METHODEN DER BERECHNUNG DES STATIONÄREN ZUSTANDES LINEARER NETZE

Von

A. MAGOS

Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 19. Januar 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. K. SIMONYI

Dieser Artikel legt zwei neue Verfahren zur Bestimmung der geschlossenen Form der den stationären Zustand eines periodisch angeregten, invarianten, passiven Netzes beschreibenden Zeitfunktion vor. Eines der Verfahren verwendet den Begriff der Gewichtsfunktion, das andere ist eine Version der Anwendung der Laplace-Transformation. Zum Zweck des Vergleiches sollen auch die Methoden zusammengefaßt werden, die die Fachliteratur empfiehlt. Die Untersuchungen erstrecken sich nur auf verlustreiche Netze, weil sonst Funktionen, die die Änderungen der einzelnen Größen bei unendlich großen Werten der Zeit asymptotisch beschreiben, nicht unbedingt beschränkt und periodisch sind.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems

Man löst das Problem am unmittelbarsten, wenn man unter den partikulären Lösungen des das Netz beschreibenden Differentialgleichungssystems jene sucht, die eine periodische Funktion der Zeit darstellt. Bei der Berechnung der in der allgemeinen Lösung auftretenden unbestimmten Koeffizienten wird der Umstand ausgenützt, daß sich die Spannung der Kondensatoren und der Strom der Induktivitäten bei beschränkter Erregung nur stätig ändern können. Deshalb wird man die Differentialgleichungen zweckmäßig so ansetzen, daß nur diese Größen als unbekannte Funktionen vorkommen. Wir stellen die allgemeine Lösung für eine Periode her. Da die genannten Veränderlichen auch an den Sprungstellen der Erregung stetig sind und ihre Werte am Anfang und am Ende der Periode infolge der Periodizität gleich sind, können wir die gleiche Zahl unabhängiger linearer Gleichungen über die unbestimmten Koeffizienten aufschreiben.

Lösung mit Hilfe der Gewichtsfunktion

Bekanntlich können die Antworten auf beliebige Erregungen anhand der bekannten Gewichtsfunktion ausgerechnet werden, doch ist die Gewichtsfunktion für die Lösung unserer Aufgabe unmittelbar wenig geeignet.

Nach dem Gewichtsfunktionssatz schreibt sich die gesuchte Funktion $i(t)$ zu

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau\,,$$

worin $g(t)$ die Gewichtsfunktion und $u(t)$ die Erregungsfunktion ist. Mit Rücksicht auf die Periodizität von $u(t)$ (die Periodenzeit wird mit T bezeichnet) kann das obige Integral in die Form

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} u(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{T} u(t-\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT+\tau)\, d\tau$$

gebracht werden. Es sei eine Funktion $f(t, T)$ im Intervall $(0, T)$ mit

$$f(t, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t+nT) \qquad (0 \leq t < T) \tag{1}$$

definiert. Später werden wir auf die Frage der Konvergenz der rechts stehenden Reihe noch zurückkehren. Im Falle eines kausalen Systems ist für die negativen Werte von t $g(t) = 0$. Deshalb kann 0 statt $-\infty$ als untere Grenze des Summierens stehen. Mit der obigen Bezeichnung kann

$$i(t) = \int_{0}^{T} u(t-\tau) f(\tau, T)\, d\tau \tag{2}$$

geschrieben werden. Es sei angenommen, daß die Erregung aus einer Reihe von Diracschen-Impulsen besteht, die sich seit unendlich großer negativer Zeit in gleichen Zeitabständen wiederholen; dann ist

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\,.$$

Aus der Berechnung des Integrals (2) ergibt sich, daß

$$i(t) = f(t, T)\,, \quad \text{wenn} \quad 0 \leq t < T,$$

und wegen der Periodizität ist $i(t+T) = i(t)$. Demnach ist die Funktion $f(t)$, im Intervall $(0, T)$ mit der den stationären Zustand beschreibenden Funktion identisch, wenn die Erregung aus der obigen Reihe von Diracschen-Impulsen besteht. Hieraus geht ferner hervor, daß es zweckmäßig ist, die Funktion $f(t, T)$ außerhalb des Intervalls $(0, T)$ so zu definieren, daß sie periodisch sei, daß also für alle Werte von t

$$f(t+T, T) = f(t, T) \tag{3}$$

gelte. Da die so definierte Funktion $f(t, T)$ die Antwort auf die obige periodische Impulsreihe gibt, benennen wir sie periodische Gewichtsfunktion. Mit einer kleinen mathematischen Umgestaltung nimmt (2) die Form:

$$i(t) = \int_0^T u(\tau) f(t-\tau, T)\, d\tau \tag{4}$$

an. Zu diesem Ergebnis hätte auch der folgende Gedankengang geführt. Approximiert man die Erregungsfunktion mit einer Stufenfunktion und faßt man sie als die Summe verschobener, periodischer Impulsreihen auf, dann schreibt sich die entsprechende Antwort auf die dem Zeitpunkt τ_k $(0 \leq \tau_k < T)$ zugehörige Impulsreihe annäherungsweise zu

$$i_k(t) \approx u(\tau_k)\, \Delta\tau\, f(t-\tau_k, T),$$

worin $\Delta\tau$ die Breite der Impulse bezeichnet. Die volle Lösung bekommt man als die Summe dieser Antworten; wenn $\Delta\tau \to 0$, geht die Summation in die Integration über und führt zur Formel (4). Besteht dagegen die Erregung aus einer periodischen Impulsreihe und berücksichtigt man, daß die zu dieser Erregung gehörende Lösung, d.h. die periodische Gewichtsfunktion, als die Summe der auf die Diracschen-Impulse gegebenen Antworten aufgefaßt werden kann, gelangt man zur Formel (1).

Da wir uns nur mit verlustreichen, passiven Netzen beschäftigen, gilt

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0.$$

Hieraus folgt, daß die periodische Gewichtsfunktion bei Erweiterung der Periodenzeit über alle Grenzen hinaus in die Gewichtsfunktion übergeht, daß also

$$\lim_{T\to\infty} f(t, T) = g(t) \tag{5}$$

wird.

Zur Berechnung der Summe in der Formel (1) sei bemerkt, daß bei verlustreichen Netzen in der Gewichtsfunktion die folgenden drei Funktionstypen vorkommen:

$$\delta(t), \qquad t^k e^{-\alpha t}, \qquad t^k e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi),$$

worin k eine nichtnegative ganze Zahl und α positiv ist. Für die Funktion $\delta(t)$ kann die Formel (1) ohne Schwierigkeiten angewendet werden. Man summiert von $n = 0$ und erhält für die nichtnegativen Werte von t

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t + nT) = \delta(t). \tag{6}$$

Auf Grund des Integralkriteriums von Cauchy leuchtet es ohne weiteres ein, daß die Anwendung der Formel (1) bei den beiden anderen Funktionen zu konvergenten Reihen führt. Im Bewußtsein der Konvergenz läßt sich die Richtigkeit der folgenden Zusammenhänge leicht beweisen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t + nT)^k e^{-\alpha(t+nT)} = (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t + nT)^k e^{-\alpha(t+nT)} \cos [\omega(t + nT) + \varphi] =$$
$$= (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{e^{-\alpha t} \cos \left(\omega t + \varphi + \arctan \dfrac{e^{-\alpha T} \sin \omega T}{1 - e^{-\alpha T} \cos \omega T}\right)}{\sqrt{1 + e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T} \cos \omega T}} . \tag{8}$$

Mit Hilfe der obigen Formeln läßt sich die periodische Gewichtsfunktion zu jeder beliebigen Gewichtsfunktion unschwer berechnen. In der Praxis kommt der Fall $k = 0$ am häufigsten vor; bei diesem Fall bleibt die Differentiation nach α weg.

Ein einfacher Zusammenhang kann nicht nur zwischen den Funktionen $f(t, T)$ und $g(t)$, sondern auch zwischen der Funktion $f(t, T)$ und der Übertragungsfunktion $G(j\,\omega)$ hergestellt werden. Es läßt sich beweisen, daß die Fourierreihe der Funktion $f(t, T)$ die Form

$$f(t, T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(jk \frac{2\pi}{T}\right) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \tag{9}$$

hat. Die Übertragungsfunktion $G(j\,\omega)$ hingegen kann durch die periodische Gewichtsfunktion wie folgt ausgedrückt werden:

$$G(j\omega) = \int_0^{2\pi/\omega} f\left(t, \frac{2\pi}{\omega}\right) e^{-j\omega t}\, dt . \tag{10}$$

Die periodische Gewichtsfunktion kann man auch durch Messung bestimmen. Dann ist es möglich, aus der so erhaltenen Kurve das Integral (2) oder (4) nach einer Annäherungsmethode zu berechnen.

Es sei bemerkt, daß man von der Übergangsfunktion ausgehend für die den stationären Zustand beschreibende Funktion keine so einfache Formeln erhält, wie im Falle der Gewichtsfunktion. Das erklärt sich hauptsächlich daraus, daß die Übergangsfunktion im allgemeinen nicht gegen Null strebt, wenn die Zeit über alle Grenzen wächst.

Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation

Um die Aufgabe durch die Laplace-Transformation lösen zu können, muß die Bildfunktion einer zum Zeitpunkt $t = 0$ eintretenden Funktion bestimmt werden. Wie bekannt, schreibt man hierzu die Funktion zweckmäßig in folgender Form auf:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_T(t - nT), \quad \text{worin} \quad u_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad t < 0 \quad \text{oder} \quad t \geq T \text{ ist,} \\ u(t), & \text{wenn} \quad 0 \leq t < T \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Bildfunktion schreibt sich nach dem Verschiebungssatz zu

$$\mathscr{L} u(t) = U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} U_T(s) = \frac{U_T(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \text{worin} \quad U_T(s) = \mathscr{L} u_T(t) \text{ ist.} \tag{11}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktion $U(s)$ auf der ganzen komplexen Zahlenebene — mit Ausnahme des unendlich weiten Punktes — analytisch ist. Da $u(t) = 0$, wenn $t > T$ ist, kann das die Bildfunktion definierende uneigentliche Integral in der Form eines Integrals mit endlicher Grenze aufgeschrieben werden, woraus folgt, daß $U(s)$ für alle endlichen Werte von s endlich und differenzierbar ist.

Da hier nur der stationäre Zustand untersucht wird, den die Anfangswerte nicht beeinflussen, sei im weiteren angenommen, daß das Netz im Augenblick der Einschaltung der periodischen Erregung ohne Energie ist. Die gesuchte Zeitfunktion wird aus zwei Teilen bestehen, u. zw. aus der den stationären Zustand beschreibenden Funktion und aus der Übergangskomponente der Lösung, d. h. sie konvergiert gegen Null im Falle eines verlustreichen Netzes, wenn t über alle Grenzen hinaus wächst. Wird die entsprechende Übertragungsfunktion als Quotient zweier Polynome, d. h. in der Form $G(s) = M(s)/N(s)$ angegeben, dann kann die Bildfunktion der gesuchten Größe aufgeschrieben und sogleich in die Summe zweier Glieder zerlegt werden:

$$I(s) = \frac{U_T(s)}{1 - e^{-sT}} \, \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{I_T(s)}{1 - e^{-sT}} + \frac{Q(s)}{N(s)} \, . \tag{12}$$

Hier bezeichnet $U_T(s)$ die Bildfunktion der aus der Erregungsfunktion konstruierten Funktion $u_T(t)$. In der Zerlegung bildet das erste Glied den periodischen Teil, deshalb muß es dem $\mathscr{L}^{-1} I_T(s) = i_T(t) = 0$ genügen, wenn $t > T$ ist. Das zweite Glied entspricht der Übergangskomponente, $Q(s)$ ist somit notwendigerweise ein Polynom niedrigeren Grades als $N(s)$, d.h. es gilt $Q(s) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i s^i$, wenn n den Grad von $N(s)$ bezeichnet. Die Literatur empfiehlt zwei Methoden zur Bestimmung der unbekannten Funktionen $I_T(s)$ und $i_T(t)$.

Nach der einen werden zuerst die Koeffizienten A_i des Poylnoms $Q(s)$ berechnet. Hierzu wird $I_T(s)$ aus der obigen Gleichung ausgedrückt, worauf man $I_T(s)$ mit Hilfe des Entwicklungssatzes zurücktransformiert. Hierbei braucht man sich nur um die Nullstellen von $N(s)$ zu kümmern, nicht aber um die des Nenners von $U_T(s)$, weil sein Zähler auch bei diesen s Werten gleich Null ist. Die Originalfunktion besteht aus der gleichen Zahl von Exponentialfunktionen wie der Grad von $N(s)$. Im Bereich $t > T$ ist $i_T(t) = 0$, die Koeffizienten all dieser Exponentialfunktionen müssen daher gleich Null sein. Die Zahl der unabhängigen linearen Gleichungen, die diese Bedingung liefert, ist die gleiche wie die Zahl der unbekannten Koeffizienten. Sie können somit bestimmt werden, und danach läßt sich auch $I_T(s)$ ausdrücken.

Die andere Methode geht davon aus, daß beim Zurücktransformieren nur die Substitutionswerte des Polynoms $Q(s)$ an den Nullstellen von $N(s)$ und beim Vorliegen mehrfacher Wurzeln die Substitutionswerte der Ableitungen von $Q(s)$ benötigt werden. Die Berechnung dieser Substitutionswerte ist die gleiche wie die der Koeffizienten des Polynoms $Q(s)$, d. h. $I_T(s)$ wird im Bereich $t > T$ zurücktransformiert, so daß konstatiert werden kann, unter welchen Bedingungen die Originalfunktion hier gleich Null ist. Hat $N(s)$ nur einfache Wurzeln, läßt sich unmittelbar je ein Substitutionswert auf der Grundlage berechnen, daß der Koeffizient der entsprechenden Exponentialfunktion in der Funktion $i_T(t)$ gleich Null ist, d. h. es ist nicht nötig, ein Gleichungssystem zu lösen. Gibt es mehrfache Wurzeln, erhält man für die gesuchten Substitutionswerte wieder ein Gleichungssystem, doch ist dieses weit einfacher als jenes für die Koeffizienten A_i.

Die beiden geschilderten Gedankengänge, die wir auf Grund der Fachliteratur dargelegt haben, zeigen eine gewisse Umständlichkeit. Sie rührt davon her, daß von den beiden unbekannten Funktionen in der Zerlegung von $I(s)$ für die eine $[I_T(s)]$ im Zeitbereich, für die andere $[Q(s)]$ hingegen im s-Bereich eine Vorbedingung gestellt wird. Deshalb muß zur Bestimmung von $Q(s)$ zuerst im Bereich $t > T$ die Bildfunktion $I_T(s)$ zurücktransformiert werden, und erst dann läßt sich $i_T(t)$ im Intervall $(0, T)$ berechnen. Gelingt es, für die Funktion $I_T(s)$ eine Vorbedingung im s-Bereich zu stellen, wird der Gedankengang übersichtlicher, und in einigen Fällen wird auch der Kalkül einfacher sein. Ist ausbedungen, daß $I_T(s)$ auf der ganzen komplexen Zahlenebene — mit Ausnahme des unendlich weiten Punktes — analytisch sei, können $I_T(s)$ und $Q(s)$ auf Grund dieser und der auf $Q(s)$ bezüglichen Bedingung eindeutig bestimmt werden und es erfüllt sich automatisch auch die Bedingung, daß $i_T(t) = 0$ ist, wenn $t > T$. $U_T(s)$ enthält nämlich im Zähler nur solche Faktoren in der Form $\exp(-s\tau_i)$, in denen $\tau_i \leq T$ ist, und bei der obigen Zerlegung gilt dasselbe auch für $I_T(s)$. Wenn also $I_T(s)$ im Sinne des Entwicklungssatzes zurücktransformiert wird, muß im Bereich $t > T$ der ganze Zähler berücksichtigt werden, woraus folgt, daß in diesem Bereich $i_T(t) = 0$ ist, weil $I_T(s)$

nur im Unendlichen einen Pol hat. Zur Zerlegung schreiben wir die Funktion $Q(s)/N(s)$ als die Summe von Teilbrüchen in der Gestalt

$$I(s) = \frac{U_T(s)}{1-e^{-sT}} \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{I_T(s)}{1-e^{-sT}} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{A_{ki}}{(s-s_k)^i} \tag{13}$$

auf. Mit s_k sind hier die Nullstellen von $N(s)$ bezeichnet. Ihre Zahl ist r, und die Multiplizität der Wurzel s_k ist n_k. Damit haben wir von $I(s)$ die Hauptteile der den Nullstellen von $N(s)$ als singulären Punkten zugehörigen, Laurentschen Reihen abgetrennt. Die Koeffizienten A_{ki} können aus der Formel

$$A_{ki} = \frac{1}{(n_k - i)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{n_k - i}}{ds^{n_k - i}} (s - s_k)^{n_k} I(s) \tag{14}$$

berechnet werden. Für einfache Wurzeln nimmt diese Formel die übersichtlichere Form

$$A_k = \lim_{s \to s_k} (s - s_k)\, I(s) \tag{15}$$

an. Aus ihr ist ersichtlich, daß zwischen den Koeffizienten A_k und den Substitutionswerten $Q(s)$ im Falle von einfachen Wurzeln die Beziehung

$$Q(s_k) = A_k \lim_{s \to s_k} \frac{N(s)}{(s - s_k)} \tag{16}$$

besteht. Hieraus geht offensichtlich auch hervor, daß die nach den beiden letztbeschriebenen Methoden durchgeführten Rechnungen bei einfachen Wurzeln einen beinahe gleichen Gang haben. Hat dagegen $N(s)$ auch mehrfache Wurzeln, sind die beiden Rechnungsmethoden voneinander verschieden, und die zweite ist insofern einfacher, als es nicht nötig ist, ein Gleichungssystem zu lösen.

Illustratives Beispiel

Die praktische Anwendung der erörteten Methoden soll nun an einem einfachen Beispiel illustriert werden. Das untersuchte Netz ist in *Abb. 1* dargestellt. Seine Parameter sind so gewählt, daß $s = -3/\sqrt{LC} = -\gamma$ ein zweifacher Eigenwert ist. Die periodische Erregung sei eine Rechteckspannung (*Abb. 2*):

$$u(t) = \begin{cases} U, \text{ wenn } & 0 \leq t < \dfrac{T}{2}, \\ -U, \text{ wenn } & \dfrac{T}{2} \leq t < T, \end{cases} \quad \text{und } u(t+T) = u(t) \text{ st.}$$

Im Beispiel vereinfacht die Berücksichtigung der Erregungsspannungssymmetrie die Rechnung. Die zweite Halbperiode der Erregungsfunktion ist das Spiegelbild der ersten, und dasselbe trifft für die den stationären Zustand beschreibenden Funktionen zu, weshalb es genügt, diese nur im Intervall $(0, T/2)$ zu bestimmen.

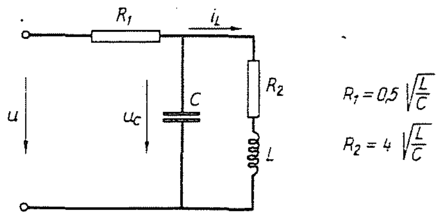

Abb. 1

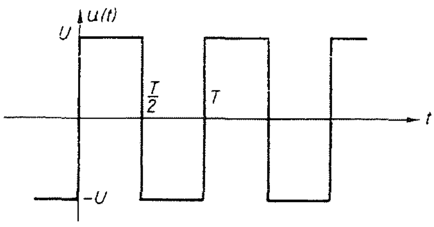

Abb. 2

Als Lösung des den Strom der Induktivität und die Spannung des Kondensators beschreibenden Differentialgleichungssystems im Intervall $(0, T/2)$ erhält man die Funktionen

$$i_L = \frac{U}{9\,R_1} + Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

$$u_C = \frac{8}{9}U + 2\,R_1\left(A + \frac{3\,B}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} + 2\,R_1\,Bte^{-\gamma t} \text{ in der } \gamma = \frac{3}{\sqrt{LC}} \text{ ist.}$$

Aus der genannten Symmetrie folgt, daß

$$i_L\left(t = \frac{T}{2}\right) = -\,i_L\,(t = 0) \text{ und } u_C\left(t = \frac{T}{2}\right) = -\,u_C\,(t = 0)$$

ist. Aus dieser beiden Gleichungen können A und B berechnet werden, und für den Strom der Induktivität in der ersten Halbperiode hat man die Beziehung

$$i_L = \frac{U}{9\,R_1}\left[1 + \frac{a\gamma T - 2(1+a)}{(1+a)^2}\,e^{-\gamma t} - \frac{2\,\gamma}{1+a}\,te^{-\gamma t}\right], \text{ in der } a = e^{-\frac{\gamma T}{2}} \text{ ist.}$$

Aus *Abb. 3* ist der Zeitverlauf der obigen Funktion für $T = 1{,}5/\gamma$ ersichtlich.

Die Gewichtsfunktion des Stromes der Induktivität hat nachweisbar die Form

$$g(t) = \frac{\gamma^2}{9 R_1} t e^{-\gamma t}.$$

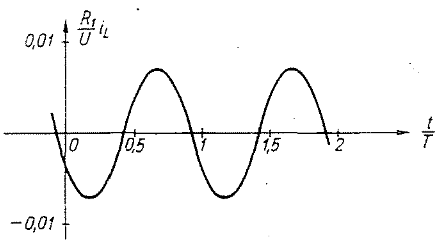

Abb. 3

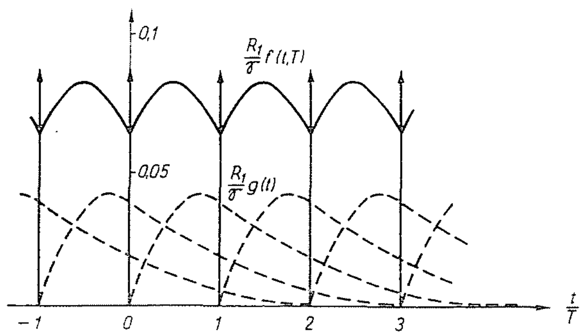

Abb. 4

Daraus hat man auf Grund der Formel (7) die periodische Gewichtsfunktion

$$f(t, T) = \frac{\gamma^2}{9 R_1(1 - a^2)} \left(t e^{-\gamma t} + \frac{a^2 T}{1 - a^2} e^{-\gamma t} \right).$$

Hier bedeuten γ und a dasselbe wie oben. *Abb. 4* stellt die Antworten auf die einzelnen Impulse der periodischen Impulsreihe dar, d. h. die verschobenen Gewichtsfunktionen und ihre Summe, die periodische Gewichtsfunktion. Nun ist der Strom der Induktivität im Intervall $0 \leq t < T/2$ aus der Formel (2)

$$i_L(t) = \int_0^t U f(\tau, T)\, d\tau - \int_t^{t+\frac{T}{2}} U f(\tau, T)\, d\tau + \int_{t+\frac{T}{2}}^{T} U f(\tau, T)\, d\tau.$$

Die Auswertung der Integrale führt zum selben Ergebnis wie zuvor.

Zur Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Laplace-Transformation schreiben wir unter Umgehung der Einzelheiten der Berechnung die Bildfunktion des

Stromes der Induktivität und auch gleich die Zerlegung auf, wobei wir für $I_T(s)$

$$I(s)=\frac{U\gamma^2\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)^2}{9\,R_1\,s(s+\gamma)^2\,(1-e^{-sT})}=\frac{I_T(s)}{1-e^{-sT}}+\frac{Q(s)}{(s+\gamma)^2}$$

$$I_T(s)=\frac{U\gamma^2\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)^2}{9R_1 s\,(s+\gamma)^2}-\frac{(1-e^{-sT})\,Q(s)}{(s+\gamma)^2}$$

erhalten. Wir geben hier $Q(s)$, einem Polynom ersten Grades, die Form

$$Q(s)=A_1\,s+A_0\,.$$

Nach Zurücktransformieren von $I_T(s)$ im Bereich $t>T$ mit Hilfe der für mehrfache Wurzeln gültigen Form des Entwicklungssatzes und nach Umordnung hat man

$$i_T(t)=\left[-\frac{U\gamma(1-a)^2}{9\,a^2\,R_1}+\frac{(1-a^2)\,(-\gamma A_1+A_0)}{a^2}\right]te^{-\gamma t}+$$
$$+\left[\frac{U(1-a)\,(a+\gamma T-1)}{9\,a^2\,R_1}+\frac{(1+\gamma T-a^2)\,A_1-A_0\,T}{a^2}\right]e^{-\gamma t}.$$

Hier müssen die Koeffizienten sowohl der Funktion $te^{-\gamma t}$ als auch der Funktion $e^{-\gamma t}$ gleich Null sein. Aus diesen zwei Bedingungen, die zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten bedeuten, hat man für A_1 und A_0

$$A_0=\frac{U\gamma(2-a\gamma T-2\,a^2)}{9\,R_1\,(1+a)^2}\,,\quad A_1=\frac{U(1-a\gamma T-a^2)}{9\,R_1\,(1+a)^2}\,.$$

Damit ist auch die Funktion $I_T(s)$ bekannt; es ist leicht, sie zurückzutransformieren, und man erhält das schon bekannte Ergebnis für die den stationären Zustand beschreibende Funktion.

Nach der zweiten Methode wird $I_T(s)$ wieder im Bereich $t>T$ zurücktransformiert; nach Ordnen hat $i_T(t)$ die Form

$$i_T(t)=\left[-\frac{U\gamma(1-a^2)}{9\,a^2\,R_1}+\frac{(1-a^2)\,Q(-\gamma)}{a^2}\right]te^{-\gamma t}+$$
$$+\left[\frac{U(1-a)(a+\gamma T-1)}{9\,a^2\,R_1}-\frac{TQ(-\gamma)-Q'(-\gamma)(1-a^2)}{a^2}\right]e^{-\gamma t}.$$

Die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern sind gleich Null, was zwei Gleichungen bedeutet; aus der ersten kann $Q(-\gamma)$ unmittelbar ausgedrückt werden. Durch Substitution dieses Wertes in die zweite Gleichung läßt sich auch $Q'(-\gamma)$ berechnen:

$$Q(-\gamma) = \frac{U\gamma(1-a)}{9(1+a)\,R_1} \qquad Q'(-\gamma) = \frac{U(1-a\gamma T-a^2)}{9(1+a)^2\,R_1} .$$

Nun kann $i_T(t)$ schon ohne Schwierigkeiten mit Hilfe des Entwicklungssatzes bestimmt werden.

Bei der dritten Methode ist es zweckmäßiger, mit der vereinfachten Form von $I_T(s)$ zu rechnen. Die Zerlegung schreibt sich zu

$$I(s) = \frac{U\gamma^2\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{9\,R_1\,s\,(s+\gamma)^2\left(1+e^{-\frac{sT}{2}}\right)} = \frac{I_T(s)}{1-e^{-sT}} + \frac{B_1}{s+\gamma} + \frac{B_2}{(s+\gamma)^2} .$$

Auf Grund der Formel (14) ist

$$B_1 = \frac{U\gamma^2}{9\,R_1}\lim_{s\to-\gamma}\frac{d}{ds}\,\frac{1-e^{-\frac{sT}{2}}}{s\left(1+e^{-\frac{sT}{2}}\right)} = \frac{U(1-a\gamma T-a^2)}{9\,(1+a)^2\,R_1} \quad \text{und}$$

$$B_2 = \frac{U\gamma(1-a)}{9(1+a)\,R_1} .$$

Mit diesen Werten kann auch $I_T(s)$ aufgeschrieben werden:

$$I_T(s) = \frac{U}{9\,R_1}\left[\frac{\gamma^2\left(1-e^{-\frac{sT}{2}}\right)^2}{s(s+\gamma)^2} - \frac{\gamma(1-a)(1-e^{-sT})}{(1+a)(s+\gamma)^2} - \frac{(1-a\gamma T-a^2)(1-e^{-sT})}{(1+a)^2\,(s+\gamma)}\right].$$

Das Zurücktransformieren, das zu der mehrmals berechneten Funktion führt, verursacht keine Schwierigkeiten, weil die Originalfunktionen der zwei letzten Glieder in den eckigen Klammern unmittelbar aufgeschrieben werden können. Bemerkt sei, daß im Beispiel B_1 gleich $Q'(-\gamma)$ und B_2 gleich $Q(-\gamma)$ ist, daß sich jedoch eine ganz andere Lage ergibt, wenn $N(s)$ mehrere Nullstellen hat.

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel faßt die Methoden für die Berechnung der geschlossenen Form der den stationären Zustand linearer, invarianter, passiver Netze beschreibenden Zeitfunktion für den Fall zusammen, daß die Erregung periodisch ist. Neben den zwei in der Literatur bekannten Methoden der Anwendung der Laplace-Transformation legt er eine dritte vor, die

die Probleme von einem neuen Gesichtspunkt aus beleuchtet und die Rechnung vereinfacht, wenn die Übertragungsfunktion mehrfache Pole hat. Die Arbeit führt als neuen Begriff die periodische Gewichtsfunktion ein. Diese kann entweder von der Gewichtsfunktion aus oder durch Messung bestimmt werden, und mit ihrer Hilfe läßt sich die den stationären Zustand beschreibende Funktion in Gestalt eines einfachen Integrals darstellen. Als illustratives Beispiel rechnet die Arbeit die Lösung einer Netzberechnungsaufgabe auf Grund aller besprochenen Methoden durch.

Literatur

DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I.—II.—III. Verlag Birkhäuser, Basel, 1950—1955—1956.
FODOR, GY.: Laplace-transforms in Engineering. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
MIKUSINSZKY, J.: Operatorenrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1957.

András MAGOS, Budapest XI., Egry József-u. 18—20; Ungarn.