

UNTERSUCHUNG DER NETZSPANNUNGSQUALITÄT MIT HILFE EINES ELEKTRISCHEN ANALOGRECHNERS

Von

Gy. Kovács

Lehrstuhl für Elektrische Anlagen, Technische Universität Budapest
(Eingegangen am 5. April 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. P. O. GESZTI

1. Problemstellung

Elektrische Verteilungsnetze bedienen zahlreiche Verbraucher, deren Laständerungen wegen ihrer großen Zahl rein zufälliger Natur sind. Die Entfernung der einzelnen Stromabnehmer von den Speisepunkten ist verschieden. Aus diesen Gründen ist der Betrieb der stromverbrauchenden Einrichtungen unter gleichmäßiger, dem Nennwert entsprechender Spannung nicht möglich.

Die stromverbrauchenden Einrichtungen (Asynchronmotoren, Beleuchtungs- und Heizungsanlagen usw.) sind meistens so konstruiert, daß sie bei der Nennspannung mit dem besten Wirkungsgrad arbeiten. Erhält eine Einrichtung vom Nennwert abweichende höhere oder niedrigere Spannung, dann können in ihrem Betrieb je nach der Größe und der Dauer der Spannungsschwankungen Störungen auftreten, die jedenfalls einen wirtschaftlichen Nachteil bedeuten. Dieser wirtschaftliche Verlust kann als eine Verminderung des Wertes der elektrischen Energie aufgefaßt werden, die sich nach Gaussens und Ailleret [1], [2] zu

$$\Delta K = a_1 \cdot \Delta U + a_2 \Delta U^2 \quad (1)$$

errechnet, worin

K den Momentanwert der Wertverminderung
 U die prozentuale Spannungsabweichung (%) gemäß

$$\Delta U = \frac{U - U_n}{U_n} \cdot 100 \quad (2)$$

mit U = Momentanwert der Spannung und

U_n = Nennspannung

bedeuten, während a_1 und a_2 gegebene Konstanten sind.

Die Richtigkeit der Gl. (1) haben verschiedene Untersuchungen in der Sowjetunion, in Schweden und in Ungarn bewiesen.

Die ungarischen Normen erlauben zur Zeit eine Spannungsschwankung von $\pm 5\%$ (eventuell -10%). Eine Spannung, die, wenn auch nur für noch so kurze Zeit, diesen Bereich überschreitet, kann also nicht mehr als norm-

gerecht betrachtet werden. In der Praxis geht die Kontrolle, ob die Spannung den Normen entspricht, so vor sich, daß man jährlich ein bis zweimal die Spannung der Netzkpunkte mißt. Dabei werden wegen der vielen Zufallsfaktoren im allgemeinen nicht die für die betreffenden Netzkpunkte charakteristischen Zustände wiedergegeben. Auf Grund solcher Messungen entschließt man sich eventuell zur Verbesserung des Netzes zu Investitionen, obwohl sie überflüssig sind.

Es ist klar, daß — wirtschaftlich gesehen — ein geringerer Verlust entsteht, wenn die Spannungsschwankung sich nur für kurze Dauer nicht innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen hält, als wenn sie zum Beispiel dauernd nahe bei $\Delta U = -10\%$ liegt.

Wie man sieht, liefert die Bewertung der Qualität der Spannung mit konventionellen Mitteln keine befriedigenden Ergebnisse, weshalb man die Spannungsqualität zweckmäßig statistisch bewerten wird.

Wenn man von den Auswirkungen der nichtautomatischen Spannungsregler und von allen anderen Maßnahmen absieht, die die Vorausberechnung der Spannungsänderung in den einzelnen Netzkunkten gestatten (Aus- und Einschalten von Netzteilen, Fabriken, usw.), so scheint die Annahme gerechtfertigt zu sein, daß die Netzspannungsschwankungen zufälliger Natur sind, d. h. daß die Spannung als Wahrscheinlichkeitsvariable angesehen werden kann.

Im weiteren sollen die Spannungsschwankungen als stationär stochastische Vorgänge behandelt werden, für die die ergodische Hypothese gültig ist.

In der Praxis sind für die Qualität der Spannung folgende Größen charakteristisch:

1. Zeitlicher Mittelwert (\bar{U})

$$\bar{U} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt.$$

2. Zeitlicher quadratischer Mittelwert (\bar{U}^2)

$$\bar{U}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [U(t)]^2 dt.$$

3. Relative Abweichung (ΔU , Gl. (2)) sowie ihr linearer und quadratischer Mittelwert ($\overline{\Delta U}$ und $\overline{\Delta U^2}$ können nach den Definitionen 1 und 2 berechnet werden).

4. Streuungsquadrat (σ_u^2)

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \overline{\Delta U(t) - \overline{\Delta U(t)}} = \overline{U(t)^2} - [\overline{\Delta U(t)}]^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\Delta U(t) - \overline{\Delta U(t)}]^2 dt, \end{aligned}$$

5. Häufigkeitsdichte ($f(U)$). Die Häufigkeitsdichte zeigt, im wievielten Teil der ganzen Meßzeit die Spannung zwischen den gegebenen Werten U_i und $U_i + \Delta U_i$ liegt.

6. Verteilungsfunktion ($F(U)$). Die Verteilungsfunktion zeigt, im wievielten Teil der ganzen Meßzeit die Spannung unter den gegebenen Werten U_a, U_b, U_c, \dots liegt. Es gilt:

$$f(U) = \frac{dF(U)}{dU} .$$

7. Autokorrelationsfunktion. Die Autokorrelationsfunktion eines stochastischen $x(t)$ -Signals berechnet man, indem man den zu einem gegebenen Zeitpunkt gemessenen Funktionswert mit dem um eine bestimmte Verschiebungszeit später gemessenen Funktionswert multipliziert und das Mittel dieser Produkte stimmt.

$$\varphi(\tau) = \overline{x(t)x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt . \quad (3)$$

8. Spektraldichtenfunktion.

Die Spektraldichtenfunktion eines stochastischen Signals $x(t)$ berechnet man, indem man die doppelseitige Bildfunktion der Autokorrelationsfunktion des Signals bildet, wobei $p = j\omega$ zu setzen ist.

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau . \quad (4)$$

(In der Praxis kann man natürlich nur über eine endliche Zeit integrieren.)

In konkreten Rentabilitätsberechnungen können von den angeführten Funktionen nach unserem heutigen Wissen praktisch nur die Änderungen von ΔU und ΔU^2 benützt werden. Die anderen Funktionen können bei der Bestimmung dieser beiden letzteren Funktionen Hilfe leisten (z. B. $\sigma_u^2, f(U)$) bzw. einen Hinweis darauf geben, wie weit das Netz noch weiter belastet werden darf, ohne daß sich die Qualität der Spannung trotz Überschreitung der in den Spannungsnormen angeführten Spannungsgrenzen ($f(U); F(U)$) verschlechterte. Oder es lassen sich aus diesen Funktionen Informationen ableiten, deren genaue wirtschaftliche Auswirkungen noch nicht bekannt sind.

Die Kenntnis der für die Spannungsqualität charakteristischen Größen vermag die Lösung zweier grundlegend wichtiger Aufgaben zu fördern.

1. Sie ermöglicht es, für ein gegebenes Netz gewisse wirtschaftliche Voraussagen darüber zu machen, welche Maßnahmen zur Spannungsregelung

getroffen werden sollten, ob die Erweiterung des Netzes nötig ist, bzw. bis zu welchem Grad es sich lohnt, die Spannungsqualität zu verbessern.

2. Die an vorliegenden Netzen gemessenen Qualitätskennwerte können bei der Auslegung neuer Netze genützt werden. Aus den gemessenen Werten können durch Extrapolation Unterlagen für schätzungsweise Festlegung der qualitativen Kennwerte des neu zu bauenden Netzes gewonnen werden.

Zur qualitativen Untersuchung der Netzspannung werden z. Z. in Ungarn im Forschungsinstitut für Elektrische Energie Messungen durchgeführt. In der Sowjetunion, in Frankreich und Schweden sowie in der Schweiz beschäftigt man sich mit diesem Problem schon seit einiger Zeit. Den Ausgangspunkt der von uns vorgenommenen weiteren Untersuchungen bilden die früheren in- und ausländischen Ergebnisse.

Dem Wesen nach berühren die bisherigen Untersuchungen (mit Ausnahme von 7) entweder auf der indirekten Messung der stochastischen Merkmale der Spannung mit eigens zu diesem Zweck konstruierten Geräten (statistischen Voltmetern, usw.) oder auf der Registrierung der zu untersuchenden Spannung bzw. ihrer relativen Abweichungen (ΔU), wobei die Meßstreifen mit Hilfe digitaler Rechenmaschinen ausgewertet werden. Eine solche Auswertung liefert bei 10- bis 15tätiger fortlaufender (oder stichprobenweiser) Messung ein befriedigendes Resultat. Die Meßresultate haben gezeigt, daß die Spannungsabweichungen der Gaußschen Verteilungskurve folgen, die relative Abweichung der Spannung kann also als ein stationär stochastisches Signal aufgefaßt werden.

Diese Tatsache liegt den Messungen mit dem Analogrechner zugrunde. Im Sinne der ergodischen Hypothese sind nämlich die wiederholten, kurzzeitigen Messungen mit den fortlaufenden länger dauernden Messungen statistisch gleichwertig. Deshalb kann z. B. der Mittelwert der Spannung (\bar{U}) entweder so gemessen werden, daß man etwa eine Woche lang ununterbrochen mißt und danach auswertet oder indem man den Mittelwert genügend vieler Resultate aus kurzzeitigen (z. B. 5 Minuten dauernden) Messungen ermittelt, womit sich gleichfalls befriedigende Ergebnisse erzielen lassen. Die Ausnützung dieser Möglichkeit bietet den größten Vorteil bei statistischen Untersuchungen mit dem Analogrechner.

Jene kurzwährenden Messungen, die mit dem Analogrechner vorgenommen werden, ermöglichen

1. die Trennung der rein zufälligen und der absichtlichen (z. B. durch Regelungen verursachten) Änderungen,
2. die gute Trennung und Einzel-Auswertung von Messungen in den verschiedenen Belastungsperioden.

In dieser Abhandlung soll untersucht werden, wie sich mit Hilfe des Analogrechners die charakteristischen Kennwerte der Spannungsqualität bestimmen lassen.

2. Die Bestimmung der statistischen Spannungskennwerte mit dem Analogrechner

2.1. Auswertung der Spannungsregistrierung

Die analoge Rechenmaschine kann mit Vorteil zur Auswertung von Spannungsaufzeichnungen angewendet werden. *Abb. 1* zeigt die Schaltung zur Bestimmung des linearen und quadratischen Mittelwertes der relativen Spannungsabweichung ($\overline{\Delta U}$ und $\overline{\Delta U^2}$) sowie des Streuungsquadrats (σ_u^2).

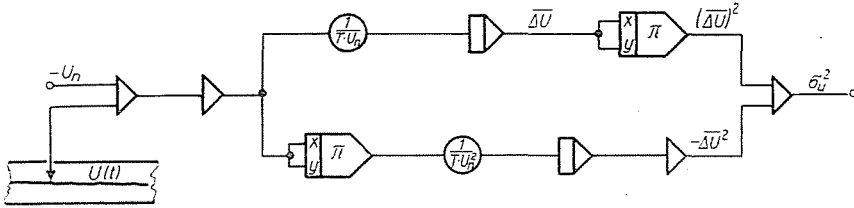


Abb. 1. Bestimmung des Streuungsquadrats

Bei längerer Registrierung können auch Teilstrecken des Registrierstreifens untersucht werden, wobei der Mittelwert dieser Teilresultate ermittelt wird.

Aus dem Mittelwert (\overline{U}) und dem Streuungsquadrat (σ_u^2) lassen sich auch die Häufigkeitsdichte und die Verteilungsfunktion bestimmen. (Hierauf soll bei Auswertung der Resultate noch zurückgegriffen werden.)

Aus den Registrierstreifen können auch die Korrelations- und Spektraldichtefunktionen gewonnen werden.

2.2. Kurzzeitige Messungen

Bei den kurzzeitigen Messungen mit dem Analogrechner wird immer der Spannungsunterschied ($U'(t) - \overline{U}'_1$) in den Rechner eingegeben. Dabei ist $U'(t)$ die entsprechend reduzierte ($U'(t) < 100$ V), gleichgerichtete und gefilterte, der Netzspannung proportionale Gleichspannung, während \overline{U}'_1 die für die Meßperiode charakteristische, auf Grund vorheriger Messungen geschätzte und angenommene Gleichspannung bedeutet.*

Solche Messungen ergeben also die durchschnittliche Spannungsabweichung ($|\overline{U}'_1 - U_n|$) sowie die Art jener Netzspannungsschwankungen, die nicht von den eingebauten Reglern (Transformatoren, Kondensatorbatterie, usw.) ausgelöst werden.

Da bei diesen Messungen die Wirkung von Reglern (und andere absichtlich herbeigeführte Änderungen) unberücksichtigt bleiben, ist die Feststellung

* Die Spannungen ohne Strich sind Netzspannungen, die mit Strich versehenen repräsentieren die in der Rechenmaschine vorhandenen Spannungen.

berechtigt, daß sie nur die rein zufälligen Änderungen der Netzspannung (Schwankungen, verursacht durch Ein- und Ausschalten der Kleinverbraucher) erfassen.

Zur Auswertung solcher Untersuchungen eignen sich außer den Werten $\overline{\Delta U}$, $\overline{\Delta U^2}$ und σ_u^2 besonders gut noch die Spektraldichtefunktion (Leistungsdichte-Spektrum, Autokorrelationsspektrum) und die Autokorrelationsfunktion. Die erstere ist für die im Frequenzbereich auftretenden Änderungen, die letztere für die zeitlichen Veränderungen charakteristisch. Um die Autokorrelations- und die Spektraldichtefunktion mit Hilfe eines Analogrechners bestimmen zu können, müssen, ausgehend von den Definitionsgleichungen dieser Funktionen, entsprechend programmierbare Gleichungen abgeleitet werden.

2.3. Bestimmung der Autokorrelationsfunktion

Bekanntlich sind bei ergodischen Prozessen die Autovarianz- und die Autokorrelationsfunktion einander gleich, d. h. es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt. \quad (5)$$

Aus $x(t)$ läßt sich $x(t - \tau)$ mit Hilfe der Verschiebungsfunktion $F(p) = e^{-p\tau}$ ableiten (Abb. 2).

Da die Autokorrelationsfunktion von gerader Ordnungszahl und $T \rightarrow \infty$ nicht durchführbar ist, genügt es bei den Messungen, Bereich $0 < t < T$ zu integrieren. Leider ist die Herleitung der Übergangsfunktion $F(p) = e^{-p\tau}$ aus Elementen mit konzentrierten Parametern nicht möglich. Aus diesem Grunde wurden Näherungsverfahren ausgearbeitet (z. B. [8] und [9]).

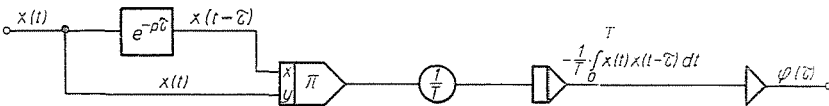


Abb. 2. Bestimmung der Autokorrelationsfunktion

W. W. WIERWIELLE löst das Problem der Funktionsverschiebung durch Parallelschaltung von Filterkreisen, deren Übergangsfunktion

$$F(p) = \frac{pn\omega_0}{p^2 + n^2\omega_0^2}$$

und Gewichtsfunktion

$$w(t) = \cos n\omega_0 t$$

ist (siehe: [10], [11], [12]).

2.4. Die Bestimmung der Spektraldichtefunktion

Bei Umwandlung der Gl. (4) hat man

$$\Phi(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2. \tag{6}$$

Da $\varphi(\tau)$ eine Funktion von gerader Ordnungszahl ist, ist $\Phi(j\omega)$ ebenfalls eine gerade Funktion. Es leuchtet ferner ohne weiteres ein, daß $\Phi(j\omega) = \Phi(\omega)$ nur reell sein kann, es ist also

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2. \tag{7}$$

Beim Übergang von der unendlichen auf die endliche Zeit gilt mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \right|^2, \\ \Phi(\omega) &= \frac{1}{T} (A_\omega^2 + B_\omega^2), \end{aligned} \tag{8}$$

worin

$$A_\omega = \int_0^T x(t) \cos \omega t dt \text{ und } B_\omega = \int_0^T x(t) \sin \omega t dt. \tag{9}$$

Die Gl. (8) eignet sich zur Bestimmung einzelner Punkte der Funktion $\Phi(\omega)$ mit Hilfe eines Analogrechners. Dazu muß die Meßzeit ein ganzes Vielfaches der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ sein, d. h. es muß gelten

$$T = n \cdot \frac{2\pi}{\omega}. \tag{10}$$

Bei beliebigem stochastischem Signal $x(t)$ (z. B. bei Abweichung der Netzspannung von einer gegebenen konstanten Vergleichsspannung) können die einzelnen Punkte der Funktion $\Phi(\omega)$ auf Grund der in *Abb. 3* dargestellten Schaltung bestimmt werden. Bei der Messung schützen die Potentiometer C_1 und C_2 die Integratoren vor Überlastung. Die Summatoren I und II werden zur entsprechenden Anpassung der Multiplikatoren benötigt (die zwei Eingänge eines Integrators würden sie überlasten). Zu beobachten ist, daß die Integration zwischen zwei Nulldurchgängen der Sinuswelle erfolgen muß.

Vor Aufnahme der Messungen mit der in *Abb. 3* angegebenen Schaltung auf dem Analogrechner des Lehrstuhls für Elektrische Anlagen der Technischen

Universität Budapest wurde zur Bestimmung der für die Netzspannungsschwankungen charakteristischen Spektraldichtenfunktionen die Brauchbarkeit der Schaltung durch Probemessungen kontrolliert.

Statt eines stochastischen Signals wurde zunächst das Eingangssignal $x_1(t) = \sin \omega_1 t$ bzw. das Signal $x_2(t) = -a + bt$ untersucht.

Beide Signale lassen sich mit dem Analogrechner leicht herstellen.

Bei beiden Messungen wurden die $\Phi(\omega)$ Werte für $\omega = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$ und 1 sec^{-1} berechnet und gemessen und die Rechnungsergebnisse mit

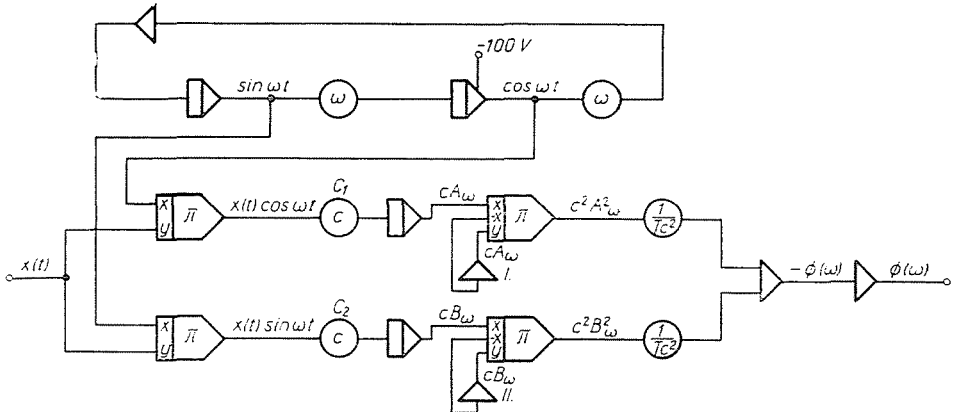


Abb. 3. Das Prinzip der Bestimmung der Spektraldichtefunktion

den Meßresultaten verglichen. Die Abweichung von den berechneten Werten betrug höchstens 5%.

Da diese Vergleichsresultate die Brauchbarkeit der Schaltung gemäß Abb. 3 bewiesen hatte, konnte eine effektive Meßreihe durchgeführt werden.

Um mit den Messungen nur die zufälligen Spannungsschwankungen zu erfassen, wählt man die Dauer der Messung zweckmäßig zwischen 1 und 10 Minuten. Die hiesigen Messungen hatten eine Dauer von 125,6 sec. statt $\left(125,6 = \frac{2\pi}{0,05}\right)$.

Jedesmal wurde an Arbeitstagen zwischen 9 und 12 Uhr gemessen.

Die Werte der Spektraldichtefunktion wurden für die Frequenzen $\omega = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$ und 1 sec^{-1} bestimmt. Auf jeder Kreisfrequenz wurden täglich 7 Messungen durchgeführt, von denen der Durchschnitt genommen wurde. Es wurde an 6 Tagen gemessen und aus den Durchschnitten eine resultierende Spektraldichtefunktion berechnet. Die Resultate wurden im doppellogarithmischen Maßstab aufgetragen. (Die einzelnen Tagesmittel sind mit \dagger , der aus ihnen berechnete Durchschnitt ist mit 0 markiert (Abb. 4).)

Auf Frequenzen unter $\omega = 0,05 \text{ sec}^{-1}$ wurden keine Messungen vorgenommen, weil die Verlängerung der Meßzeit den aus der Ungenauigkeit

der Rechenmaschine stammenden Fehler beträchtlich erhöht hätte. (Nullpunktverschiebung, Dämpfung der Sinus-Kurve, etc.)

Bei Frequenzen von über $\omega = 1 \text{ sec}^{-1}$ wurde deshalb nicht gemessen, weil die Schaltung bei schnelleren Änderungen beim Nullübergang der in die Multiplikatoren eingeführten Sinus- bzw. Kosinuskurven Schwierigkeiten bereitet hatte.

Die große Zahl der Messungen war wegen der beträchtlichen Streuung nötig.

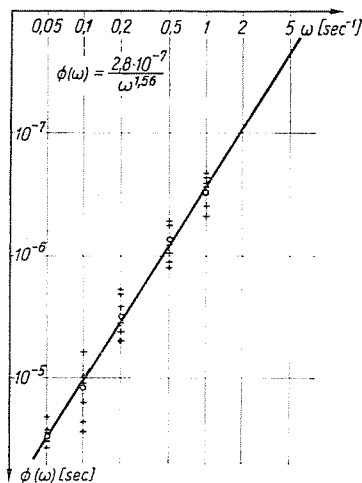


Abb. 4. Die Spektraldichtefunktion

Zur Bestimmung der Spektraldichtefunktion wurde als Eingangssignal der Spannungsunterschied $x(t) = 100 [U'(t) - \bar{U}'_1]$ verwendet. Mit dem Faktor 100 mußte deshalb multipliziert werden, weil die Spannungsschwankungen sehr klein waren und weil nur so erreicht werden konnte, daß das Eingangssignal mindestens um eine Größenordnung größer war als die aus Maschinenfehlern stammenden Spannungen. Auf diese Weise war es möglich, die Schwankung der Netzspannung um den Mittelwert zu beobachten.

Die Schaltung der Messung ist in *Abb. 5* angegeben. U_1 wurde mit dem Wert K eingestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß die letzten Operationen der in *Abb. 3* angegebenen Schaltung (Quadratbildung, Division) zur Erhöhung der Genauigkeit hier mit dem Rechenschieber ausgeführt wurden.

Die richtigen Werte für $\Phi(\omega)$ ergaben sich aus der Gleichung

$$\Phi(\omega) = \left[\left(\frac{a_1}{c} \right)^2 + \left(\frac{b_1}{c} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{125,6 \cdot U_n} \tag{11}$$

a_1 und a_2 sind die Ausgangssignale des Integrators I bzw. II, U_n ist die Nennspannung, auf die sich das Resultat bezieht. Bei dieser Messung wurde

$$U_n = \bar{U}_1$$

gesetzt.

Die Spektraldichtefunktion hat — da sie sich auf das Signal $\frac{U(t) - \bar{U}_1}{\bar{U}_1}$ bezieht —, die Dimension der Zeit:

$$\left(\frac{U(t) - \bar{U}_1}{\bar{U}_1} = \frac{\Delta U}{100} \right).$$

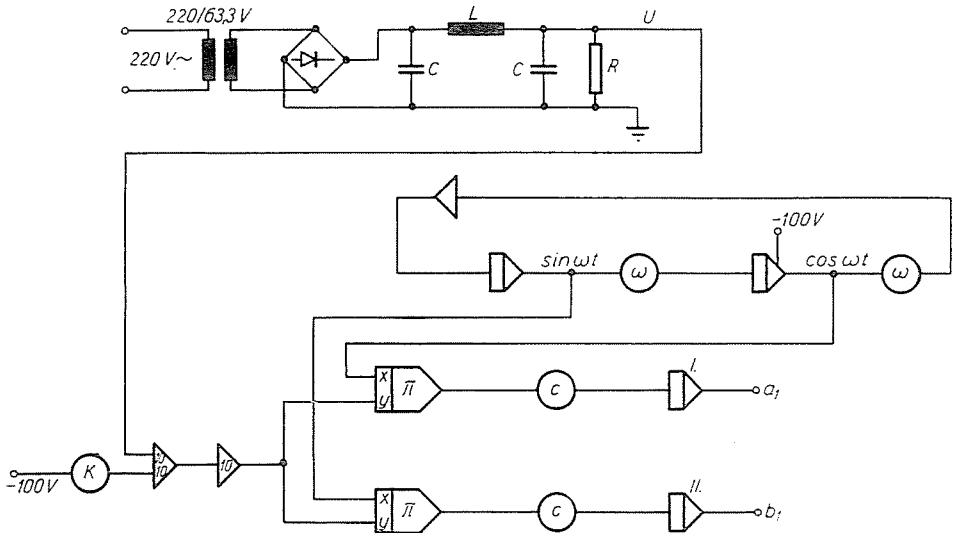


Abb. 5. Bestimmung der Spektraldichtefunktion

Letzten Endes war also

$$\Phi(\omega) = \frac{2,8 \cdot 10^{-7}}{\omega^{1,56}}. \tag{12}$$

Aus $\Phi(\omega)$ ergibt sich, im Sinne der Definition

$$E_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \tag{13}$$

durch Integration im Intervall $(\omega_1; \omega_2)$ [statt im Intervall $(0; \infty)$] das mittlere Fehlerquadrat. Es kann bewiesen werden, daß E_m^2 dem Streuungsquadrat des stochastischen Signals proportional ist, wie dies aus dem Anhang hervorgeht:

$$E_m^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi(\omega) d\omega. \tag{14}$$

Da bei ω_2 der Wert des Integrals sehr klein ist, ergibt sich kein erheblicher Fehler, wenn mit $\omega_2 = \infty$ statt mit $\omega_2 = 5 \text{ sec}^{-1}$ gerechnet wird. (Der Wert $\Phi(\omega)$ wurde aus den gemessenen Punkten für $\omega = 5 \text{ sec}^{-1}$ durch Extrapolation bestimmt.) Es gilt mithin

$$E_m^2 = \frac{1}{\pi} \int_{0,05}^{\infty} \frac{2,8 \cdot 10^{-7}}{\omega^{1,56}} d\omega = \frac{2,8 \cdot 10^{-7}}{0,56 \cdot \pi \cdot 0,05^{0,56}} = 8,3 \cdot 10^{-7}.$$

Im Anhang, wo es abgeleitet war, daß

$$E_m^2 = 10^{-4} \cdot \sigma_u^2, \tag{15}$$

wurde beachtet, daß

$$\sigma_u^2 = \overline{\Delta U^2} - [\overline{\Delta U}]^2 \quad \text{und} \quad \Delta U = \frac{U - U_n}{U_n} \cdot 100,$$

woraus

$$\sigma_u^2 = \frac{10^4}{U_n^2} (\overline{U^2} - [\overline{U}]^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{10^4}{2T} \int_{-T}^T \left(\frac{U - \bar{U}}{U_n} \right)^2 dt.$$

Die mathematische Definition des Streuungsquadrats lautet

$$\sigma^2 = \overline{U^2} - [\overline{U}]^2,$$

es wird also

$$\sigma^2 = \frac{U_n^2}{10^4} \sigma_u^2 = \frac{220^2}{10^4} \sigma_u^2 = 4,84 \sigma_u^2. \tag{16}$$

Auf Grund von (15) und (16) lassen sich aus E_m^2 die Streuungsquadrate und Streuungen berechnen und man erhält

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= 0,0083, & \sigma_u &= 0,091, \\ \sigma^2 &= 0,04 \text{ V}^2, & \sigma &= 0,2 \text{ V}. \end{aligned}$$

3. Die Beziehung zwischen der Autokorrelations- und Spektraldichtefunktion

Da die Spektraldichtefunktion nur reell sein kann, hat man

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Da aber $\Phi(\omega)$ eine Funktion von gerader Ordnungszahl ist, wird für positive ω -Werte

$$\Phi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau \tag{17}$$

gelten.

Die Autokorrelationsfunktion kann auch aus der Spektraldichtefunktion hergeleitet werden

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cdot \cos \omega\tau d\omega, \quad (18)$$

denn $\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$ und $\varphi(\tau)$ können nicht imaginär sein.

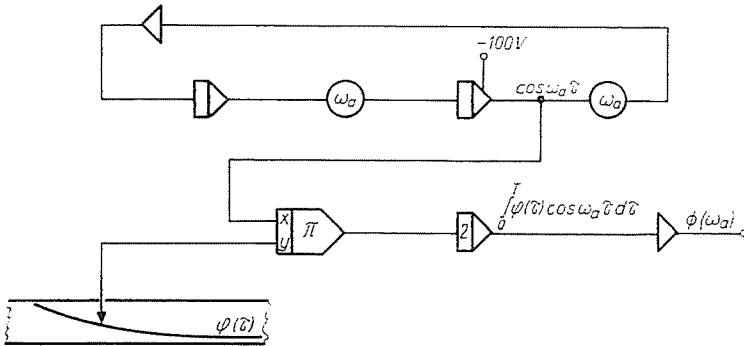


Abb. 6. Bestimmung der Spektraldichtefunktion aus der bekannten Autokorrelationsfunktion

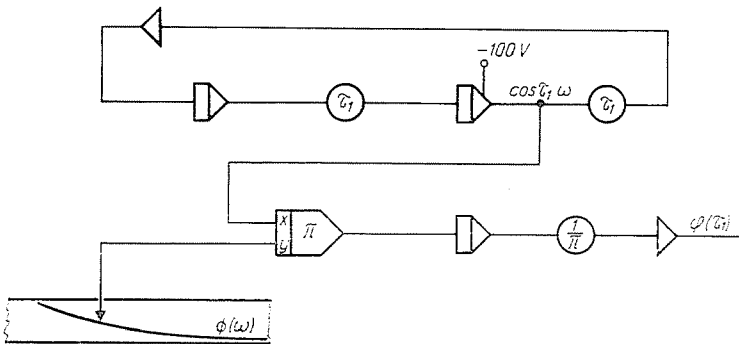


Abb. 7. Bestimmung der Autokorrelationsfunktion aus der bekannten Spektraldichtefunktion

Auf Grund der Gleichungen (17) und (18) können Analogrechnerschaltungen angegeben werden (Abb. 6 und 7), die geeignet sind, aus dem bekannten $\varphi(\tau)$ die Funktion $\Phi(\omega)$ bzw. aus dem bekannten $\Phi(\omega)$ die Funktion $\varphi(\tau)$ abzuleiten. (Diese Schaltungsweise scheint in der Fachliteratur nicht bekannt zu sein.)

Zu solchen Messungen muß eine der obigen Funktionen abgebildet werden. Dies kann mit Hilfe eines Funktionsgenerators oder durch optische Abtastung der auf Papier aufgetragenen Kurve geschehen, eventuell kann aber die Kurve mit Hilfe von Operationsverstärkern, Potentiometern und Multiplikatoren auch im Analogrechner abgebildet werden.

Das Integrieren kann keineswegs im Intervall $(0; \infty)$ erfolgen, es genügt aber, wenn die Rechenmaschine innerhalb des Bereichs $(0; T)$ oder in einem entsprechenden Intervall $(\omega_1; \omega_2)$ integriert.

Mit der Schaltung gemäß *Abb. 6* kann die Spektraldichtefunktion aus der Autokorrelationsfunktion bestimmt werden. Die einzelnen Punkte der gesuchten Kurve erhält man durch die Änderung von ω_a .

Mit der Schaltung gemäß *Abb. 7* lassen sich aus der Funktion $\Phi(\omega)$ durch Änderung des Wertes von τ_1 die einzelnen Punkte der Funktion $\varphi(\tau)$ ermitteln.

In beiden Fällen ist zu beachten, daß die Rechenmaschine über ganzzahlige Perioden der Kosinusfunktion integrieren muß.

Nach dem Schaltprinzip der *Abb. 7* wurde aus der resultierenden Funktion $\Phi(\omega)$ die Anfangsstrecke der zugehörigen Autokorrelationsfunktion bestimmt. Zur Messung mußte die Funktion der Form $\Phi(\omega) = \frac{A}{\omega^{1,56}}$ ($A = 2,8 \cdot 10^{-7}$) mit dem Analogrechner abgebildet werden. Statt dessen wurde die Funktion

$$y = \frac{1}{(t + 0,05)^{1,56}} \tag{19}$$

abgeleitet, wodurch die Genauigkeit nicht beeinträchtigt wird, weil auch bei der Berechnung von E_m^2 die untere Grenze der Integration 0,05 und nicht 0 war. Es sei

$$z = \frac{1}{t + 0,05} . \tag{20}$$

Die Differenzierung der Gl. (19) und (20) nach der Zeit ergibt

$$\frac{dy}{dt} = - 1,56 yz = \dot{y}, \tag{21}$$

$$\frac{dz}{dt} = - z^2 = \dot{z}. \tag{22}$$

Die Bestimmung des Maßstabes hingegen

$$y_{\max} = \frac{1}{0,05^{1,56}} \approx 100 \quad z_{\max} = \frac{1}{0,05} = 20.$$

Sodann werden die Werte $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max}$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\max}$ angenommen.

Es sei schließlich $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max} = y_{\max} = 100$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\max} = z_{\max} = 20$.

Mit den Maxima gehen (21) und (22) in die Gestalt

$$100 \left(\frac{\dot{y}}{100} \right) = -1,56 \left(\frac{y}{100} \right) \left(\frac{z}{20} \right) 20 \cdot 100 \tag{21a}$$

$$20 \left(\frac{\dot{z}}{20} \right) = - \left(\frac{z}{20} \right) \left(\frac{z}{20} \right) 20 \cdot 20 \tag{22a}$$

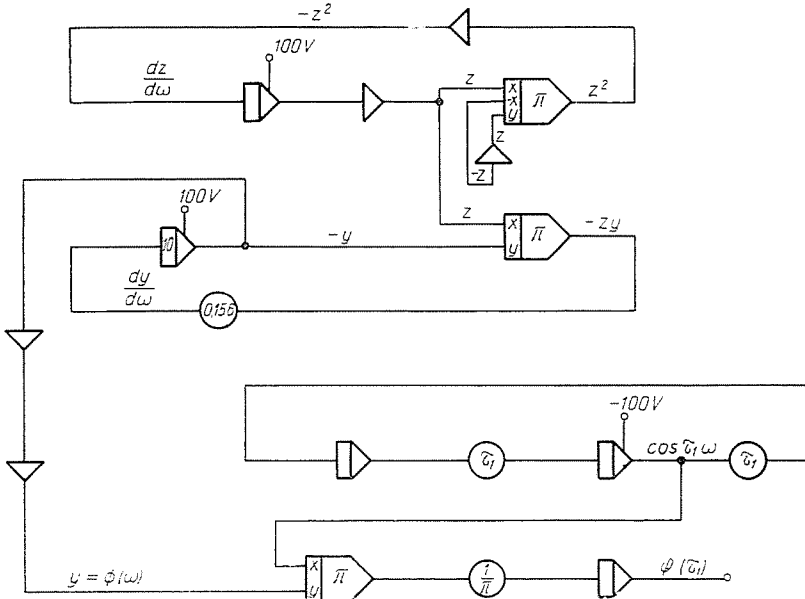


Abb. 8. Schaltung zur Bestimmung der Autokorrelationsfunktion nach dem Prinzip der Abb. 7.

über. Abb. 8 zeigt das Programm auf Grund der Annahme $T = 20 t$. Da die Funktion

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0,05}^5 \frac{A}{\omega^{1,56}} \cos \tau \omega d\omega$$

gesucht und auf der Rechenmaschine die Gleichung

$$y = \frac{1}{(t + 0,05)^{1,56}} = y(t)$$

abgebildet und das Resultat

$$\varphi_1 = \int_0^{t_1} y(t) \cos \tau t dt$$

hergeleitet wurde, muß dieses wegen der 20fachen Verlangsamung durch 20

dividiert und mit $A = 2,8 \cdot 10^{-7}$ multipliziert werden. Während der Meßdauer von $t_1 = 50$ sec ändert sich die Kreisfrequenz von $\omega_1 = 0,05 \text{ sec}^{-1}$ bis $\omega_2 = 5 \text{ sec}^{-1}$. Der Maschinenzeit $t_1 = 50$ sec entsprechen in der Wirklichkeit 2,5 sec.

Da

$$\omega_2 - \omega_1 = \Omega = 4,95 \text{ und } \tau = \frac{2 n \pi}{\Omega},$$

wobei $n = 1, 2, 3, \dots$, kann

$$\omega = \frac{4,95}{2,5} t$$

geschrieben werden. Auf diese Weise wurden die Werte der Verschiebungs-

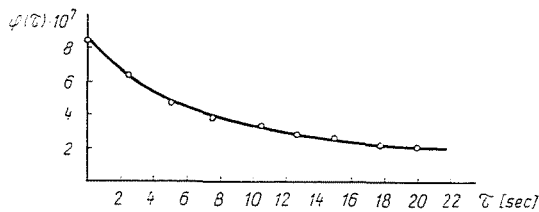


Abb. 9. Die Autokorrelationsfunktion

dauer ermittelt, womit die Anfangsstrecke der Autokorrelationsfunktion von Punkt zu Punkt bestimmt war.

Die Messungen haben auch die Richtigkeit der Gleichung

$$\varphi(0) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = E_m^2 = 8,3 \cdot 10^{-7} \tag{23}$$

bestätigt. Aus dem Resultat der Messung (Abb. 9) kann angenommen werden, daß

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = 0.$$

Dies gilt aber nur für echte stochastische Signale, die Spannungsschwankungen sind also stochastischer Natur. Diese Schlußfolgerung ist richtig, obwohl die Autokorrelationsfunktion nicht direkt aus den Spannungsabweichungsschwankungen, sondern aus der früher durch Messungen ermittelten Spektraldichtefunktion bestimmt wurde. Die Funktion

$$\Phi(\omega) = \frac{2,8 \cdot 10^{-7}}{\omega^{1,56}}$$

ist also tatsächlich die Spektraldichtefunktion eines stochastischen Signals.

4. Die Bestimmung der Verteilungs- und Häufigkeitskurve

Wie gezeigt, kann man aus der Spektraldichtefunktion die Autokorrelationsfunktion bestimmen, deren Maximum das mittlere Fehlerquadrat (E_m^2) ergibt, da aber

$$E_m^2 = 10^{-4} \sigma_u^2 \quad \text{und} \quad \sigma^2 = 4,84 \sigma_u^2,$$

kann das Streuungsquadrat bestimmt und mit diesem ein Programm aufgestellt werden, auf Grund dessen der Analogrechner die Häufigkeits- und Verteilungskurve $f(U)$ und $F(U)$ aufträgt.

Wird die Spannung als Wahrscheinlichkeitsvariable angesehen, so kann man die Gleichung der Dichtefunktion von Wahrscheinlichkeitsveränderungen bei Normalverteilung in der Gestalt

$$f(U) = y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U-\bar{U})^2}{2\sigma^2}} \quad (24)$$

aufschreiben. Es sei $v = U - \bar{U}$. Wenn man beide Seiten der Gleichung nach v differenziert, hat man

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{\sigma^2} v y. \quad (25)$$

Es sei

$$v = 3 \sigma t; \quad v_{\max} = 3 \sigma; \quad \text{und} \quad t_{\max} = 1 \text{ s.}$$

es wird also angenommen, daß alle vorkommenden Spannungswerte zwischen $\bar{U} \pm 3\sigma$ liegen. (Dies gilt für stochastische Vorgänge mit Normalverteilung fast immer.) Es sei $\tau = zt$ ($z = 50$), dann ist

$$\frac{dy}{3\sigma dt} = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot 3\sigma y t \quad (26)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{9}{z} \cdot y \left(\frac{\tau}{z} \right). \quad (27)$$

Die Abb. 10 zeigt das auf Grund der Gl. (27) fertiggestellte Programm. Da

$$F(U) = \int_{-\infty}^U f(z) dz = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^U e^{-\frac{(z-\bar{U})^2}{2\sigma^2}} dz,$$

wird die Verteilungsfunktion vom Integrator II angegeben, wenn

$$\beta = \frac{1}{z} = \frac{1}{50} = 0,02.$$

Die Verteilungs- und Dichtekurve wurden auch einzeln für die Bereiche $[\bar{U}, \bar{U} + 3\sigma]$ und $[\bar{U}; \bar{U} - 3\sigma]$ bestimmt. Der Maßstab $y = f(U)$ wurde so festgesetzt, daß

$$y_{\max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{0,2 \sqrt{2\pi}} = 2$$

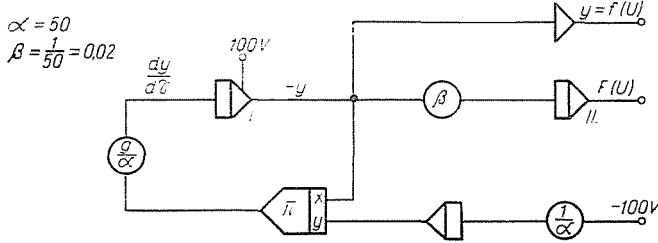


Abb. 10. Bestimmung der Verteilungs- und Häufigkeitsfunktion

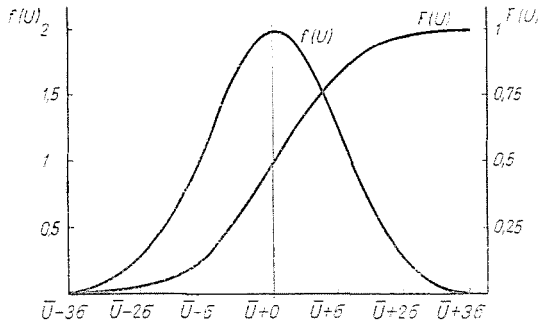


Abb. 11. Registrierung der Verteilungs- und Häufigkeitskurve

eben 100 V entspricht (dies begründet die Anfangsbedingungen des Integrators I).

Als Resultat der ausgeführten Messungen ergab sich der sehr kleine Wert $\sigma = 0,2$. Diese Tatsache erklärt sich hauptsächlich daraus, daß 1. die Messungen von kurzer Dauer waren und daß 2. die Spannungsqualität im Lehrstuhllaboratorium an Wochenvormittagen sehr gut ist. Die Abb. 11. zeigt die mit dem Wert $\sigma = 0,2$ aufgetragene Verteilungs- und die Häufigkeitskurve, die mit der Schaltung gemäß Abb. 10 bestimmt wurden.

Anhang

Es soll bewiesen werden, daß das mittlere Fehlerquadrat (E_m^2) dem Streuungsquadrat proportional ist.

Den Ausgangspunkt bildet die Definition des imaginären Spektrums

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (28)$$

Mit Umkehrung der Transformation hat man

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (29)$$

Bekanntlich ist

$$X(j\omega) X(-j\omega) = X^2(\omega). \quad (30)$$

Es sei

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t) dt. \quad (31)$$

Mit (29) nimmt (31) die Gestalt

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

an. Wird $\frac{1}{2\pi}$ aus dem Integral herausgehoben und werden die Beiden Integrale vertauscht, erhält man

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega. \quad (32)$$

$X^2(\omega)$ wird oft das Energiespektrum oder das Leistungsspektrum genannt. Wenn die Spektraldichtefunktion mit $X^2(\omega)$ ausgedrückt wird, erhält man [nach Gl. (6)] die Funktion

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X^2(j\omega).$$

Da $\Phi(\omega)$ bekanntlich reell und von gerader Ordnungszahl ist, wird

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X^2(\omega). \quad (33)$$

Mit Gl. (33) geht die Definitionsgleichung (13) in die Form

$$E_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(\omega) d\omega \quad (34)$$

über. Bei der Auswertung der Messungen war

$$x(t) = \frac{U - \bar{U}}{U_n}$$

Die Substitution dieses Wertes in Gl. (34) ergibt unter Beachtung der Gl. (31) und (32)

$$E_m^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(\frac{U - \bar{U}}{U_n} \right)^2 dt.$$

Da

$$\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{10^4}{2T} \int_{-T}^T \left(\frac{U - \bar{U}}{U_n} \right)^2 dt.$$

wird also auf Grund der Ableitung in Kap. 2.4.

$$\sigma_u^2 = 10^4 E_m^2.$$

Zusammenfassung

Da die Normvorschriften zur Zeit für die Beurteilung der Spannungsqualität nur das Maß der Spannungsabweichungen angeben (−10%, +5%), reichen sie für die Bewertung der Spannungsqualität nicht aus. Aus diesem Grunde muß die Spannungsqualität nach statistischen Methoden untersucht werden. Es wird gezeigt, wie die für die Spannungsqualität charakteristischen Funktionen (Verteilung, Häufigkeit, Autokorrelation, Spektraldichte, Streuung usw.) mit Hilfe eines Analogrechners bestimmt werden können. Resultate ausgeführter Messungen zur Bestimmung der Spektraldichte- und Autokorrelationsfunktion sowie der Streuung werden eingehend behandelt.

Literatur

1. E. D. F. Lehr- und Forschungsdirektion, 1959: La réglage de tension dans les réseaux de distribution.
2. AILLERET, P.: L'introduction de la mesure dans la notion de la qualité de service d'une distribution d'électricité et son intérêt au point de vue de la conception des réseaux. Bull. de la Soc. Fr. des Electriciens, 1956. jan. (7–13).
3. СОЛДАТКИНА, Л. А. — КОНЮКОВА, Е. А.: Экспериментальные исследование качества напряжения в городских электрических сетях. Известия ВУЗ. Энергетика, 1964. VIII. 8. (8–14).
4. WESTERBERG, M. O. — HAGSON, A. C. — LÖNNSTAM, L.: Experience acquise d'après la mesure de variations de tension. Lettres sur certains réseaux de distribution Suédois. Unipède Paris, 1964.
5. BARÓCSI Gy.: Lassú feszültségingadozások hatása aszinkron motorok üzemére. VEIKI. 1966. (ungarisch)
6. АРТЕЛИЕВ — ЖАРИКОВА — ПОКРОВСКИЙ: Определение качества напряжения. 1965. Manuskript.
7. BÜHLER, H. — CARONA, di C.: Statistische Untersuchung der Netzspannungschwankungen. Bull. SEV. 55 1065–1069 (1964).
8. GONZALEZ, G.: Delay Approximations for Correlation Measurements Using Analog Computers. IEEE. Trans. on El. Comp. 1965. jan. (606–616).

9. DIETRICH, E.: Elektronische Analogrechner. R. Oldenburg, München, 1960.
10. WIERWIELLE, W. W.: Delay of Time Functions by Means of Frequency Domain Sampling. Trans. AIEE. Comm. and El. März. 1962 (63—65).
11. WIERWIELLE, W. W.: A New Method for Obtaining Continuous Delays for the Analog Computer. IEEE. Trans on Aut. Contr. Jan. 1963 (73—74).
12. WIERWIELLE, W. W.: Experimental Study of a New Method of Time Delay for Analog Computers. IEEE. Trans. on El. Comp. Aug. 1965. (617—623).
13. FODOR, Gy.: Laplace Transforms in Engineering. Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.
14. TRUXAL, I. G.: Automatic Feedback Control System Synthesis. McGraw Hill, 1955.
15. LINDER, A.: Statistische Methoden. Birkhäuser Verlag, 1957.
16. BARÓCSI, Gy.: A feszültség statisztikus jellemzőinek meghatározása, VEIKI, 1965.
17. OMF-B-Studie. 1964. ápr. Villamos energia elosztással szemben jelentkező fogyasztói igények fejlődése következtében szükségessé váló műszaki fejlesztés fő irányai a villamosiparban.
18. БАРКАН, И. Д. — МАРКУШЕВИЧ, И. С.: Определение статистических критериев качества напряжения. Электричество, Москва, 1965. II. (11 — 15)
19. SZÉCSÉNYI, L.: Az operációkutatás alkalmazása sugaras elosztóhálózatok tervezésénél. Elektrotechnika, 1965. XII.

György Kovács, Budapest, I., Vám u. 2. Ungarn.