

# UNTERSUCHUNG DER LAUFZEITSCHWANKUNGEN VON BANDFILTERN

Von

M. HABERMAJER

Lehrstuhl für Automatisation, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 31. März 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. F. CsÁKI

Die Entwicklung in den Mehrkanal-Trägerfrequenzeinrichtungen hat gezeigt, daß es keineswegs genügt, die einzelnen Kanäle auf ihre Dämpfungscharakteristik allein zu prüfen. Die Voraussetzungen für eine verzerrungsfreie Übertragung wird man — in einem gegebenen Frequenzbereich — nur durch geeignete gemeinsame Bestimmung der Dämpfungs- und der Laufzeitcharakteristik schaffen können.

Gestützt auf die früheren Publikationen, prüft Verfasserin in vorliegender Arbeit die Bandpässe von Trägerfrequenzeinrichtungen auf ihre Laufzeiteigenschaften. Sie bespricht die Methoden zur Berechnung der Laufzeitcharakteristik für die drei bekanntesten Filtertypen und illustriert schließlich ihre Darlegungen an je einem Beispiel.

In der bisher publizierten Literatur — so z. B. in [1] — finden sich je nach den an die Dämpfung gestellten Anforderungen, verschiedene Untersuchungen über die den einzelnen Filtertypen zugeordneten Laufzeitcharakteristiken. Zunächst soll deshalb eine Übersicht über die Laufzeitcharakteristiken der wichtigsten für die Trägerfrequenztelefonie in Frage kommenden Bandpässe gegeben werden.

## 1. Allgemeine Bestimmung der Laufzeit transformierter Filter

### 1.1. Frequenztransformation

In allen Fällen, in denen die vom Bandpaß geforderte Dämpfung als symmetrisch bezeichnet werden kann, ist es allgemein üblich, ihn durch die Frequenztransformation

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\delta} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right), \quad (1)$$

aus einem Tiefpaß herzuleiten [2]. In (1) ist

$\Omega$  — die normierte Frequenz des Tiefpasses,

$\omega_0 = \sqrt{\omega_u \cdot \omega_{0b}}$  das geometrische Mittel der unteren ( $\omega_u$ ) und der oberen ( $\omega_{0b}$ ) Grenze des praktischen Durchlaßbereichs,

$\delta = \omega_{0b} - \omega_u$  die Bandbreite,

$\omega$  — die willkürliche Bandpaßfrequenz.

Sofern die Forderung gestellt wird, die Bandpaßcharakteristik habe eine streng lineare Symmetrie zu einer mittleren Frequenz zu zeigen, wird man zu einem anderen Bemessungsverfahren [3] oder zu einer anderen Transformation [4] greifen müssen.

### 1.2. Transformierte Gruppenlaufzeitcharakteristik

Im allgemeinen Fall wird die Gruppenlaufzeitcharakteristik, kurz die Laufzeit eines transformierten Filters folgendermaßen berechnet.

Bekanntlich läßt sich die Laufzeit aus dem für den Übertragungsfaktor  $\Gamma$  gültigen Zusammenhang  $\Gamma = a + jb$  gemäß

$$\tau = \frac{db}{d\omega}$$

ermitteln, worin  $b = \arccos \Gamma$  die Phasencharakteristik bedeutet.

Beträgt die Phasencharakteristik des Übertragungsfaktors des entsprechenden Tiefpasses

$$b(\Omega) = \arccos \Gamma(\Omega),$$

dann gilt nach den Regeln der indirekten Differentiation für die Laufzeit des transformierten Bandpasses

$$\tau(\omega) = \frac{d}{d\Omega} \arccos \Gamma(\Omega) \frac{d\Omega}{d\omega} = \tau_r(\Omega) \frac{d\Omega}{d\omega}, \quad (2)$$

worin  $\tau_r(\Omega)$  die Laufzeit des entsprechenden Tiefpasses bezeichnet.

Betrachtet man nun die Funktion  $\frac{d\Omega}{d\omega}$ , dann hat man aus (1)

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{\omega_0}{\delta} \left( \frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right) = \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right], \quad (3)$$

woraus hervorgeht, daß die Laufzeitcharakteristik des transformierten Bandpasses zur Kreisfrequenz  $\omega_0$  der Bandmitte nicht symmetrisch sein wird.

### 1.3. Die Frequenzabhängigkeit des transformationsbedingten Laufzeitunterschiedes

Unschwer läßt sich die Richtigkeit folgender Zusammenhänge beweisen:

1. In einem gegebenen Bandpaß tritt der höhere Laufzeitwert stets auf der kleineren der dem gleichen  $|\Omega|$  zugehörigen Frequenzen auf. Bezeichnet

man nämlich mit  $\omega_1$  die niedrigere, mit  $\omega_2$  die höhere der einem bestimmten  $|\Omega|$  zugeordneten Kreisfrequenzen und prüft man in diesen Punkten den Wert von (3), dann hat man

$$\left. \frac{d\Omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \tag{4}$$

$$\left. \frac{d\Omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_2} = \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right]. \tag{5}$$

Hieraus aber folgt eindeutig, daß

$$\left. \frac{d\Omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} > \left. \frac{d\Omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_2},$$

was im Sinne von (2) die Richtigkeit obiger Feststellung beweist.

2. Der durch die Frequenztransformation bedingte, an den Bandgrenzen auftretende Laufzeitunterschied hängt in der Praxis nicht von der Bandbreite, sondern lediglich von der Frequenz der Bandmitte ab.

Den Beweis hierfür liefert die Betrachtung der Differenz zwischen den Punkten  $\omega_u$  und  $\omega_{ob}$  der Funktion  $\frac{d\Omega}{d\omega}$  :

$$\left. \frac{d\Omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_u} - \left. \frac{d\Omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{ob}} = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{\omega_{ob}}{\omega_u} - \frac{\omega_u}{\omega_{ob}} \right] = \frac{\omega_{ob} + \omega_u}{\omega_0^2} \approx \frac{2}{\omega_0}. \tag{6}$$

Die hierin angewandte Näherung

$$\frac{\omega_{ob} + \omega_u}{2} \approx \omega_0$$

ist für je einen Kanal oberhalb 12 kHz zulässig.

3. Der Laufzeitunterschied an den Bandrändern ist im untersten Kanal am größten, wie dies aus (6) gleichfalls erhellt.

4. Ihren Maximalwert erreicht die transformationsbedingte Laufzeit-schwankung im untersten Kanal.

Nimmt man nämlich an, die Laufzeit habe ihren Minimalwert auf der Frequenz der Bandmitte (wie beispielsweise beim Butterworth- und beim Cauer-Filter geraden Grades), dann ist  $\omega = \omega_0$ ,  $\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{2}{\delta} = \text{konstant}$  (wenn  $\delta = \text{konstant}$ ), und die Laufzeit hat auf dieser Frequenz bei gleichen Filtertypen und gleichem Grad in jedem Kanal den gleichen Wert. Auf der Frequenz des Laufzeit-Höchstwertes hingegen, im Punkt  $\omega = \omega_0$ , nimmt der Wert

$\frac{dQ}{d\omega}$ , und damit auch derjenige der Laufzeit, im Sinne von (4) in den höher gelegenen Kanälen allmählich ab. Unsere Behauptung behält ihre Gültigkeit auch für den Fall bei, daß die Laufzeit ihren Minimalwert nicht auf der Frequenz der Bandmitte, sondern auf einer von dieser abweichenden, jedoch höheren Frequenz hat. (Bei niedrigeren Frequenzen kommt dies nämlich wegen der Eigenheiten der Transformation nicht in Frage.) Ein solcher Fall liegt bei den Tschebyscheffschen und bei den Cauer-Filtern von ungeradem

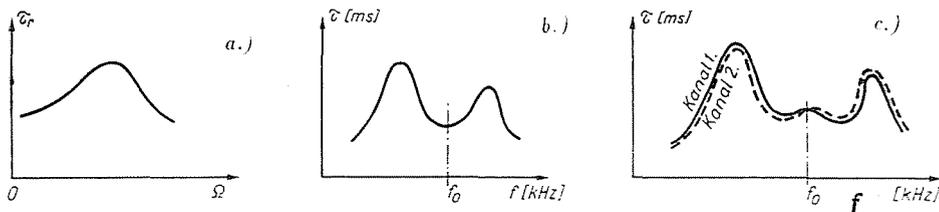


Abb. 1

Grad vor. Hierbei nimmt im Sinne von (3), sofern  $\Delta\omega$  die Abweichung der Minimum-Stelle von der Bandmittenfrequenz bezeichnet, das

$$\left. \frac{dQ}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0+\Delta\omega} = \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega_0 + \Delta\omega} \right)^2 \right]$$

für die übereinander liegenden Kanäle allmählich zu. Die Laufzeitschwankungen im Bandpaß nehmen also in den höher gelegenen Kanälen immer mehr ab.

Solcherart werden also die Laufzeitkurven zweier übereinander gelegener Kanäle im Verhältnis zueinander den in *Abb. 1c* dargestellten Verlauf zeigen. Dies gilt allerdings nur für Filter gleichen Grades, weil nur solche auch gleiche Tiefpaßcharakteristiken haben.

Aus diesen Feststellungen geht hervor, daß sich die strengsten Anforderungen aus dem untersten Kanal ergeben, weshalb im überwiegenden Teil der folgenden numerischen Untersuchungen dieser betrachtet werden soll.

## 2. Die Laufzeitschwankung der bekannteren Filtertypen

Laufzeituntersuchungen können auf verschiedene Weise vorgenommen werden. Hier wollen wir uns der in der Praxis am meisten verbreiteten Methode bedienen, die den komplexen Übertragungsfaktor aus dem reellen Teil der Dämpfungsfunktion bestimmt. Der Wert der Laufzeit kann entweder nach dem Bausteinprinzip aus den Polen des komplexen Übertragungsfaktors oder durch Derivation des imaginären Teiles des Übertragungsfaktors ermittelt werden.

2.1. Butterworth-Filter

Die Dämpfung des Butterworth-Filters wird durch die Gleichung

$$a = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}) \tag{7}$$

beschrieben. Den Wert von  $\varepsilon$  bestimmt die im Durchlaßbereich maximal zulässige Dämpfungsschwankung. Da an den Grenzen des Durchlaßbereiches  $|\Omega| = 1$ , wird

$$\varepsilon \leq \sqrt{e^{2a_{\max}} - 1}. \tag{8}$$

Den Wert der erforderlichen Grade bestimmt die im Sperrbereich geforderte minimale Dämpfung. Bezeichnet man die kleinere der Sperrfrequenz-Transformierten eines Bandpasses mit  $\Omega_{OB} - 1$ , dann hat man aus (7)

$$n \geq \frac{\lg \frac{e^{2a_{\min}} - 1}{\varepsilon^2}}{\lg \Omega_{OB}}. \tag{9}$$

Aus den Eigenheiten der Transformation ergibt sich, daß sich der Wert von  $\Omega_{OB}$  mit der Aufwärtsverschiebung des Bandes erhöht, während damit zugleich auch die erforderlichen Grade abnehmen. Da von den Transformierten ( $\Omega_{OB}$  bzw.  $\Omega_U$ ) der Bandpaß-Sperrfrequenzen die dem höheren Frequenzwert zugeordnete Transformierte den niedrigeren Wert liefert, wird im weiteren  $\Omega_{OB}$  die Grundlage der Berechnung bilden.

Wie aus (7) hervorgeht, schreiben sich die Wurzeln aus dem Quadrat des Übertragungsfaktor-Absolutwertes zu

$$\varepsilon^2 \Omega^{2n} = -1, \text{ d. h. } e^{j\pi(2s-1)} = \varepsilon^2 \Omega^{2n},$$

und hieraus

$$\Omega_s = \frac{e^{j \frac{\pi}{2n} (2s-1)}}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

Wählt man — weil der Zähler des Übertragungsfaktors ein Hurwitzches Polynom sein muß — die Wurzeln der oberen Halbebene, d. h. berücksichtigt man die dem  $s = 1, 2, \dots, n$  zugehörigen Wurzeln, dann errechnet sich der Übertragungsfaktor zu

$$a + jb = \sum_{s=1}^n \ln \left[ 1 - \Omega_s^n \varepsilon_e^{-j \frac{\pi}{2n} (2s-1)} \right]. \tag{10}$$

Die weitere Ableitung der Laufzeit erfolgt auf Grund von [5].  
Mit der Reihenentwicklung

$$\ln(1-x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

hat man

$$\begin{aligned} a + jb &= - \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^m e^{-j(2s-1)\frac{m\pi}{2n}}}{m} = \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^m}{m} \sum_{s=1}^n e^{-j(2s-1)\frac{m\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Die zweite Summe in dieser Gleichung ist die Summe einer  $n$ -gliedrigen geometrischen Reihe. Mit ihrem Wert wird

$$a + jb = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^m e^{-jm\frac{\pi}{2}} \sin \frac{m\pi}{2}}{m \cdot \sin \frac{m\pi}{2n}}$$

und hieraus

$$b = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^m \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{m \cdot \sin \frac{m\pi}{2n}}.$$

Da  $\sin^2 m \frac{\pi}{2}$  bei geradem  $m$  gleich Null, bei ungeradem  $m$  dagegen gleich 1 ist, kann die Gleichung

$$b = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{2m-1}}{(2m-1) \sin(2m-1) \frac{\pi}{2n}}$$

geschrieben werden.

Die Laufzeit errechnet sich als Ableitung von  $b$  nach  $\Omega$  zu

$$\tau_r = \frac{db}{d\Omega} = \sqrt[n]{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{2m-2}}{(2m-1) \sin(2m-1) \frac{\pi}{2n}}. \quad (11)$$

Da der Zähler die Periode  $2n$  hat, gilt

$$\tau_r = \sqrt[n]{\varepsilon} \sum_{m=1}^n \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{2m-2}}{\sin(2m-1) \frac{\pi}{2n}} \{1 - (\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{2n} + (\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{4n} - \dots\},$$

und damit endlich

$$\tau_r = \sqrt[n]{\varepsilon} \frac{\sum_{m=1}^n \frac{(\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{2m-2}}{\sin(2m-1) \frac{\pi}{2n}}}{1 + (\Omega \sqrt[n]{\varepsilon})^{2n}} \quad (12)$$

### 2.2. Tschebyscheff-Filter

Die Bestimmung der Laufzeitcharakteristik dieses Filters folgt dem Gedankengang des vorhergehenden Punktes [5].

Die Dämpfung des Filters ist durch die Formel

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} 2n\sigma + T_{2n}(\Omega)}{\operatorname{ch} 2n\sigma - 1} \quad (13)$$

bestimmt, in der

- $n$  — der Filtergrad,
- $\sigma$  — eine für die Dämpfung im Durchlaßintervall kennzeichnende Konstante und schließlich

$T_{2n}(\Omega)$ —das Tschebyscheffsche Polynom ist.

Diese Beziehung ist äquivalent mit der bekannteren Formel

$$a = \frac{1}{2} \ln [1 + \varepsilon^2 T_{2n}(\Omega)].$$

Es sei die im Durchlaßintervall zulässige Dämpfung  $a_{\max}$ . Dann ist

$$\sigma = \frac{1}{n} \operatorname{arth} e^{-a_{\max}} \quad (14)$$

Der erforderliche Grad, ( $n$ ) läßt sich auf Grund von  $\Omega_{OB}$  und der minimalen Sperrdämpfung aus (13) berechnen, wenn man berücksichtigt, daß

$$T_n(\Omega) = \cos n\theta \quad (15)$$

worin

$$\theta = \arccos \Omega \quad (16)$$

Anhand der Formel (13) kann der Wert von  $n$  nicht in einem Schritt ermittelt werden, weil in ihr auch der Wert von  $\sigma$  unbekannt ist. Setzt man diesen im ersten Schritt gleich Null, dann läßt sich aus dem so berechneten  $n$  ein  $\sigma$  bestimmen, mit dem sich dann nach neuerlichem Ansetzen der Gleichung (13) der  $n$ - und schließlich der endgültige  $\sigma$ -Wert ermitteln läßt.

Aus (13) können die Wurzeln

$$\Omega_s = \cos \left[ \frac{(2s-1)\pi}{2n} - j\sigma \right]$$

aus dem Quadrat des Übertragungsfaktor-Absolutwertes abgelesen werden. Mit den Wurzeln der oberen Halbebene kann für die komplexe Dämpfung folgende Gleichung mit Produktdarstellung geschrieben werden:

$$a + jb = \sum_{s=1}^n \ln \left\{ \cos \left[ \frac{(2s-1)\pi}{2n} - j\sigma \right] - \cos \theta \right\} + \text{const.}$$

In dieser Gleichung ist das  $\Omega$  durch den  $\cos \theta$  ersetzt. In Exponentialform nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} a + jb = \sum_{s=1}^n \ln \left[ 1 - e^{j\theta} e^{-\sigma} e^{-j \frac{(2s-1)\pi}{2n}} \right] + \\ + \ln \left[ 1 - e^{-j\theta} e^{-\sigma} e^{-j \frac{(2s-1)\pi}{2n}} \right] + \text{const.} \end{aligned} \quad (17)$$

Die in (17) figurierenden beiden Summen haben die gleiche Form wie (10), wenn man  $(\sqrt{\varepsilon} \Omega)$  durch die Ausdrücke  $e^{j\theta} \cdot e^{-\sigma}$  oder  $e^{-j\theta} \cdot e^{-\sigma}$  ersetzt. Mit den bei der Berechnung des Butterworth-Filters benutzten Umgestaltungen hat man

$$\begin{aligned} b = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 e^{-(2m-1)\sigma} \cos(2m-1)\theta}{(2m-1) \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 e^{-(2m-1)\sigma} T_{2m-1}(\Omega)}{(2m-1) \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Wegen

$$\frac{d}{d\Omega} T_n(\Omega) = n U_{n-1}(\Omega),$$

worin

$$U_n(\Omega) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

das Tschebyscheffsche Polynom zweiter Gattung darstellt, gilt

$$\tau_r = \frac{db}{d\Omega} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot e^{-(2m-1)\sigma} U_{2m-2}(\Omega)}{\sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}}.$$

Setzt man statt  $U_{2m-2}(\Omega)$  den Ausdruck  $\frac{\sin(2m-1)}{\sin \Theta}$ , geht diese Gleichung in die Form

$$\tau_r = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)\sigma} e^{j(2m-1)\Theta}}{j \sin \Theta \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)\sigma} e^{-j(2m-1)\Theta}}{j \sin \Theta \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}}$$

über.

Beide Summen sind dem Zusammenhang (11) ähnlich. Führt man also dieselben Vereinfachungen durch und benützt man die Symmetrie der  $\sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}$ -Glieder, dann erhält man nach Umordnung der Summen und nach Zusammenziehung der ähnlichen Glieder die endgültige Formel für  $\tau$  in der Gestalt

$$\tau_r = \frac{\sum_{m=1}^n \frac{2U_{2m-2}(\Omega) \operatorname{sh}(2n-2m+1)\sigma}{\sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}}}{\operatorname{ch} 2n\sigma + T_{2n}(\Omega)} \tag{19}$$

Die in (19) figurierenden Polynome  $T_{2n}$  und  $U_{2m}$  finden sich in den im Literaturverzeichnis unter [6] oder [12] angeführten Publikationen.

### 2.3. Der Cauersche Filter

Die Laufzeit dieses Filters wollen wir nach der allgemein üblichen Methode der Bemessung auf Grund der Betriebsparameter bestimmen.

Die Anforderung an die Dämpfung sei gegeben, als

$$a = \frac{1}{2} \ln |T|,$$

worin

$$|T|^2 = 1 + |\varphi|^2.$$

Im allgemeinen ist  $\varphi$  oder  $|\varphi|^2$  gegeben.

Beim Butterworth-Filter ist  $|\varphi|^2 = \varepsilon^2 \omega^{2n}$ , beim Tschebyscheff-Filter hingegen war es in der Form

$$|\varphi|^2 = \frac{T_{2n}(\Omega) + 1}{\operatorname{ch} 2n\zeta - 1}$$

gegeben.

Beim Cauer-Filter hingegen ist

$$\varphi(P) = H \prod_{r=1}^{\frac{\varrho-1}{2}} \frac{P^2 + P_r^2}{P^2 P_r^2 + 1}, \text{ wenn } \varrho \text{ gerade,} \quad (20a)$$

bzw.

$$\varphi(P) = HP \prod_{r=1}^{\frac{\varrho-1}{2}} \frac{P^2 + P_r^2}{P^2 P_r^2 + 1}, \text{ wenn } \varrho \text{ ungerade ist.} \quad (20b)$$

Hierin ist

$$P = j\Omega,$$

$H$  = eine aus dem Verhältnis der Durchlaß- zur Sperrbereichsdämpfung bestimmbare Konstante,

$P_r = \Omega_{\infty r}^{-1}$  die Wurzeln des Cauerschen Polynoms

$\varrho$  = der Grad des Filters.

Die Wurzeln  $P_r$  des in (20) gegebenen Polynoms  $\varphi(P)$  werden nach Cauer so bestimmt, daß sich sowohl im Durchlaß- als auch im Sperrbereich eine gleichmäßige Dämpfung ergibt. In den Schaubildern 192 und 193 des Buches von Cauer [7] sind die Werte von  $\frac{\varphi}{H}$  für die Fälle  $\varrho = 4$  und  $\varrho = 5$  aufgetragen. Wie aus diesen Abbildungen hervorgeht, hat die im Durchlaßbereich angenommene Schwankung des Wertes von  $\varphi(P)$  stets den gleichen Wert  $\frac{H}{L}$ , und ebenso haben die im Durchlaßbereich angenommenen Minimalwerte die gleiche Größe  $HL$ . Der Wert von  $L$  errechnet sich aus den Beziehungen (21a) bzw. (21b):

$$L = z \left( \prod_{r=1}^{\frac{\varrho-1}{2}} \Omega_{er} \right)^{-2}, \text{ wenn } \varrho \text{ ungerade und} \quad (21a)$$

$$L = \left( \prod_{r=1}^{\frac{\varrho}{2}} \Omega_{er} \right), \text{ wenn } \varrho \text{ gerade ist.} \quad (21b)$$

Die Abbildungen 192 und 193 in Cauers Buch [7] zeigen auch, daß der Durchlaßbereich bis zum Wert  $\Omega = z$  reicht und der Sperrbereich beim Wert  $\Omega = k$  beginnt. Hier besteht der Zusammenhang  $k = z^{-1}$ .

Die die Funktion  $\varphi(P)$  bestimmende Gleichheit  $P_r = \Omega_{\infty r}^{-1}$  und der für die Stellen mit minimaler Dämpfung kennzeichnende  $\Omega_{er}$ -Wert können mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktion ( $sn$ ) und des vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung ( $\mathbb{K}$ ) wie folgt ermittelt werden:

$$P = \Omega_{\infty r}^{-1} = z sn \frac{\varrho - 2v + 1}{\varrho} \mathbb{K} (v = 1, 2, \dots, \varrho/2). \quad (22a)$$

$$\Omega_{er}^{-1} = z sn \frac{\varrho - 2v}{\varrho} \mathbb{K} (v = 1, 2, \dots, \frac{\varrho - 1}{2}). \quad (22b)$$

worin

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}} \quad (22c)$$

Die Funktionen  $sn$  und  $K$  sind z. B. bei JAHNKE und EMDE [8] tabelliert. In unseren Berechnungen zur Ermittlung der Wurzeln hielten wir uns an die von CAUER im Anhang seines Buches gegebenen Kurventafeln, die wir als ausreichend genau betrachten, so daß wir von der numerischen Lösung der obigen Gleichungen Abstand nehmen konnten. Die den gegebenen Dämpfungsvorschriften und dem gegebenen  $z$  (der Frequenzdiskrimination) zugehörigen Werte für  $H$ ,  $q$ ,  $P$ , und  $\Omega_{ev}$  wurden also den erwähnten Kurventafeln entnommen.

Mit dem bekannten  $\varphi(P) = \frac{h(P)}{f(P)}$  wird die Funktion  $\Gamma(P) = \frac{g(P)}{f(P)}$  folgendermaßen bestimmt: Je nachdem, ob  $\varphi$  gerade oder ungerade ist, sucht man die Wurzeln der Gleichung  $f + jh = 0$  bzw. die der Gleichung  $f + h = 0$  und wählt aus diesen die in der linken Halbebene gelegenen Wurzeln aus. Mit diesen hat man die Möglichkeit, die Funktion  $g(P)$  in ihrer Produktdarstellung anzusetzen. Aus dem so bekannten  $\Gamma(P)$  aber kann die Laufzeit nun schon bestimmt werden.

Da damit  $g(P)$  in der Produktdarstellung bekannt ist, kann man sich auch des Bausteinverfahrens bedienen, nach dem sich  $\tau_r$  aus den den einzelnen konjugierten komplexen Wurzeln zugehörigen Teillaufzeiten zusammensetzen läßt. Es sei nun der elementare Übertragungsfaktor

$$\gamma = (P - P_z)(P - \bar{P}_z)$$

untersucht, in dem  $P_z$  die Nullstelle des Übertragungsfaktors bezeichnet.

Mit  $P = j\Omega$  wird

$$\gamma = -\Omega^2 - j\Omega(P_z + \bar{P}_z) + P_z \cdot \bar{P}_z,$$

und für die Phase gilt:

$$\varphi = \arctg \frac{-\Omega(P_z + \bar{P}_z)}{P_z \bar{P}_z - \Omega^2},$$

für die resultierende Laufzeit hingegen, sofern  $P_z, P_{z'}, \dots, P_z$  die Nullstellen des Übertragungsfaktors sind,

$$\tau_r = \sum_z^n \frac{d\varphi}{d\Omega} = - \sum_z^n (P_z + \bar{P}_z) \frac{\Omega^2 + (P_z \bar{P}_z)}{\Omega^4 + (P_z^2 + \bar{P}_z^2)\Omega^2 + (P_z \cdot \bar{P}_z)^2} \quad (23)$$

### 3. Zahlenbeispiele zur Untersuchung der bekannteren Filtertypen

Die hier folgenden Berechnungen sollen die im vorangehenden Abschnitt erörterten Methoden illustrieren und einen Vergleich der einzelnen Typen miteinander ermöglichen. Die Berechnungen gelten für den Fall folgender Anforderungen:

Zu bestimmen sei für den Fall eines 4-kHz-Trägerfrequenzrasters die Laufzeitcharakteristik für den bei 12 kHz beginnenden ersten sowie für den bei 32 kHz beginnenden sechsten Kanal, wenn der praktische Durchlaßbereich

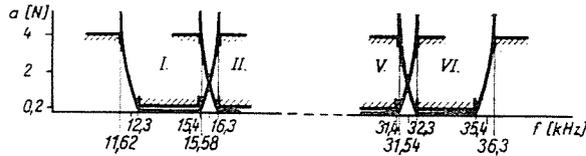


Abb. 2

bei der üblichen praktischen Bandbreite von 3,1 kHz in einem Abstand von 300 Hz von den Trägerfrequenzen beginnt und die zulässige Dämpfungsschwankung kleiner ist als 0,2 N, wenn ferner der praktische Sperrbereich in der anderen Richtung in einem Abstand von 300 Hz von der Trägerfrequenz beginnt und der Minimalwert der Dämpfung 4 N beträgt. Im Sinne von *Abb. 2* z. B. ist für den ersten Kanal  $f_u = 12,3$  kHz,  $f_o = 15,4$  kHz und  $f_{OB} = 16,3$  kHz.

#### 3.1. Numerische Untersuchung der Laufzeitschwankung des Butterworth-Filters

Aus (8) bzw. (9) in Abschnitt 2.1 ergibt sich für den ersten Kanal ein  $\varepsilon \approx 0,7$  bzw. ein  $n = 11$ . Ähnlich errechnete sich der erforderliche Grad für den 6. Kanal zu 11.

Die anhand der Formel (12) ermittelten  $\tau$ -Werte eines Butterworth-Filters vom Grad  $n = 11$  gehen aus Tabelle 1 und aus *Abb. 3* hervor. Bestimmt wurde ferner die Laufzeitcharakteristik für den ersten und sechsten Kanal eines transformierten Bandpasses.

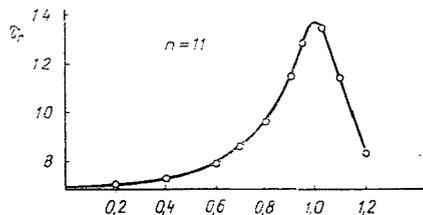


Abb. 3

Tabelle 1

Laufzeitwerte für einen Butterworth-Tief- und Bandpaß,  $n = 11$ 

Tiefpaß	$\Omega$	1,20	1,10	1,05	1,00	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60	0,40	0,20	0
	$\tau_r$	8,31	11,72	13,37	13,77	12,80	11,49	9,63	8,66	8,08	7,43	7,12	7,03
Bandpaß 12 kHz—16 kHz	$\tau_1$ ms	0,99	1,37	1,56	1,59	1,47	1,31	1,09	0,97	0,89	0,80	0,75	0,72
	$\tau_2$ ms	0,75	1,07	1,23	1,27	1,19	1,07	1,01	0,82	0,78	0,73	0,72	0,72
	$f_1$ kHz	12,03	12,16	12,23	12,30	12,37	12,44	12,58	12,72	12,86	13,16	13,46	13,76
	$f_2$ kHz	15,75	15,58	15,49	15,40	15,31	15,23	15,06	14,89	14,72	14,40	14,08	13,76
Bandpaß 32 kHz—36 kHz	$\tau_1$ ms	0,90	1,27	1,44	1,48	1,37	1,23	1,03	0,92	0,85	0,78	0,74	0,72
	$\tau_2$ ms	0,81	1,15	1,31	1,35	1,26	1,13	0,95	0,86	0,81	0,75	0,72	0,72
	$f_1$ kHz	32,01	32,15	32,23	32,30	32,37	32,45	32,60	32,75	32,90	33,20	33,51	33,81
	$f_2$ kHz	35,71	35,56	35,48	35,40	35,32	35,24	35,08	34,92	34,76	34,44	34,13	33,81

Aus den gemäß (1) ermittelten  $\Omega$ -Werten berechnen wir sodann nach Einführung des Zusammenhanges  $\delta = 2\pi f_\delta$  die Frequenzwerte

$$f_{1,2} = \frac{f_\delta \cdot \Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_\delta \cdot \Omega}{2}\right)^2 + f_0^2} \quad (24)$$

und multiplizieren die diesen zugehörigen  $\frac{d\Omega}{d\omega}$ -Werte mit den entsprechenden  $\tau_r$ -Werten. Die Produkte dieser Multiplikationen liefern die zur Auftragung

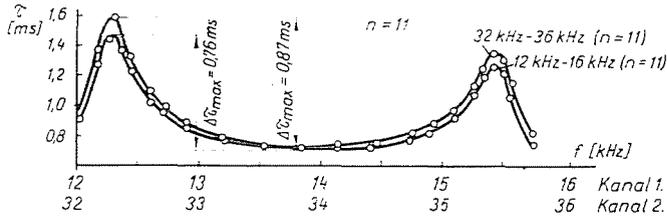


Abb. 4

der Bandfilter-Laufzeitkurve erforderlichen Werte. Sie sind gleichfalls aus Tabelle 1 bzw. aus Abb. 4 ersichtlich.

Die Berechnungen erfolgten auf sechs Dezimalstellen genau, in die Tabelle wurden jedoch der besseren Übersicht halber bloß die auf zwei Dezimalstellen genauen Werte aufgenommen.

### 3.2. Numerische Untersuchung der Laufzeitschwankungen des Tschebyscheff-Filters

Bei Bestimmung der Laufzeit eines den gegebenen Dämpfungsanforderungen genügenden Tschebyscheff-Filters hatten Voruntersuchungen gezeigt, daß die Dämpfungskurve, die aus dem Tschebyscheffschen  $T_{12}$ -Polynom vom ersten Grade (mit  $n = 6$ ) hergeleitet wurde, die Dämpfungsanforderungen aller sechs Bänder befriedigt. Unter solchen Umständen konnten die Bestimmungen auf das erste Band beschränkt werden, welches hinsichtlich der Laufzeit die strengsten Anforderungen stellt.

Im Durchlaßbereich ist die maximal zulässige Dämpfung  $a_{\max} = 0,2$  N. Nach (14) kann

$$e^{0,2} = \text{cth } 6\sigma = 1,221403$$

gesetzt werden, woraus

$$\sigma = 0,19215.$$

Zur Kontrolle des  $n$ -Wertes bestimmt man den der oberen Sperrbereichsgrenze, d. h. den dem  $f = 16,3$  kHz zugehörigen Wert der transformierten

Kreisfrequenz. Aus (1) erhält man ein  $\Omega_{OB} = 1,5$ , somit ist

$$T_{12}(\Omega_{OB}) = T_{12}(1,5) = 51\,600$$

und weiterhin

$$\operatorname{ch} 2n \sigma = \operatorname{ch} 2,306 = 5,05.$$

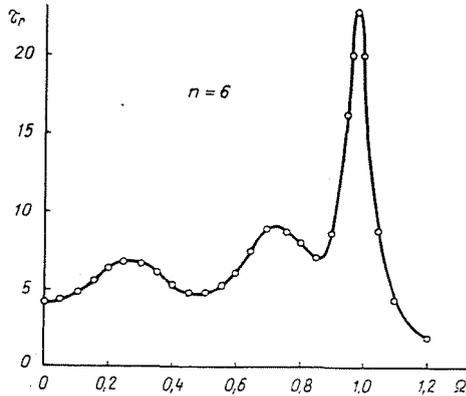


Abb. 5

Damit hat man gemäß (13)

$$a(\Omega_{OB}) = \frac{1}{2} \ln \frac{5,05 + 51\,600}{4,05} = 4,74 N > 4 N.$$

der Filtergrad entspricht also. Bei einem  $n = 5$  ergäbe sich nach dem gleichen Rechnungsgang bloß eine Sperrdämpfung von  $3,77 N < 4 N$ .

Die zur Bestimmung der Laufzeitcharakteristik des Filters erforderlichen Tschebyscheffschen Polynome  $T_{12}$  vom ersten Grad und  $U_1 - U_{10}$  zweiter Gattung finden sich in den im Schrifttum unter [6] angeführten Tabellen. Unter Benützung dieser Polynome und der Formel (19) lassen sich die  $\tau_r$ -Werte nun schon rechnerisch ermitteln. Die so bestimmten Werte der relativen Laufzeit sind — auf zwei Dezimalstellen genau abgerundet —, in *Tabelle 2* zusammengefaßt bzw. in *Abb. 5* aufgetragen. Die Laufzeiten für

Tabelle 2

Laufzeitwerte eines Tschebyscheffschen Tiefpasses,  $n = 6$

$\Omega$	1,2	1,1	1,05	1,00	0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65
$\tau_r$	1,91	4,37	8,79	20,00	22,69	20,81	16,18	8,56	7,01	8,01	8,8	8,87	7,55
$\Omega$	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0
$\tau_r$	6,06	5,10	4,72	4,81	5,27	6,02	6,65	6,79	6,32	5,50	4,79	4,34	4,19

den ersten und den sechsten Kanal eines auf Grund dieser Daten und der Gleichung (24) transformierten Bandpasses gehen aus Abb. 6 hervor.

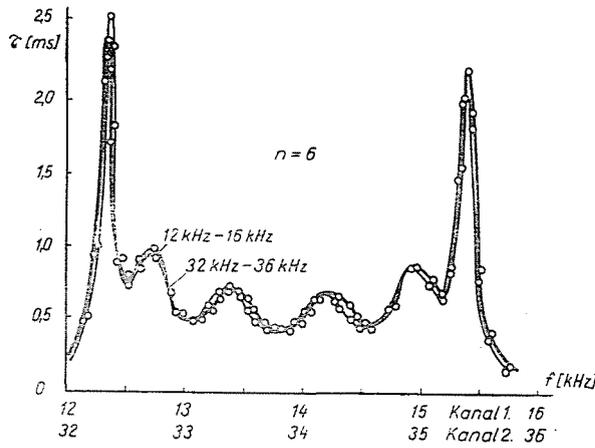


Abb. 6

### 3.3 Numerische Untersuchung der Laufzeitschwankung des Cauer-Filters

Da beim Cauerschen Filter unter der Einwirkung des Durchlaßintervalls nicht  $|\Omega| = 1$ , sondern  $|\Omega| = z$  gilt, wird der in der Frequenztransformation figurierende Wert  $f_0$  nicht die Breite des Durchlaßintervalls bedeuten.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 7a und 7b erhält man aus der Gleichheit

$$\Omega = \frac{f_c}{f_0} \left( \frac{f}{f_c} - \frac{f_0}{f} \right) = \frac{1}{f_0} \left( f - \frac{f_0^2}{f} \right)$$

und mit Benützung der Zusammenhänge

$$f_0^2 = f_h \cdot f_{-h} = f_z \cdot f_{-z} \quad \text{und} \quad z = k^{-1}$$

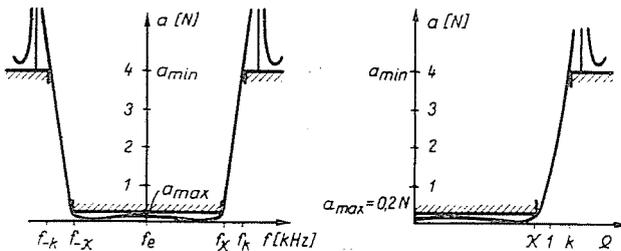


Abb. 7

die Beziehungen

$$f_{\delta}^2 = (f_z - f_{-z})(f_k - f_{-k}),$$

$$k = \frac{f_k - f_{-k}}{f_{\delta}} \quad \text{und} \quad z = \frac{f_z - f_{-z}}{f_{\delta}}. \quad (25)$$

Die Berechnungen sollen zunächst für den von 12 kHz bis 16 kHz reichenden Kanal durchgeführt werden. Die Dämpfungsanforderungen sind die gleichen wie bei den vorangegangenen Berechnungen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 192 bzw. 193 des Buches von CAUER [7] ist mithin

$$a_{\min} = 4 N \qquad a_{\max} = 0,2 N$$

$$f_{+z} = 15,4 \text{ kHz}, \quad f_{-z} = 12,3 \text{ kHz}, \quad f_{+k} = 16,3 \text{ kHz},$$

$$f_{-k} = 11,62 \text{ kHz}$$

und aus (25)

$$f_{\delta} = 3,8094 \text{ kHz}, \quad z = 0,814, \quad k = 1,23.$$

Auf Grund dieser Werte hat man aus Abb. 446 des zitierten Werkes ein  $\varrho = 4$  bzw. ein  $n = \frac{\varrho + 1}{2} = 2,5$ . Aus (22) bzw. aus Abb. 433 des gleichen Werkes ergeben sich die Werte der normierten Dämpfungspole zu

$$P_1 = \Omega_{\infty 1}^{-1} = 0,7605 \quad \text{bzw.} \quad P_2 = \Omega_{\infty 2}^{-1} = 0,35 \quad \text{und}$$

$$\Omega_{e1} = 1,45$$

aus diesen

$$L = (\Omega_{\infty 1} \Omega_{\infty 2})^{-2} = (\Omega_{\infty 1}^{-1} \Omega_{\infty 2}^{-1})^2 = 0,07085 \quad \text{und}$$

$$L^2 \sim 0,005.$$

Da es sich bei diesen Ausgangsdaten für die Berechnung des Cauer-Filters um graphisch bestimmte Werte handelt, rechnen wir auch im weiteren nur mit der entsprechenden Genauigkeit.

Nach CAUER [7] ist

$$a_{\max} = \frac{1}{2} \ln(1 + H^2 L^2)$$

und hieraus durch Substitution von  $a_{\max} = 0,2 N$

$$H = 9,9.$$

Die der Kontrolle halber durchgeführte Berechnung der minimalen Dämpfung ergibt

$$a_{\min} = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{H^2}{L^2} \right) = 4,94 \gg 4 N.$$

Mit den Werten von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $H$  können  $\varphi(P) = \frac{h(P)}{f(P)}$  und im Sinne von Punkt 2.3 auch  $\Gamma(P) = \frac{g(P)}{f(P)}$  bestimmt werden.

Die Bestimmung der Wurzeln von  $g(P)$  ergibt sich als Lösung der Gleichung

$$f + jh = (P_1^2 P_2^2 + jH) P^4 + (P_1^2 + P_2^2)(1 + jH) P^2 + 1 + jHP_1^2 P_2^2 = 0.$$

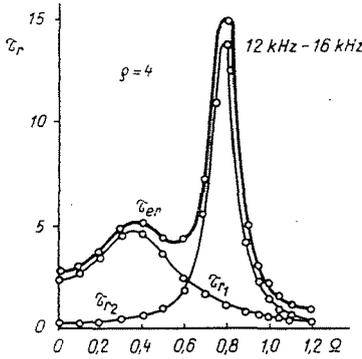


Abb. 8a

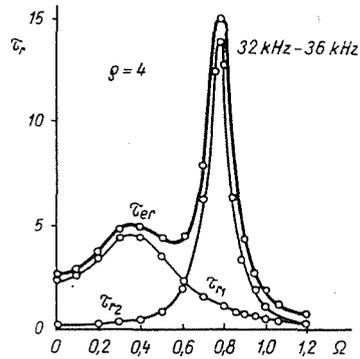


Abb. 8b

Nach Substitution der betreffenden Werte hat man für die in der linken Halbebene liegenden Wurzeln von  $g(P)$

$$P_\alpha; \bar{P}_\alpha = -0,2375 \pm j 0,3740,$$

$$P_\beta; \bar{P}_\beta = -0,0711 \pm j 0,7892.$$

Mit den so nun schon bekannten Werten läßt sich schreiben

$$g(P) = A_0(P - P_\alpha)(P - \bar{P}_\alpha)(P - P_\beta)(P - \bar{P}_\beta),$$

worin  $A_0 = \sqrt{P_1^4 P_2^4 + H^2}$ . Da der Nenner  $f(P)$  von  $\Gamma(P)$  identisch ist mit dem von  $\varphi(P)$ , ist  $f(j\Omega)$  real, wie dies aus dem Nenner der Gleichungen (20a) und (20b) ersichtlich ist. Bei den Nullübergängen wechselt  $f(j\Omega)$  sein Vorzeichen, woraus sich ein Phasensprung bzw. im Verlauf von  $\tau$  ein Dirac-Delta-sprung ergibt, der jedoch keine zu Signalverzerrungen führende Laufzeit-schwankung zur Folge hat.

Die Bestimmung der durch  $\Gamma(P)$  verursachten Laufzeitschwankung anhand der Formel (23) verursacht nun keine Schwierigkeiten mehr.

Die Werte der mit den Wurzeln  $P_\alpha$  und  $P_\beta$  bestimmten Funktion  $\tau_r(\Omega)$  gehen aus *Tabelle 3* hervor, während ihre Kurve in *Abb. 8a* aufgetragen ist.

Die auf völlig gleiche Weise durchgeführte Berechnung für den von 32–36 kHz reichenden sechsten Kanal ergibt als erforderlichen Grad ein  $\varrho = 4$  und aus der Lösung der Gleichung  $f + jh = 0$  die auf der linken Halbebene liegenden Wurzeln

$$P_\alpha; \bar{P}_\alpha = -0,2375 \pm j 0,3681 \text{ bzw.}$$

$$P_\beta; P_\beta = -0,0696 \pm j 0,7875.$$

Die mit diesen Wurzeln berechneten  $\tau_r(\Omega)$ -Werte sind in *Tabelle 3* zusammengefaßt bzw. in *Abb. 8b* aufgetragen.

**Tabelle 3**  
 Laufzeitwerte eines Cauerschen Tiefpasses,  $\varrho = 4$

$\Omega$	1,2	1,1	1,05	1	0,95	0,9	0,8	0,78	0,7	0,6
12 kHz $\tau_r$ 16 kHz	0,84	1,23	1,57	2,11	3,06	4,96	14,82	—	7,12	4,25
32 kHz $\tau_r$ 36 kHz	0,80	1,16	1,23	1,92	2,70	4,29	13,92	15,18	7,95	4,38
					0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
					4,42	5,02	4,65	3,62	2,79	2,65
					4,42	5,04	4,74	3,71	2,96	2,70

3.4. Vergleich der Laufzeitschwankungen bei den Butterworth-, den Tschebyscheff- und den Cauer-Filtern

Die Zahlenbeispiele der vorangehenden Punkte bieten die Möglichkeit, die einzelnen Filtertypen — ohne Anspruch auf Allgemeingültigkeit — miteinander auf ihre Laufzeitcharakteristiken hin zu vergleichen. Zu diesem Zweck sollen die in *Abb. 9* gemeinsam aufgetragenen drei Tiefpaßcharakteristiken betrachtet werden. Zu dieser Abbildung sei vorweg bemerkt, daß in ihr die Charakteristik des Cauerschen Tiefpasses in geändertem Maßstab aufscheint, damit die Durchlaßintervalle zur Deckung gelangen (s. Punkt 2.3).

Am Schaubild fällt sogleich auf, daß der Tschebyscheff-Filter die stärksten relativen Laufzeitschwankungen aufweist. Diejenige des Cauer-Filters ist zwar gleichfalls größer als die des Butterworth-Filters, zieht man jedoch in Betracht, daß bei diesem letzteren ein Grad von  $n = 11$ , beim Cauer-Filter hingegen bloß ein solcher von  $n = 4$  erforderlich ist, leuchten die wirtschaft-

lichen Vorzüge des Cauer-Filters vor den beiden anderen Filtertypen sofort ein. Darüber hinaus hat die minimale Dämpfung im Sperrbereich einen Wert von  $a_{\min} = 4,9 N \gg 4 N$ , in dieser Hinsicht ist also der Cauer-Filter überdimensioniert. Seine große Sperrdämpfung verdankt er den an der  $j\Omega$ -Achse liegenden Polen, die die Laufzeitcharakteristik nicht beeinflussen, das Laufzeitmaximum hingegen dem nahe an der  $j\Omega$ -Achse gelegenen Wurzel paar von  $\Gamma$ . Die relative Teillaufzeit, die aus dem nahe an der reellen Achse liegenden Wurzel paar resultiert, nimmt mit wachsendem  $\Omega$  monoton ab.

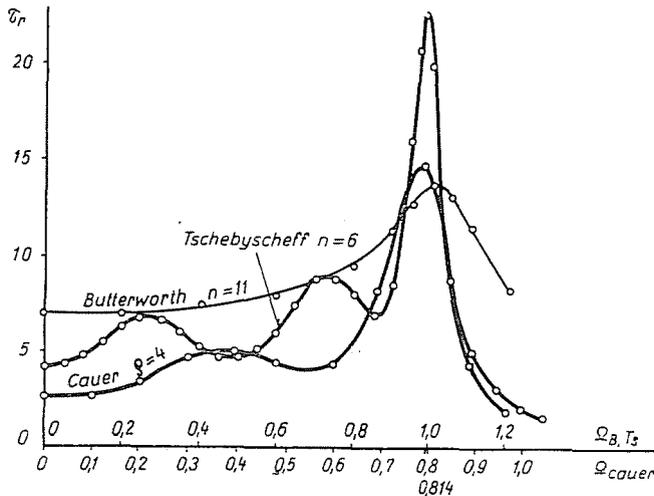


Abb. 9

Hieraus folgt, daß sich beim Cauer-Filter im größten Teil des Durchlaßintervalls nur kleinere Laufzeitschwankungen zeigen. Enthält die den Kanal durchlaufende Information nur wenige hochfrequente Komponenten, dann tritt eine kleine Verzerrung auf. Muß hingegen der Filter das Informationsspektrum limitieren, wird man wegen der an den Grenzen des Durchlaßintervalls auftretenden Laufzeitmaxima mit stärkeren Verzerrungen rechnen müssen. Trotzdem kann im Vergleich mit den beiden anderen Filtertypen der Cauer-Filter als der vorteilhafteste bezeichnet werden.

Die Charakteristik des Tschebyscheff-Filters ähnelt derjenigen des Cauer-Filters insofern, als sie an der Grenze des Durchlaßintervalls gleichfalls ein scharfes Maximum aufweist und im Durchlaßbereich selbst um einen verhältnismäßig konstanten Wert herum schwankt. Allerdings sind sowohl die Schwankungen als auch die an den Rändern des Bereichs auftretenden Spitzen weit größer als beim Cauer-Filter.

Die relative Laufzeit des Butterworth-Filters steigt im Durchlaßbereich mit wachsendem  $\Omega$  monoton an, auch zeigt er am Ende des Durchlaßbereiches

keine so steile Spitze wie die beiden anderen Filtertypen. Trotzdem ist seine Verwendung wegen seines hohen Grades unrentabel.

Die Formel (2) bietet die Möglichkeit zum Übergang von der relativen Laufzeit zur Laufzeitcharakteristik des transformierten Filters. Eine Zusammenfassung der Laufzeitschwankungen für den im Frequenzband von 12 bis 16 kHz gelegenen Kanal 1 bei einer Dämpfungsvorschrift von  $a_{\max} = 0,2 N$  und  $a_{\min} = 4 N$  und bei 3,1 kHz Durchlaßintervall enthält die *Tabelle 4*.

Tabelle 4

Filtertyp	Grad	$\Delta\tau_{\max}(\text{ms})$
Butterworth	11	0,87
Tschebyscheff	6	2,19
Cauer	4	1,40

#### 4. Filterbemessung bei vorgeschriebener Laufzeitschwankung

In der Praxis wird für Filter nicht nur die Dämpfungscharakteristik, sondern auch die Laufzeitschwankung vorgeschrieben. Sofern die Laufzeitschwankung eines Filters mit der durch die Dämpfungscharakteristik bestimmten Minimalphase den zulässigen Wert übersteigt, bedarf es eines Phasen- bzw. Laufzeitausgleichs, es sei denn, es besteht die Möglichkeit, die Dämpfungsforderungen zu ändern. Wir wollen das letztere Verfahren prüfen, mit dessen Hilfe eine bestimmte Laufzeitschwankung auf zweierlei Arten realisiert werden kann:

a) Durch schrittweise Änderung des Grades bzw. der Frequenzdiskrimination einer geeigneten Filtertype bestimmt man die zugehörigen Laufzeitschwankungen und wählt den den Anforderungen am besten entsprechenden Filter.

b) Man geht von einem tabellierten Polynom, wie etwa von den in [9] oder [10] enthaltenen Tabellenwerten aus, die Laufzeiten mit bestimmten Toleranzen ergeben. Mit Benützung eines solchen Polynoms und der an der imaginären Achse liegenden Dämpfungspole (die keine Laufzeitschwankung verursachen) bildet man eine den gegebenen Zielsetzungen entsprechende Dämpfungscharakteristik aus.

Bei Befolgung des Verfahrens unter a) zeigt sich, daß die Laufzeitschwankung nur dann abnimmt, wenn auch der Grad des Filters kleiner wird. So verringert sich die Laufzeitschwankung beim Butterworth- und beim Tschebyscheffschen Filter mit abnehmender Frequenzdiskrimination schneller als beim Cauer-Filter. Näheres findet sich in der im Literaturverzeichnis unter [11] angeführten Publikation.

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit will an Hand einer Behandlung der drei bekanntesten Filtertypen eine Übersicht über deren Laufzeitschwankungen bieten, doch will dies keineswegs besagen, daß sie auch die optimalen Werte angibt. Durch Ausgestaltung geeigneter Dämpfungscharakteristiken kann bei kleinerer Frequenzaufteilung auch die Realisierung geringerer Laufzeitschwankungen erzielt werden. Ohne Zweifel ließe sich die Richtigkeit dieser Behauptung für einen Filtertyp mit maximal flacher Dämpfungscharakteristik im Durchlaßbereich und mit einer im Tschebyscheffschen Sinne schwankenden Dämpfungscharakteristik auch numerisch nachweisen. Dies wird aber weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben müssen.

## Literatur

1. LIM, I. T.—SCAUDAU, J. O.: Group Delay Characteristics of Chebyshev Filters. IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT, 11th Sept., 1964 Nr. 3.
2. GÉHER, K.: Lineáris hálózatok (Lineare Netze) II., Tankönyvkiadó, Budapest 1964 (ungarisch).
3. CARASSA: Band-pass Filters Having Quasi Symmetrical Attenuation and Group Delay Characteristics. Alta Frequenza, Sept. 1961.
4. BELEVICS: Elements in the Design of Conventional Filters. Electrical Communication, März 1949.
5. ORCHARD: The Phase and Envelope Delay of Butterworth and Chebyshev Filters. CT-7, No. 2, Juni 1960, p. 180.
6. Tables of Chebyshev Polynomials. National Bureau of Standards. 1952.
7. CAUER, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. I., 2. Aufl. Akademie-Verlag, Berlin 1954.
8. JAHNKE, E.—EMDE, F.: Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl., Teubner Verlag, Leipzig 1948.
9. ULBRICH, E.—PILOTY, H.: Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer in Tschebyscheffschem Sinne approximierten konstanten Gruppenlaufzeit. A. E. Ü. 14, 451/467 (1960).
10. ABELLE, TH. A.: Übertragungsfaktoren mit Tschebyscheffscher Approximation konstanter Gruppenlaufzeit. A. E. Ü. 6, Heft 1 (1962).
11. HABERMAJER, Maria: Laufzeitschwankungen in Bandfiltern. Diplomarbeit am Lehrstuhl für drahtgebundene Nachrichtentechnik der Budapester Technischen Universität. 1963 (ungarisch).
12. FARKAS, M.: Spezial-Funktionen und ihre technisch-physikalische Anwendung. Műszaki Kiadó, Budapest 1964 (ungarisch).

Maria HABERMAJER, Budapest, XI., Egy József u. 18—20. Ungarn.

*Printed in Hungary*