} = -v_{c2}$ при симметричной характеристике момента двигателя и реактивном моменте сопротивления и $v_{c1} \neq v_{c2}$ при активном моменте сопротивления. Поэтому нас будет интересовать только та часть плоскости, при которой $-v_{c1} + \delta \leq x \leq -v_{c2} + \delta$, где v_{c1} соответствует $u > 0$, а $v_{c2} - u < 0$.

При реактивном моменте сопротивления траектории движения (рис. 4) имеют излом в точке $v = 0$ ($x = \delta$), т. к. характеристика динамического момента в этой точке имеет разрыв, равный $2\mu_c$, что надо учитывать при определении решений (18).

В начало координат системы (рис. 4) ведут только две траектории, которые обычно называются линиями переключения. Так как оптимальное управление требует только одного переключения, то оно очевидно, должно происходить при достижении системой этих траекторий. Таким образом переключение должно происходить (рис. 5) в точке:

$$\alpha_3 - \alpha_0 - \varepsilon^* = 0, \quad (19)$$

где:

$$\varepsilon^* = \int_x^0 \frac{x \cdot dx}{\mu(x, \delta) - \mu_c(x, \delta)}. \quad (20)$$

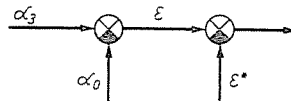


Рис. 5

Уравнения (19) и (20) позволяют произвести синтез системы, причем при $\delta = \text{const}$ линия переключения не зависит от задания, т. е. является стационарной.

Условия (4) и (5) являются необходимыми условиями существования оптимального управления. Однако дополнив эти условия еще условием

$$|\delta| < |v_c|, \quad (21)$$

где под v_c следует понимать наименьшую из возможных установившихся скоростей; условием непрерывности торможения:

$$\mu(-u_{\max}, v) < \mu_c(v) \text{ при } v > 0,$$

$$\mu(+u_{\max}, v) > \mu_c(v) \text{ при } v < 0;$$

а также условием пуска:

$$|\mu(0)| > \mu_c(0),$$

можно показать, что при этом мы будем иметь необходимые и достаточные условия существования оптимального управления.

4. Синтез оптимального управления при $\delta = 0$

Практически произвести синтез на основании (20) представляет большие трудности, так как уравнение линии переключения получается сложным даже при отсутствии скоростной составляющей в задающем сигнале. Так

в простом случае линейной системы при $\mu_c = 0$ на тормозном участке с $\nu > 0$:

$$\mu - \mu_c = -m(1 + \nu), \quad (22)$$

где m — угловой коэффициент характеристики динамического момента. в итоге, согласно (2), имеем ($x = -\nu$):

$$\varepsilon^* = -\frac{1}{m} [\nu - \ln(1 + \nu)]$$

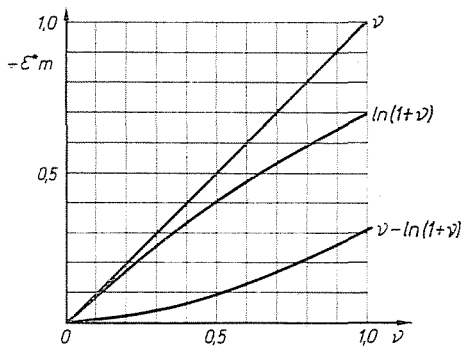


Рис. 6

т. е. уравнение линии переключения определяется в виде малой разности двух относительно больших функций: степенной и логарифмической (рис. 6). Поэтому на первый план выходят приближенные методы, хотя они и носят менее общий характер.

Произведем расчет приближения для тех случаев, когда кривая динамического момента с достаточной степенью точности описывается параболической зависимостью:

$$\mu - \mu_c = a_0 + a_1 \nu + a_2 \nu^2. \quad (23)$$

Следует подчеркнуть, что данное приближение к кривой динамического момента дает весьма удовлетворительные результаты для большинства практических случаев.

Для выполнения расчета преобразуем (23) к более удобному виду:

при $a_1^2 - 4 a_0 a_2 > 0$:

$$\mu - \mu_c = a_0 [1 - \alpha y - (1 - \alpha) y^2] \quad (24)$$

$$y = \frac{\nu}{\nu_{c1}}$$

$$\alpha = -\frac{u_1}{a_0} v_{c1} = 1 + \frac{v_{c1}}{v_{c2}} \quad (25)$$

$$v_{12} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0},$$

При $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$:

$$\mu - \mu_c = a_0 (y^2 + 2\beta y + 1) \quad (26)$$

$$y = v \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \quad (27)$$

$$\beta = \frac{a_1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{a_0 a_2}} \quad (-1 < \beta < 1),$$

С учетом (24) и (26) уравнение (20) принимает следующий вид:

$$\varepsilon^* = \frac{v_{c1}^2}{a_0} \int_y^0 \frac{y dy}{1 - \alpha y - (1 - \alpha)y^2} \quad (28)$$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{a_2} \int_y^0 \frac{y dy}{y^2 + 2\beta y + 1} \quad (29)$$

Мы будем искать приближение в виде:

$$\varepsilon^* \cong \frac{v_{c1}^2}{a_0} (b_1 y - b_2 y^2) \quad (30)$$

для (28) и

$$\varepsilon^* \cong \frac{1}{a_2} (b_1 y - b_2 y^2) \quad (31)$$

для (29), что соответствует приближению к подынтегральному выражению (28) и (29) в виде:

$$\frac{d\varepsilon^*}{dy} \cong -b_1 + 2b_2 y.$$

При этих условиях $0,25 \leq \alpha \leq 2$, причем, как легко показать, наибольшая ошибка приближения возникает на краях участка изменения α .

Расчет по методу наименьшей среднеквадратичной ошибки (см. приложение) дает:

для $a_1^2 - 4 a_0 a_2 > 0$ ($-\gamma \leq y \leq 0$):

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \neq 1 \\ \alpha \neq 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_1 = \frac{6}{\gamma(1-\alpha)} - \frac{4\gamma+6}{\gamma^2(2-\alpha)} \ln(1+\gamma) + \\ + \frac{6+4\gamma(\alpha-1)}{\gamma^2(1-\alpha)^2(2-\alpha)} \ln[1+\gamma(\alpha-1)] \\ b_2 = -\frac{6}{\gamma^2(1-\alpha)} + \frac{3(\gamma+2)}{\gamma^3(2-\alpha)} \ln(1+\gamma) + \\ + \frac{3}{\gamma^3} \frac{2+\gamma\alpha-\gamma}{(1-\alpha)^2(2-\alpha)} \ln[1+\gamma(\alpha-1)] \end{array} \quad (32)$$

$$\alpha = 2 \quad \begin{array}{l} b_1 = \frac{12+4\gamma}{\gamma^2} \ln(1+\gamma) - \frac{12+10\gamma}{\gamma(1+\gamma)} \\ b_2 = -\frac{12+3\gamma}{\gamma^3} \ln(1+\gamma) + \frac{12+9\gamma}{\gamma^2(1+\gamma)} \end{array}$$

$$\alpha = 1 \quad \begin{array}{l} b_1 = 1 + \frac{6}{\gamma} - \frac{6+4\gamma}{\gamma^2} \ln(1+\gamma) \\ b_2 = \left(\frac{3}{\gamma^2} + \frac{6}{\gamma^3} \right) \ln(1+\gamma) - \frac{6}{\gamma^2}. \end{array}$$

Для $a_1^2 - 4 a_0 a_2 < 0$ ($0 \leq y \leq \gamma$):

$$\begin{aligned} b_1 = & -\frac{6}{\gamma} + \left(\frac{6\beta}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma} \right) \ln(1+\gamma^2+2\beta\gamma) - \\ & - \frac{1}{\gamma^2\sqrt{1-\beta^2}} [4\beta\gamma + 12\beta^2 - 6] \operatorname{arctg} \frac{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\gamma}; \\ b_2 = & \frac{6}{\gamma^2} - \frac{12\beta+3\gamma}{2\gamma^3} \ln(1+\gamma^2+2\beta\gamma) + \\ & + \frac{3}{\gamma^3\sqrt{1-\beta^2}} [4\beta^2 + \gamma\beta - 2] \operatorname{arctg} \frac{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (33)$$

На рис. 7, 8, 9 приведены значения коэффициентов b_1 и b_2 . Расчеты показывают, что максимальная ошибка приближения при $\gamma = 1$ меньше 3,5%, а

при $\gamma = 2$, меньше 4,5% от пути торможения с максимальной скорости, что практически вполне приемлемо. Таким образом, в случае $\gamma < 1$ можно брать значения коэффициентов b_1 и b_2 для $\gamma = 1$, в случае $1 < \gamma \leq 2$ — для

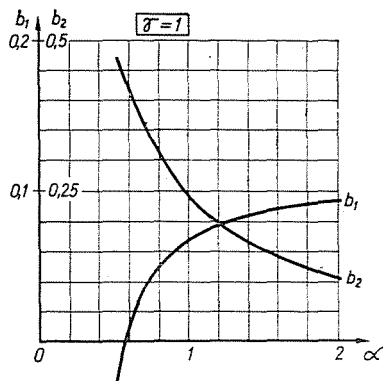


Рис. 7

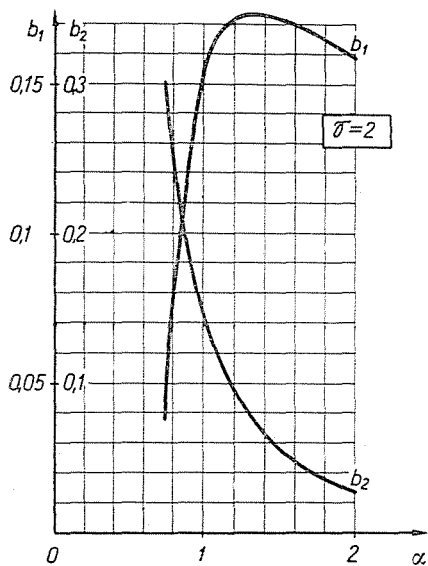


Рис. 8

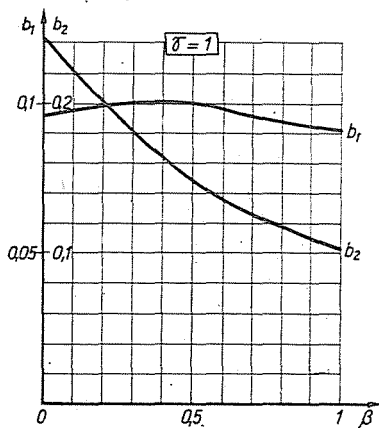


Рис. 9

$\gamma = 2$ и т. д. При желании можно уточнить приближение, введя в (30) и (31) кубичный член.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Двигатель независимого возбуждения.

Пусть $\mu_c = 0$, а момент двигателя равен:

$$\mu = 1,5(v_c - v).$$

В этом случае $v_c = \text{sign } u$, с учетом чего:

$$\mu = 1,5 (\text{sign } u - v).$$

Практически скорость меняется в пределах $-1 \leq v \leq 1$, т. е. $\gamma = \left| \frac{v_{\max}}{v_c} \right| = 1$.

Поэтому на основании рис. 6 для $\gamma = 1$ и $\alpha = 1$ — имеем:

$$b_1 = 0,0685$$

$$b_2 = 0,2383.$$

Учитывая (30), а также принимая во внимание, что на тормозном участке $\text{sign } u = \text{sign } v$, имеем следующее полное уравнение линии переключения:

$$\varepsilon^* = \frac{1}{1,5} (0,0685v + 0,2383v|v|) = 0,0457v + 0,1594v|v|.$$

2. То же, но $\mu_c = 0,2 v$ ($|v_c| = 0,883$).

Как и выше $\gamma = 1$ и $\alpha = 1$, поэтому:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \frac{0,883^2}{1,5} \left(0,0685 \frac{v}{0,883} + 0,2383 \frac{v|v|}{0,883^2} \right) = \\ &= 0,0405v + 0,1594v|v|. \end{aligned}$$

3. То же, но $\mu_c = 0,3 \text{ sign } v$ ($|v_c| = 1,2$; $\alpha_0 = 1,8$).

Для простоты пользуемся рис. 6 для $\gamma = 1$, хотя $\gamma < 1$:

$$\varepsilon^* = \frac{1,2^2}{1,8} \left(0,0685 \frac{v}{1,2} + 0,2383 \frac{v|v|}{1,2^2} \right) = 0,0457v + 0,1325v|v|.$$

4. Асинхронный двигатель ($\mu_c = 0$). К уравнению момента асинхронного двигателя

$$\mu = \frac{8 (\text{sign } u - v)}{v^2 - 2v \text{ sign } u + 5}$$

в области торможения приближаемся выражением:

$$\mu_m = (-0,43v^2 + 0,8417|v| + 1,595) \text{ sign } u.$$

В этом случае, на основании (25) $\alpha = 0,624$; $|v_c| = 1,184$, $\gamma \approx 1$, т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \frac{1,184^2}{1,595} \left(0,026 \frac{v}{1,184} + 0,3872 \frac{v|v|}{1,184^2} \right) = \\ &= 0,0153v + 0,2427v|v|. \end{aligned}$$

Расчет показывает, что расхождение между точным уравнением линии переключения и приближенным не превышает 1%.

5. Двигатель последовательного возбуждения,

$$\mu_c = 0,2 \operatorname{sign} v.$$

Приближенное выражение тормозного участка механической характеристики имеет вид:

$$\mu = (0,55v^2 + 1,15|v| + 1) \operatorname{sign} u.$$

По графически заданной характеристике момента двигателя определяем, что $v_c = 1,4$, следовательно на основании (27):

$$\begin{aligned} \gamma = y_{\max} &= 1,4 \sqrt{\frac{0,55}{1,2}} = 1,4 \cdot 0,667 = 0,95 \\ \beta &= 0,708. \end{aligned}$$

Воспользовавшись рис. 8 для $\gamma = 1$ и $\beta = 0,708$ на основании (31) имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \frac{1}{a_2} \left(0,0945 \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} v + 0,1266 \frac{a_2}{a_0} v |v| \right) = \\ &= \frac{1}{0,55} \left[0,0945 \sqrt{\frac{0,55}{1,2}} v + 0,1266 \frac{0,55}{1,2} v |v| \right] = 0,1162 v + 0,1055 v |v|. \end{aligned}$$

5. Синтез оптимального управления при $\delta \neq 0$

При наличии скоростной составляющей в задающем сигнале уравнение линии переключения (20) зависит от величины δ , поэтому линия переключения является не стационарной, что значительно усложняет синтез системы.

Произведем синтез системы для тех случаев, когда характеристику динамического момента можно считать линейной. В этом случае, подставив в (21)

$$v = \delta - x,$$

получим уравнение динамического момента

$$\mu - \mu_c = m(v_c + x - \delta),$$

которое заменой:

$$y = - \frac{x}{v_c - v} \tag{34}$$

приведем к виду:

$$\mu - \mu_c = m(v_c - \delta)(1 - y).$$

В результате, учитывая (20), имеем:

$$\varepsilon^* = \frac{v_c - \delta}{m} \int_y^0 \frac{y dy}{1 - y}. \quad (35)$$

Сравнивая (35) и (28), констатируем, что их подынтегральные выражения, а также пределы интегрирования, совпадают, таким образом все выводы.

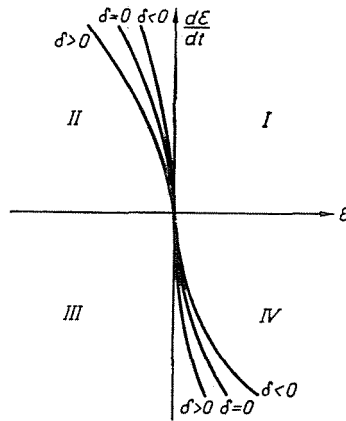


Рис. 10

которые были получены для $\alpha = 1$, справедливы и теперь. В результате, на основании (30) и (32), получаем приближенное уравнение линии переключения:

$$\varepsilon^* = \frac{v_c - \delta}{m} [b_1 y + b_2 y |y|], \quad (36)$$

которое подстановкой $x = -y (v_c - \delta)$ принимает следующий окончательный вид:

$$\varepsilon^* = \frac{1}{m} \left[b_1 x + b_2 \frac{x |x|}{|v_c - \delta|} \right]. \quad (37)$$

На основании (37) можно сделать следующие выводы

1) Уравнение линии переключения при наличии скоростной составляющей является не симметричной относительно начала координат (рис. 4), так как во втором члене уравнения (37) величина $|v_c - \delta|$ зависит от полярности питающего напряжения.

2) Чем больше δ , тем ближе придвигается линия переключения к оси ординат в четвёртом квадранте и дальше отодвигается от оси ординат во втором квадранте (рис. 10).

Следует отметить, что вышеприведенные выводы противоречат [2]. Однако линии переключения все-таки обладают определенной симметрией относительно начала координат, а именно при реактивном моменте сопротивления линия переключения во втором квадранте для $-\delta$ и линия переключения в четвертом квадранте для $+\delta$ симметричны друг другу.

Пример:

1. Двигатель независимого возбуждения, $\mu = 1,5$ ($\text{sign } u = v$); $\mu_c = 0$. Пусть $|\delta_{\max}| = 0,33$, тогда

$$\gamma_{\max} = \left| \frac{v_{\max} - \delta_{\max}}{v_c - \delta_{\max}} \right| = \left| \frac{-1 - 0,33}{1 - 0,33} \right| = 2.$$

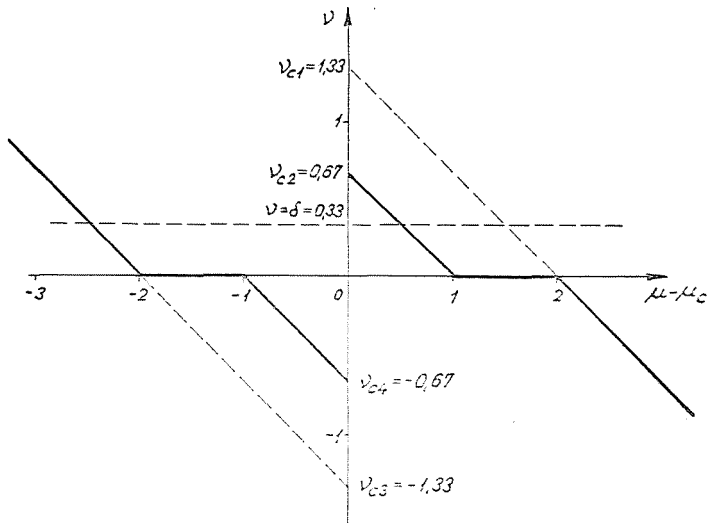


Рис. 11

Так как на тормозном участке $\text{sign } x = \text{sign } u$, то на основании рис. 7, учитывая, что $v_c = \text{sign } u = \text{sign } x$, имеем следующее окончательное уравнение линии переключения:

$$\varepsilon^* = -\frac{1}{1,5} \left(0,1542x + \frac{0,1479x|x|}{(\text{sign } x - \delta)} \right) = -0,103x - 0,0985 \frac{x|x|}{(\text{sign } x - \delta)}$$

2. То же, но $\mu_c = 0,5 \text{ sign } v$, $\delta_{\max} = 0,33$.

Можно убедиться, что в этом случае $\gamma_{\max} = 1$. Следовательно, уравнение линии переключения для различных участков (рис. 4, 11) при $\delta > 0$, будет следующее:

$$\delta \leq x \leq -v_{c4} + \delta$$

$$\varepsilon_1^* = - \frac{+v_{c1} - \delta}{m} \left(b_0' + 0,0685 \frac{x}{v_{c1} - \delta} + 0,2383 \frac{x|x|}{(v_{c1} - \delta)^2} \right) =$$

$$= - b_0 - 0,0457x - 0,1594 \frac{x|x|}{|1,33 - \delta|}$$

$$0 \leq x \leq \delta.$$

$$\varepsilon_2^* = - 0,0457x - 0,1594 \frac{x|x|}{(0,67 - \delta)}$$

$$- v_{c2} + \delta \leq x \leq 0$$

$$\varepsilon_3^* = - 0,0457x - 0,1594 \frac{x|x|}{|-1,33 - \delta|}.$$

Здесь b_0 определяется из

$$\varepsilon_2^*(\delta) - \varepsilon_1^*(\delta) = 0.$$

Синтез системы по вышеприведенным уравнениям все еще очень сложен, особенно, если учесть, что при $\delta < 0$ уравнения первого и третьего участка меняются местами. Поэтому можно пойти еще на одно приближение и пренебречь наличием второго участка, приняв $b_0 = 0$ и распространив первый участок на $0 \leq x \leq -v_{c4} + \delta$. В этом случае при отработке задания по участкам 1—2 будет перерегулирование b_0 , максимальное значение которого получается при $\delta = \delta_{\max}$:

$$b_0 = 0,1594x^2 \left(\frac{1}{0,67 - 0,33} - \frac{1}{1,33 - 0,33} \right) = 0,3188x^2.$$

Подставляя $|x_{\max}| = 0,33$, имеем:

$$b_0 = 0,3188 \cdot 0,33^2 = 0,0347,$$

что составляет около 15% от всего тормозного пути. Несколько улучшает приближение тот факт, что вероятность отработки задания по участкам 1—2 меньше, чем по участку 3, где задание обрабатывается точнее.

6. Заключение

Все приведенные примеры были проверены моделированием на аналоговой вычислительной машине. Некоторые результаты моделирования представлены на рис. 12, 13, 14.*

Перерегулирование практически было только при $\gamma > 1$, а перерегулирование по скорости только в некоторых случаях достигало несколько процентов. Скользящий режим возникал редко и только в окрестности начала координат.

* В моделировании принял участие сотрудник Исследовательского института Автоматики А. Н. Венгрии Миклош Дабаши.

Таким образом, полученные результаты подтвердили правильность теоретического анализа и показали, что точность изложенного приближенного метода синтеза достаточна для практики.

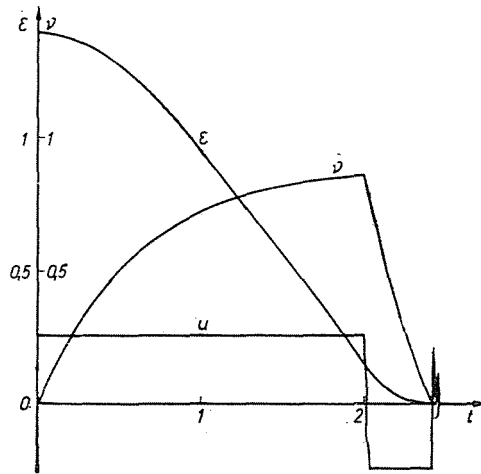


Рис. 12 Двигатель независимого возбуждения, $\mu = 1,5$ ($\text{sign } u - \nu$); $\mu_c = 0,2 \nu$

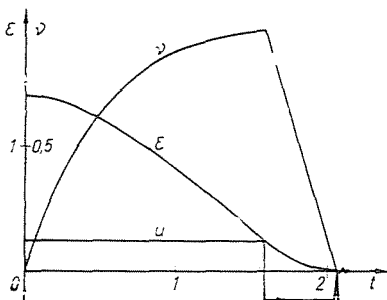


Рис. 13 Асинхронный двигатель,
 $\mu = \frac{8(\text{sign } u - \nu)}{\nu^2 - 2\nu \text{sign } u + 5}$; $\mu_c = 0$

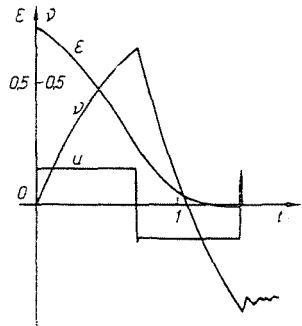


Рис. 14 Двигатель независимого возбуждения,
 $\mu = 1,5$ ($\text{sign } u - \nu$), $\mu_c = 0$, $\delta = -0,33$.

Приложение

Пусть имеется $f(z)$, и мы ищем в области $z_1 \leq z \leq 0$ наилучшую в смысле среднеквадратичной ошибки аппроксимирующую функцию в виде $\varphi(z) = c_1 + c_2 z$. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \int_{z_1}^0 [f(z) - c_1 - c_2 z]^2 dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \int_{z_1}^0 [f(z) - c_1 - c_2 z]^2 dz = 0,$$

откуда, беря производные под знаком интеграла и решая совместно оба уравнения, получаем:

$$c_1 = -\frac{4}{z_1} \int_{z_1}^0 f(z) dz + \frac{6}{z_1^2} \int_{z_1}^0 z f(z) dz$$

$$c_2 = \frac{6}{z_1^2} \int_{z_1}^0 f(z) dz - \frac{12}{z_1^3} \int_{z_1}^0 z f(z) dz.$$

Легко показать, что значение интегралов от $f(z)$ и $\varphi(z)$ на краях области приближения совпадают.

Резюме

В статье рассматривается теория оптимального в смысле быстродействия управления следящими системами по положению вала электродвигателя. На основании принципа максимума для динамического момента системы, зависящего только от скорости, доказывается, что оптимальное управление в этом случае состоит из двух участков, на границах которого момент двигателя скачкообразно меняет свое значение, а также меняет свой знак.

Показано, что траектории движения системы в фазовой плоскости ошибки и ее производной симметричны только при реактивном моменте сопротивления и отсутствии скоростной составляющей в задающем сигнале.

В статье также излагается приближенный метод синтеза системы.

Проверка теоретических выводов и метода синтеза производилась моделированием на аналоговой вычислительной машине.

Литература

1. Лернер, А. Я.: Принципы построения быстродействующих следящих систем и регуляторов. Госэнергоиздат, 1961.
2. Васильев, А. И., Анисимов, А. С.: Оптимальные процессы в микроэлектроприводах. Издательство Энергия, 1966.
3. Бор-Раменский, А. Е., Сун Цзянь: Оптимальный следящий привод с двумя параметрами управления. Автоматика и телемеханика, № 2, 1961.
4. Котченко, Ф. Ф., Смольников, Л. П.: Оптимальное управление автоматической системой при нелинейной механической характеристике исполнительного двигателя. Автоматика и телемеханика, № 11, 1965.
5. Потрягин, Л. С. и др.: Математическая теория оптимальных процессов. Госиздат, 1961.
6. ВЕНЕДИКТ, О.: Villamos hajtások, II/1, Egyetemi jegyzet, Budapest, 1963.
7. FLÜGGE-LUTZ, I.: Discontinuous Automatic Control. Princeton, 1953.

Шандор Халас, Будапешт XI., Эгри Й. у. 18, Венгрия.

Budapest XI., Egrý József u. 18.