

# FEHLER DER LEISTUNGSMESSUNG IN STROMKREISEN MIT GLEICHRICHTERN

Von

F. CSÁKI und A. KÁRPÁTI

Lehrstuhl für Automatisation, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 3. März 1967)

Bei Leistungsmessungen mit dem Wattmeter in Stromkreisen mit gesteuerten Gleichrichtern ergeben sich sehr große Fehler. Die Aufmerksamkeit auf dieses Problem wurde durch eine vor kurzem erschienene Publikation [1] hingelenkt. In dieser wurde für den Fall gelücktes Gleichstromes über die Ermittlung der Meßfehlergröße in einem Einphasen-, Einweg- und Eintakt-Stromkreis berichtet, der einen Gleichrichter, einen Widerstand und eine Induktivität enthielt.

Die vorliegende Arbeit will das Prinzip der Untersuchungsmethode darlegen, zugleich aber auch die Resultate verallgemeinern. Die Verallgemeinerung soll nach drei Richtungen hin erfolgen: einerseits soll statt der Eintakt-Gleichrichtung eine solche mit beliebigem  $p$ -Takt untersucht, andererseits außer den Komponenten Widerstand und induktive Belastung auch diejenige der Gegenspannung (der Gegen-EMK) berücksichtigt werden. Schließlich werden Zusammenhänge nicht nur für den Fall des gelückten Gleichstromes sondern auch für den des lückenlosen Gleichstromes angegeben. Die Erörterung des Problemkreises in dieser allgemeinen Form ist — soweit Verfassern bekannt — sowohl in der ungarischen als auch in der internationalen Literatur neu. Als Sonderfall enthalten die von den Verfassern erzielten Ergebnisse auch die in der zitierten Publikation [1] angegebenen Zusammenhänge.

## 1. Bestimmung des Leistungsmesserfehlers

Es sei ein Leistungsmesser angenommen, der den Wert der Leistung unter einer Belastung mit dem Leistungsfaktor  $\cos \varphi = 1$  bei sinusförmigem Verlauf von Spannung und Strom genau mißt. Die gleiche Genauigkeit wird bei Messung von Belastungen mit einem niedrigeren Leistungsfaktor nicht erzielt werden können, weil der Strom  $I_u$  der an der Spannung liegenden Spule der Spannung  $U$  um einen Winkel  $\delta$ , der von der Strompulse hervorgerufene Fluß  $\Phi$  hingegen dem Strom  $I$  der Strompulse um einen Winkel  $\gamma$  nacheilt (*Abb. 1*).

Wie aus der Fachliteratur bekannt, errechnet sich der Fehler des Leistungsmessers zu

$$\varepsilon = (\delta - \gamma) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1-1)$$

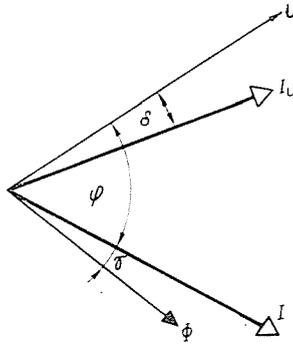


Abb. 1

## 2. Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse

Die Untersuchungen wurden an der in Abb. 2 dargestellten Anordnung durchgeführt.

Bei den Berechnungen war ein völlig symmetrisches Speisespannungssystem angenommen, der Effektivwert sämtlicher momentaner Sekundärphasenspannungen  $u_{s1}, u_{s2}, \dots, u_{sp}$  beträgt mitlin  $U_s$ , ihr Maximalwert hingegen  $\sqrt{2} U_s = U_{sm}$ . Auch gezündet wurden die einzelnen Elemente symme-

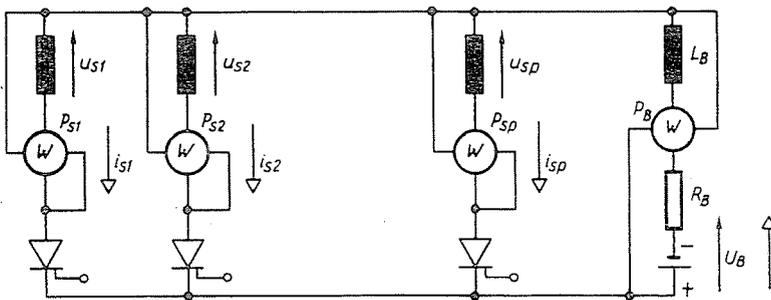


Abb. 2

trisch. Zur Vereinfachung der Berechnungen war der Speisetransformator als ideal angenommen. Seine Streuung wurde vernachlässigt, so daß die Kommutationserscheinungen unberücksichtigt bleiben konnten.

Die Leistung wurde mit dem Leistungsmesser  $P_{sp}$  gemessen. Seiner Spannungsspule wurde die sinusförmige Spannung der  $p$ -ten Phase des Transformators zugeleitet, sein Strom war dagegen pulsierend.

Die Stromform bei gelücktem Gleichstrom ist in *Abb. 3*, die Stromform bei lückenlosem Gleichstrom hingegen in *Abb. 4* dargestellt. Beide Abbildungen wurden für den Fall  $p = 2$  aufgetragen. In üblicher Weise bezeichnet  $\alpha'_z$  bzw.  $\alpha'_l$  den vom Nulldurchgang gerechneten Zünd- bzw. Löschwinkel.

Da nur gleichfrequente Ströme und Spannungen Leistungen zustande bringen, mißt der Leistungsmesser die der Grundwelle des pulsierenden Gleich-

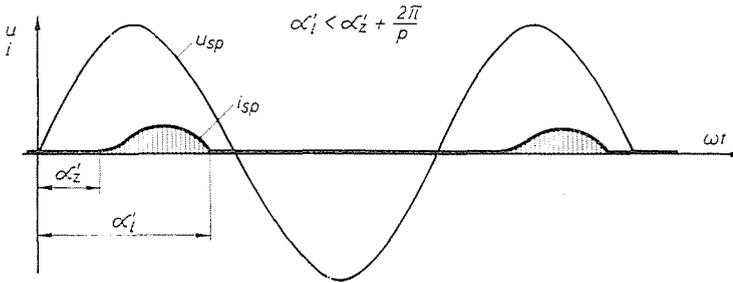


Abb. 3

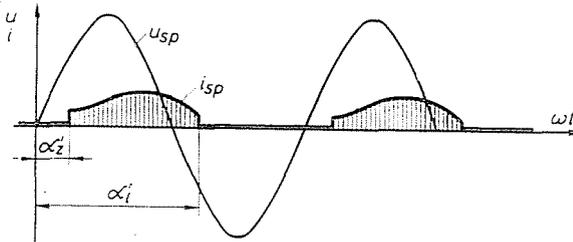


Abb. 4

stromes entsprechende Leistung. Wie groß hierbei der entstehende Fehler ist, bestimmt der Wert des  $\text{tg } \psi_1$  ( $\psi_1$  ist die Phasenverschiebung der Grundwelle des Stromes im Verhältnis zur Spannung  $u_{sp}$ ). Die wichtigeren Schritte des Berechnungsganges zur Bestimmung des  $\text{tg } \psi_1$  gehen aus dem Anhang hervor. Die Berechnungen haben folgende Endergebnisse: bei gelücktem Strom:

$$\text{tg } \psi_1 = \frac{\sin \varphi (\alpha'_l - \alpha'_z) - \sin (\alpha'_l - \alpha'_z) \cdot \sin (\alpha'_z + \alpha'_l + \varphi) + \cos \varphi (\alpha'_l - \alpha'_z) - \sin (\alpha'_l - \alpha'_z) \cdot \cos (\alpha'_z + \alpha'_l + \varphi) - 4 a \cos \left( \frac{\alpha'_l + \alpha'_z}{2} + \varphi \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha'_l - \alpha'_z}{2} \right) - 4 a \sin \left( \frac{\alpha'_z + \alpha'_l}{2} + \varphi \right) \cdot \sin \left( \frac{\alpha'_l - \alpha'_z}{2} \right)}{\dots} \quad (2-1)$$

worin  $\varphi = \arctg \omega L/R$  und  $a = U_b/\sqrt{2} U_s$ , bei lückenlosem Strom:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 = & \frac{\frac{2\pi}{p} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{p} \sin \left( 2 \alpha'_z + \frac{2\pi}{p} + \varphi \right) +}{\frac{2\pi}{p} \cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{p} \cos \left( 2 \alpha'_z + \frac{2\pi}{p} + \varphi \right) -} \\ & \frac{+ 4 a \sin \frac{\pi}{p} \cos \left( \alpha'_z + \frac{\pi}{p} \right) - 4 a' \sin \varphi \sin \frac{\pi}{p} \sin \left( \alpha'_z + \frac{\pi}{p} + \varphi \right)}{- 4 a \sin \frac{\pi}{p} \sin \left( \alpha'_z + \frac{\pi}{p} \right) + 4 a' \sin \varphi \sin \frac{\pi}{p} \cos \left( \alpha'_z + \frac{\pi}{p} + \varphi \right)} \end{aligned} \quad (2-2)$$

worin außer den bereits bekannten Bezeichnungen

$$a' = \cos \varphi \frac{\sin (\alpha'_z - \varphi) - \sin \left( \alpha'_z + \frac{2\pi}{p} - \varphi \right) e^{\frac{2\pi}{p} \operatorname{tg} \varphi}}{1 - e^{\frac{2\pi}{p} \operatorname{tg} \varphi}}$$

Will man nun an einem konkreten Beispiel prüfen, wie groß der Fehler ist, der sich bei Vernachlässigung der erwähnten Erscheinung ergibt, wird man der Einfachheit halber von der Annahme einer Zweitakt-Gleichrichtung mit Widerstand und Induktivität im Belastungskreis ausgehen. Hat der Belastungskreis keine Gegenspannung, ist  $a = 0$ . Es sei

$$\cos \varphi = 0,3$$

$$\alpha'_z = 150^\circ \text{ und}$$

$$(\delta - \gamma) \approx 10'.$$

Bei diesem letzteren handelt es sich bei guten Leistungsmessern um einen akzeptablen Wert.

Die Ermittlung des  $\alpha'_l$ -Wertes aus Abb. 5 [3] —  $\alpha'_l = 207^\circ$  — zeigt, daß es sich um gelückten Strom handelt.

Anhand der Beziehung (2-1) errechnet sich der Wert von  $\operatorname{tg} \psi_1$  zu

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\sin \varphi (\alpha'_l - \alpha'_z) - \sin (\alpha'_l - \alpha'_z) \sin (\alpha'_z + \alpha'_l + \varphi)}{\cos \varphi (\alpha'_l - \alpha'_z) - \sin (\alpha'_l - \alpha'_z) \cos (\alpha'_z + \alpha'_l + \varphi)} \approx 20$$

Mit diesem Wert hat man gemäß (1-1)

$$\varepsilon = \frac{10'}{60\%} \frac{2\pi}{360^\circ} 20 \approx 0,06 = 6\%.$$

Würde man denselben Leistungsmesser im gewöhnlichen Wechselstromnetz benützen, dann wäre der Fehler bei unverändertem Leistungsfaktor, d. h. bei  $\cos \varphi_1 = 0,3$  kleiner als 1%.

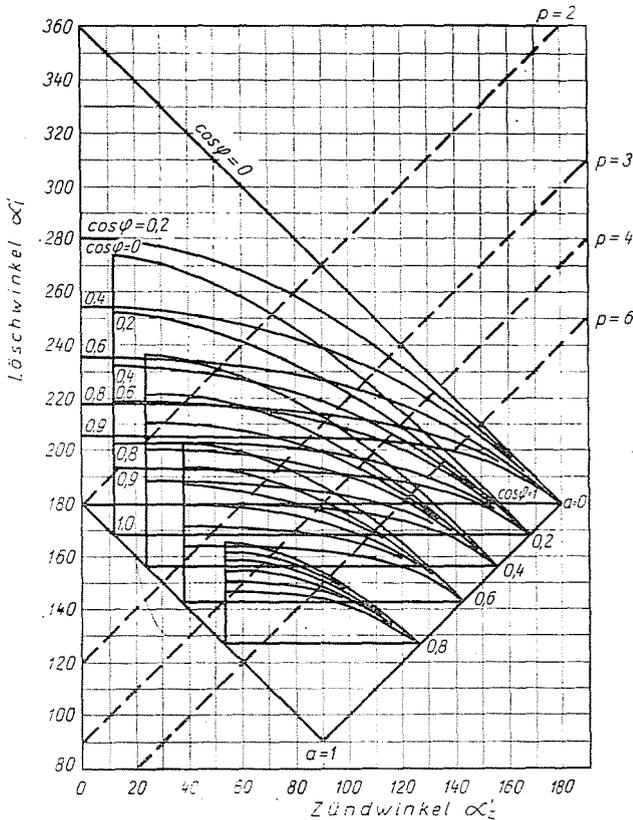


Abb. 5

### 3. Schlußfolgerungen

Aus dem geschilderten Gedankengang geht klar hervor, daß bei Messung der Leistung in Stromkreisen, die einen gesteuerten Gleichrichter enthalten, in gewissen Fällen mit erheblichen Fehlern gerechnet werden muß, und dies selbst dann, wenn man ein qualitativ einwandfreies Instrument benützt. (Ähnliche Fehler ergeben sich bei Messung des Verbrauchs mit einem Induktionszähler.)

Ein Problem dieser Art ergibt sich etwa bei Bestimmung des Wirkungsgrades von Gleichrichteranlagen, wenn die aufgenommene Leistung an der in Abb. 2 gezeigten Stelle mit dem Leistungsmesser  $P_{sp}$ , die abgegebene

Leistung hingegen im gleichgerichteten Stromkreis ( $P_B$ ) gemessen wird.  $P_{sp}$  mißt mit dem hier berechneten erheblichen Fehler, weil an seiner Spannungsspule die rein sinusförmige Spannung des Transformators liegt, während  $P_B$  die Leistung mit der üblichen Genauigkeit mißt. Aus diesem Grunde liefern derartige Messungen ganz unzuverlässige Resultate, ja mitunter ergeben sich — je nach der Konstruktion des Leistungsmessers (d. h. je nach Vorzeichen und Größe der Differenz  $\delta - \gamma$ ) — selbst Wirkungsgrade von mehr als 100%.

Zur Herabsetzung des Fehlers müssen hochpräzise Instrumente (kompensierte Leistungsmesser oder überdurchschnittlich empfindliche Instrumente) verwendet werden. Darüber hinaus empfiehlt es sich, in Stromkreisen, die einen gesteuerten Gleichrichter enthalten, stets Leistungsmesser mit niedrigem Leistungsfaktor zu benutzen.

#### 4. Anhang

Die Bestimmung von  $\text{tg } \psi_1$  erfolgt mit den Bezeichnungen der *Abbildungen* 2, 3 und 4.

##### 4.1. Berechnungsgang

a) Zunächst wird geklärt, ob es sich um lückenlosen oder gelückten Strom handelt, und sodann der zeitliche Ablauf  $i_{sp}(x)$  ( $x = \omega t$ ) des Stromes  $i_{sp}$  bestimmt.

b) Es folgt die Bestimmung der Grundwellen von  $i_{sp}(x)$ , d. h. der Werte von  $a_1 \cos x$  und von  $b_1 \sin x$ .

c) Aus der Formel  $\text{tg } \psi_1 = -\frac{a_1}{b_1}$  ergibt sich schließlich der gesuchte Wert von  $\text{tg } \psi_1$ .

Mit der Lösung der unter Punkt a) angeführten Aufgaben befaßt sich die Literatur [2] ausführlich, es wird also genügen, hier lediglich die Endergebnisse anzuführen.

Anhand des bekannten  $\alpha'_z$ , des  $\cos \varrho$  und des  $a$  wird aus *Abb. 5* [3] der Wert von  $\alpha'_l$  bestimmt. Ist  $\alpha'_l \leq \alpha'_z + \frac{2\pi}{p}$ , dann liegt der Fall des gelückten Stroms vor.

Ergibt sich aus der Abbildung, daß  $\alpha'_l > \alpha'_z + \frac{2\pi}{p}$ , dann ist der Strom lückenlos, und in der Tat gilt

$$\alpha'_l = \alpha'_z + \frac{2\pi}{p}.$$

Die Sekundärspannung einer beliebigen Phase  $p$  schreibt sich in der Form

$$u_{sp} = \sqrt{2} U_s \sin \omega t = \sqrt{2} U_s \sin \alpha.$$

Die Berechnung des Stromes derselben Phase ergibt a) für den gelückten Strom:

$$i_{sz}(\alpha) = \frac{\sqrt{2} U_s}{R} \left\{ \cos \varphi \sin(\alpha - \varphi) - a + \right. \\ \left. + [a - \cos \varphi \sin(\alpha'_z - \varphi)] \cdot e^{-\frac{\alpha - \alpha'_z}{\operatorname{tg} \varphi}} \right\}. \quad (4-1)$$

worin  $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$  und  $a = U_b/\sqrt{2} U_s$ .

Diese Lösung hat Gültigkeit für den Bereich  $\alpha'_z \leq \alpha \leq \alpha'_1$ .

b) für die kontinuierliche Leitung:

$$i_j(\alpha) = \frac{\sqrt{2} U_s}{R} \left\{ \cos \varphi \sin(\alpha - \varphi) - a + \right. \\ \left. + [a' - \cos \varphi \sin(\alpha'_z - \varphi)] \cdot e^{-\frac{\alpha - \alpha'_z}{\operatorname{tg} \varphi}} \right\}, \quad (4-2)$$

worin  $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$ ;  $a = U_b/\sqrt{2} U_s$

und

$$a' = \cos \varphi \frac{\sin(\alpha'_z - \varphi) - \sin\left(\alpha'_z + \frac{2\pi}{p} - \varphi\right) e^{\frac{2\pi}{p \operatorname{tg} \varphi}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{p \operatorname{tg} \varphi}}}.$$

Diese Lösung ist im Bereich  $\alpha'_z \leq \alpha \leq \alpha'_z + \frac{2\pi}{p}$  gültig. Da

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \quad \text{und}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx,$$

hat man bei gelücktem Strom

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha'_z}^{\alpha'_1} i_{sz}(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha.$$

Nach Integration und entsprechender trigonometrischer Umordnung erhält man

$$\begin{aligned}
 a_1 = & \frac{\sqrt{2} U_s}{R} \left\{ -\frac{1}{4} \sin 2\varphi (\alpha'_1 - \alpha'_2) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin (\alpha'_2 + \alpha'_1 - \varphi) \sin (\alpha'_1 - \alpha'_2) + \\
 & + a (\sin \alpha'_2 - \sin \alpha'_1) - [a - \cos \varphi \sin (\alpha'_2 - \varphi)] \cdot \\
 & \left. \sin \varphi \left[ e^{-\frac{\alpha'_1 - \alpha'_2}{\operatorname{tg} \varphi}} \cos (\alpha'_1 + \varphi) - \cos (\alpha'_2 + \varphi) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit der transzendenten Gleichung (2)

$$[\cos \varphi \sin (\alpha'_1 - \varphi) - a] e^{\frac{\alpha'_1}{\operatorname{tg} \varphi}} = [\cos \varphi \sin (\alpha'_2 - \varphi) - a] e^{\frac{\alpha'_2}{\operatorname{tg} \varphi}}, \quad (4-3)$$

die das  $\alpha'_2$  bestimmt, und nach einer weiteren Serie trigonometrischer Umordnungen hat man endlich

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1}{\frac{U_s \sqrt{2}}{R} \left( -\frac{1}{2} \right) \cos \varphi} = & \sin \varphi (\alpha'_1 - \alpha'_2) - \\
 & - \sin (\alpha'_1 - \alpha'_2) \sin (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \varphi) + \\
 & + 4 a \cos \left( \frac{\alpha'_2 + \alpha'_1}{2} + \varphi \right) \sin \left( \frac{\alpha'_1 - \alpha'_2}{2} \right).
 \end{aligned} \quad (4-4)$$

Ähnlich erhält man durch Berechnung des Integrals

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha'_2}^{\alpha'_1} i_{s_2}(z) \sin z \, dz$$

den Wert  $b_1$  und mit ganz ähnlichen Vereinfachungsgriffen das Endergebnis

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1}{\frac{U_s \sqrt{2}}{R} \left( \frac{1}{2} \right) \cos \varphi} = & \cos \varphi (\alpha'_1 - \alpha'_2) - \\
 & - \sin (\alpha'_1 - \alpha'_2) \cos (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \varphi) - \\
 & - 4 a \sin \left( \frac{\alpha'_2 + \alpha'_1}{2} + \varphi \right) \sin \left( \frac{\alpha'_1 - \alpha'_2}{2} \right).
 \end{aligned} \quad (4-5)$$

Als Quotienten von (4-4) und (4-5) hat man in der Form

$$-\frac{a_1}{b_1} = \operatorname{tg} \psi_1$$

genau die Gleichung (2-1).

Da sich der durch die Beziehung (4-2) gegebene Strom  $i_f(x)$  von dem durch (4-1) bestimmten Strom  $i_{sz}(x)$  nicht wesentlich unterscheidet (lediglich die Koeffizienten des Exponentialgliedes sind verschieden), gelangt man mit der gleichen Ableitung und ganz ähnlichen Vereinfachungen zum Endresultat (2-2).

### Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den Fehlern beim Messen der Leistung mit Leistungsmessern in Stromkreisen, die Gleichrichter enthalten. Die Fehlergröße bestimmen die Verfasser für den Fall, daß der Belastungskreis einen Widerstand, eine Induktivität und Gegenspannung (Gegen-EMK) aufweist, wobei sie von der Annahme einer beliebigen  $p$ -Takt-Gleichrichtung ausgehen.

### Literatur

1. ERLICKI, M. S.—SCHEIBER, D.—BENURI, J.: Power Measurement Errors in Controlled Rectifier Circuits. IEE Transaction in Industry and General Applications. July/August 1966 Volume IGA-2, No. 4.
2. CSÁKI, F.—BARKI, K.—GANSZKY, K.—IPSITS, I.: Ipari elektronika. Tankönyvkiadó, Budapest 1966 (ungarisch).
3. Industrial Electronics Reference Book by Electronic Engineers of the Westinghouse Electric Corporation 1948.

Prof. Dr. Frigyes CsÁKI }  
 Attila KÁRPÁTI } Budapest XI., Egry József u. 18—20. Ungarn.