

# DIE UNTERSUCHUNG DER ÜBERGANGSPROZESSE IN EINIGEN EINFACHEN NICHTLINEAREN REGELUNGSSYSTEMEN MIT HILFE DES ANALOGRECHNERS\*

Von

F. CSÁKI

Lehrstuhl für Automation, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 20. April 1965)

## 1. Einleitung

Charakteristische Größen der Übergangsfunktionen linearer selbsttätiger Regelungssysteme können recht einfach abgeschätzt werden, wenn zwei konjugierte komplexe Pole der Übergangsfunktion des geschlossenen Systems — die sogenannten dominierenden Pole — in der komplexen Ebene verhältnismäßig nahe an der imaginären Achse, die anderen Pole hingegen hinreichend weit liegen. In solchen Fällen vernachlässigt man der Einfachheit halber in der ersten Approximation diese letzteren, weitliegenden Pole und rechnet nur mit den dominierenden. Die charakteristischen Größen der Übergangsfunktion können in solchen Fällen durch die Parameter des dominierenden Polpaars

$$p_{1,2} = \omega_0 (-\zeta \pm j \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (1)$$

in geschlossener Form ausgedrückt werden, d. h. durch die natürliche Kreisfrequenz  $\omega_0$  und durch den Dämpfungsfaktor  $\zeta$ .

Der vorliegende Aufsatz stellt sich die Aufgabe zu untersuchen, wie der nichtlineare Verstärkungsfaktor im Falle von dominierenden Polpaaren die charakteristischen Größen der Übergangsfunktion beeinflusst.

## 2. Beschreibung eines nichtlinearen Regelungssystems

Mit den in der Regelungstechnik gewohnten Bezeichnungen ergibt sich das Blockdiagramm des unmittelbar rückgekoppelten nichtlinearen Systems gemäß *Abb. 1*. Hier ist  $x_e(t)$  die Eingangsgröße, der Sollwert oder die Führungsgröße,  $x_a(t)$  die Ausgangsgröße, der Istwert oder die Regelgröße. Die Differenz

\* Erweiterter Text eines Vortrages, den der Verfasser anlässlich der vom 25. bis 30. Mai 1964 von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin in Zusammenarbeit mit der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften und der Polnischen Akademie der Wissenschaften veranstalteten III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen gehalten hat.

der beiden ist die Regelabweichung  $x_r(t)$ . Infolge der nichtlinearen Verstärkung letzterer entsteht das mittlere Signal  $x_m(t)$ , welches ein integrierendes Glied und ein Verzögerungsglied durchfließt. Bemerkt sei hierzu, daß die natürliche Kreisfrequenz — der Einfachheit halber — als Einheitsfrequenz aufgefaßt wird, daß also  $\omega_0 = 1$ . Die Berücksichtigung der hiervon abweichenden Kreisfrequenzen bedeutet nämlich die einfache Veränderung der Zeitskala.

Im Falle der Linearität schreibt sich also die Übertragungsfunktion des geöffneten Regelungskreises zu

$$G(p) = \frac{1}{p(p + 2\zeta)}, \quad (2)$$

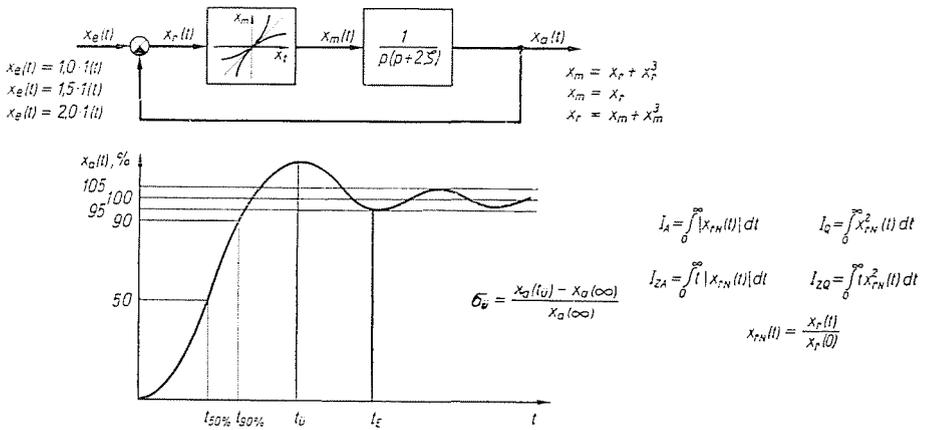


Abb. 1

die des geschlossenen Systems hingegen zu

$$W(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1}. \quad (3)$$

Die zentral-symmetrische Nichtlinearität wird mit einem Polynom dritten Grades ausgedrückt. Ebenso seien die Koeffizienten zur Verminderung der Zahl von Parametern gleich 1 gesetzt. Wenn man sich einer mechanischen Analogie bedient, heißt es bei »harter« Verstärkung

$$x_m = x_r + x_r^3, \quad (4)$$

bei »weicher« Verstärkung hingegen

$$x_r = x_m + x_m^3. \quad (5)$$

Im linearen Falle ist natürlich

$$x_m = x_r. \quad (6)$$

Da in nichtlinearen Systemen die Signalamplitude eine wichtige Rolle spielt, muß außer der Einheits-Sollwertänderung oder der Einheits-Führungsgrößenänderung auch die Wirkung der anderthalbfachen und zweifachen Eingangsgröße bei verschiedenen Dämpfungsfaktoren untersucht werden, d. h. die Fälle

$$x_e(t) = 1,0 \cdot I(t), \quad (7)$$

$$x_e(t) = 1,5 \cdot I(t), \quad (8)$$

$$x_e(t) = 2,0 \cdot I(t), \quad (9)$$

wo  $I(t)$  die sogenannte Einheitssprungfunktion ist.

### 3. Die gesuchten charakteristischen Größen

Zur Beschreibung des Zeitverhaltens des geschilderten Regelungssystems, u. zw. zur Kennzeichnung des Übergangsprozesses der Ausgangsgröße sollen folgende charakteristische Größen dienen:

- $t_{50\%}$ , die Halbwertzeit, d. h. jene Zeit, deren es bedarf, damit die Ausgangsgröße (die Regelgröße) 50% ihres stationären Wertes erreiche,
- $t_{90\%}$ , die zum Erreichen von 90% des Endwertes nötige Zeit, die sogenannte Anregelzeit,
- $t_U$ , die zum Erreichen der ersten Überschwingung erforderliche Zeit,
- $t_E$ , die Einstellzeit oder, mit anderen Worten, die Ausregelzeit, d. h. jene Zeit, nach deren Ablauf die Regelabweichung auf unter 5% absinkt,
- $\sigma_U$ , das relative Überschwingungsverhältnis gemäß

$$\sigma_U = \frac{x_a(t_U) - x_a(\infty)}{x_a(\infty)}. \quad (10)$$

### 4. Integralwerte als Gütekriterien

Zur Charakterisierung der aus aperiodischen Vorgängen und auch aus gedämpften Schwingungen bestehenden Übergangsfunktionen gebraucht man oft auch Integralwerte. Aus den vielen möglichen Integralwerten seien hier folgende vier ausgewählt:

der absolute oder betragslineare Integralwert

$$I_A = \int_0^{\infty} x_{rN}(t) dt, \quad (11)$$

der quadratische Integralwert

$$I_Z = \int_0^{\infty} x_{rN}^2(t) dt, \quad (12)$$

der mit der Zeit multiplizierte absolute Integralwert

$$I_{ZA} = \int_0^{\infty} t x_{rN}(t) dt, \quad (13)$$

das sogenannte ITAE-Kriterium (Integral of Time multiplied Absolute-value of Error) und

der mit der Zeit multiplizierte quadratische Integralwert

$$I_{zQ} = \int_0^{\infty} t x_{rN}^2(t) dt. \quad (14)$$

In diesen Formeln kommen die normalisierten Regelabweichungen

$$x_{rN}(t) = \frac{x_r(t)}{x_r(0)} \quad (15)$$

vor. Ihre Einführung ist nötig, weil sonst die Integralwerte — bei veränderlichen Signalamplituden — nur schwer verglichen werden können.

## 5. Ergebnisse der Untersuchungen

Die Untersuchungen mit der Analogie-Rechenmaschine lieferten folgende Ergebnisse:

*Abb. 2* zeigt die Übergangsfunktion im linearen Fall bei verschiedenen Dämpfungsfaktoren  $\zeta$ ,

*Abb. 3* die gleiche Funktion bei »harter«,

*Abb. 4* dagegen bei »weicher« nichtlinearer Verstärkung. *Abb. 3a* und *4/a* betreffen den Einheitssprung  $I(t)$  als Eingangsgröße, *Abb. 3b* und *4b* hingegen die aus dem doppelten Einheitssprung bestehende Führungsgrößenänderung.

*Abb. 5* veranschaulicht in Abhängigkeit vom Dämpfungsfaktor  $\zeta$  die Halbwertzeit bei verschiedenen Eingangssignalamplituden als Parametern. Hier und überall im weiteren bezieht sich die volle Linie auf die »harte«, die punktiert-gestrichelte Linie auf die lineare, die gestrichelte Linie auf die »weiche« Verstärkung.

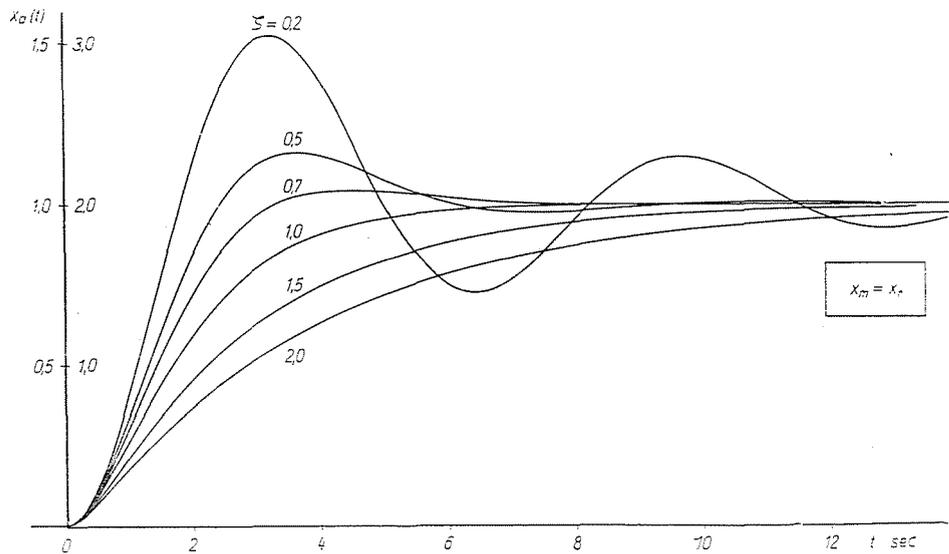


Abb. 2

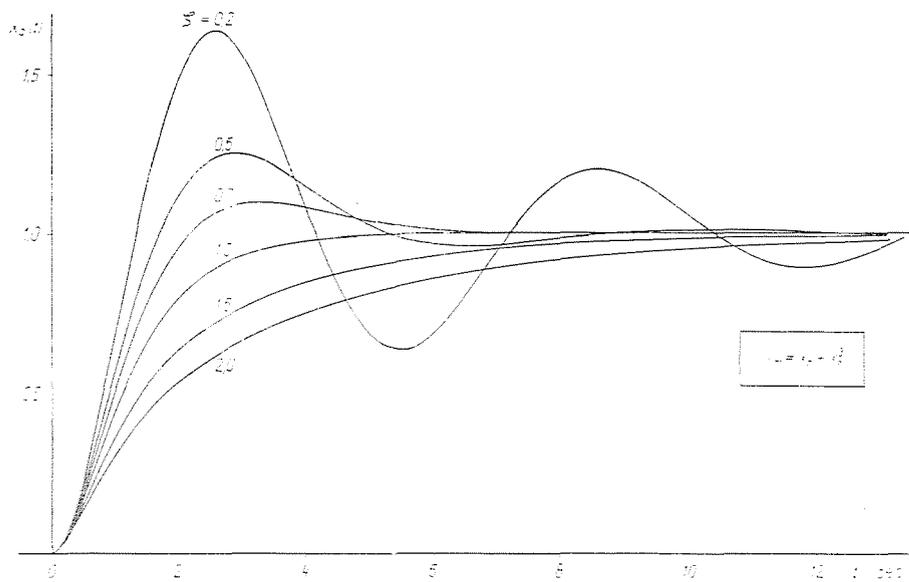


Abb. 3a

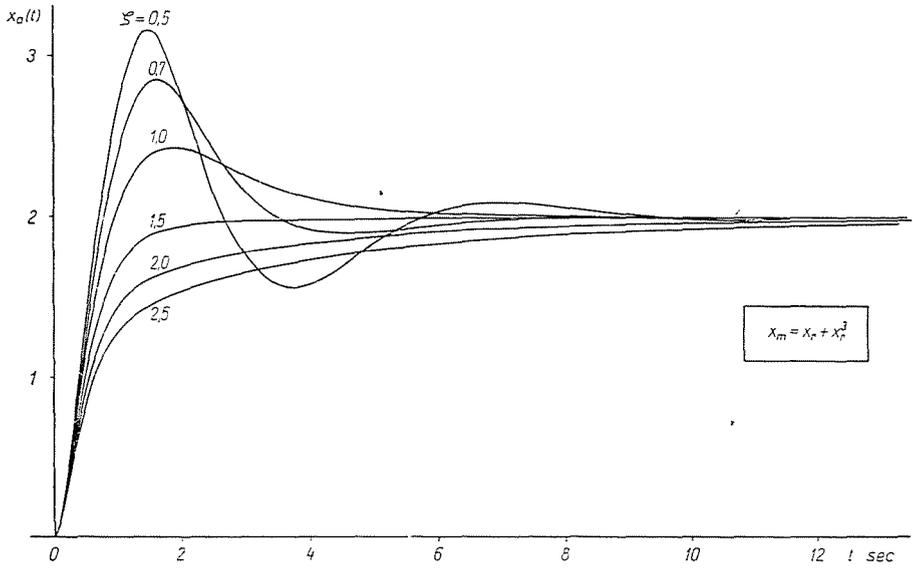


Abb. 3b

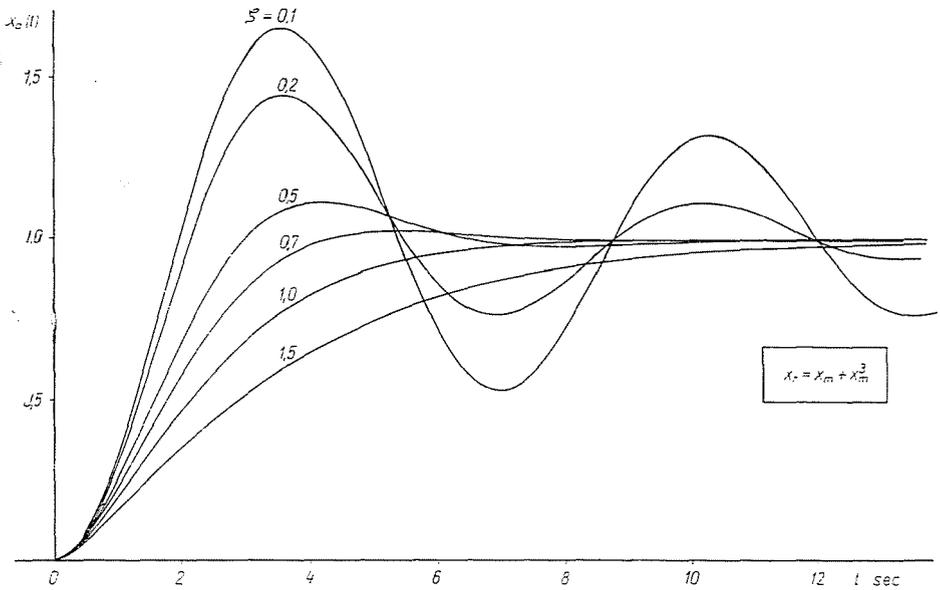


Abb. 4a

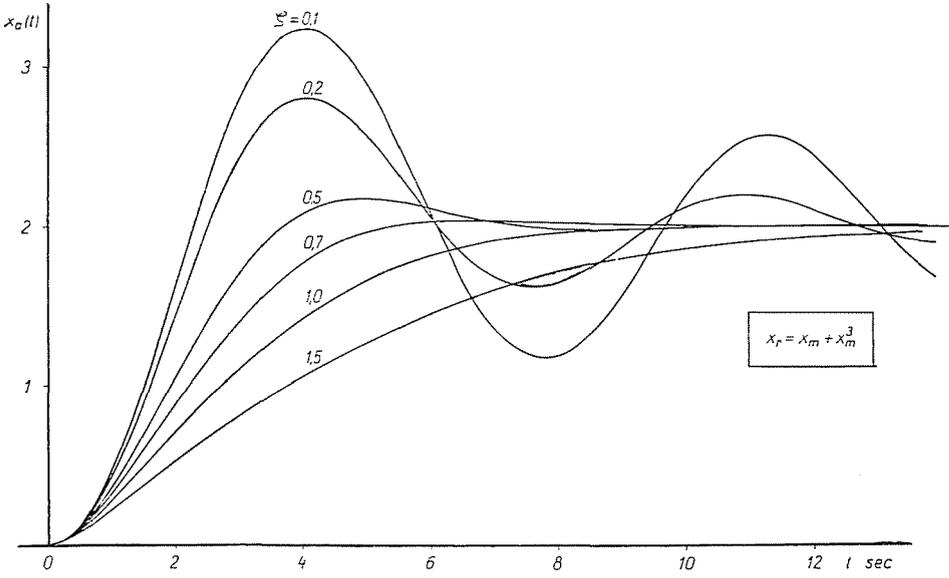


Abb. 4b

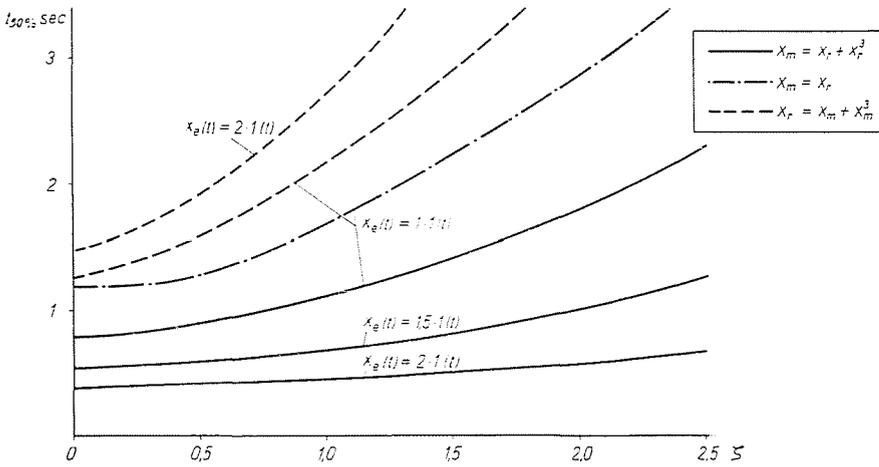


Abb. 5

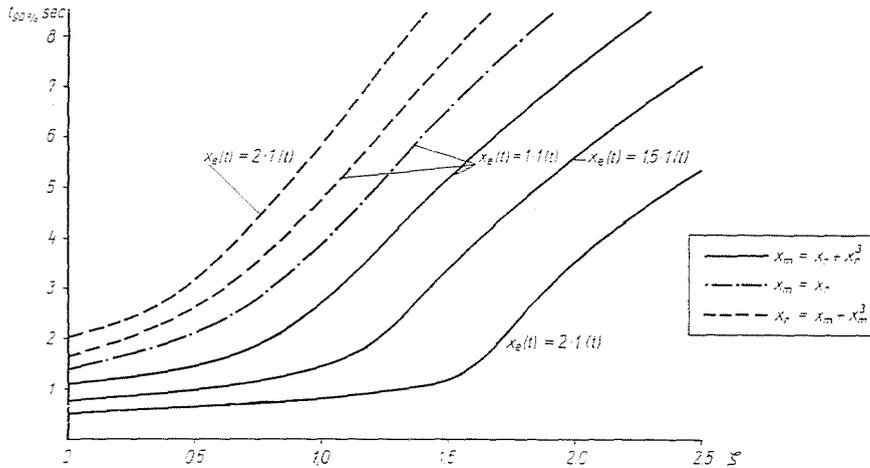


Abb. 6

Ähnlich stellt *Abb. 6* die zur Erreichung von 90% des Endwertes nötige Zeit, d. h. die Anregelzeit.

*Abb. 7* enthält das Diagramm der Überschwingungszeiten.

In den *Abb. 8a* und *8b* sind die Kennlinien der Einstellzeiten zusammengefaßt.

*Abb. 6* zeigt den Verlauf der relativen Überschwingung.

In den *Abb. 10, 11, 12* und *13* sind die Integralwerte als Funktionen verschiedener Dämpfungsfaktoren und bei 1-, 1,5- und 2-facher Führungsgrößenänderung als Parameter dargestellt.

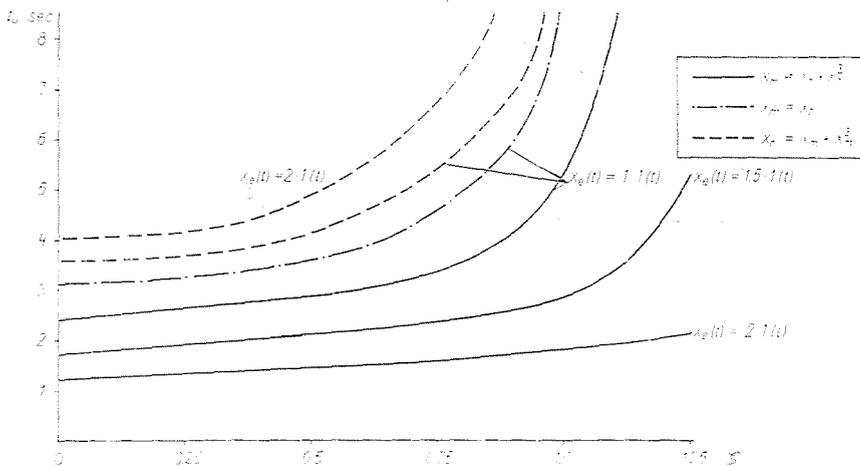


Abb. 7

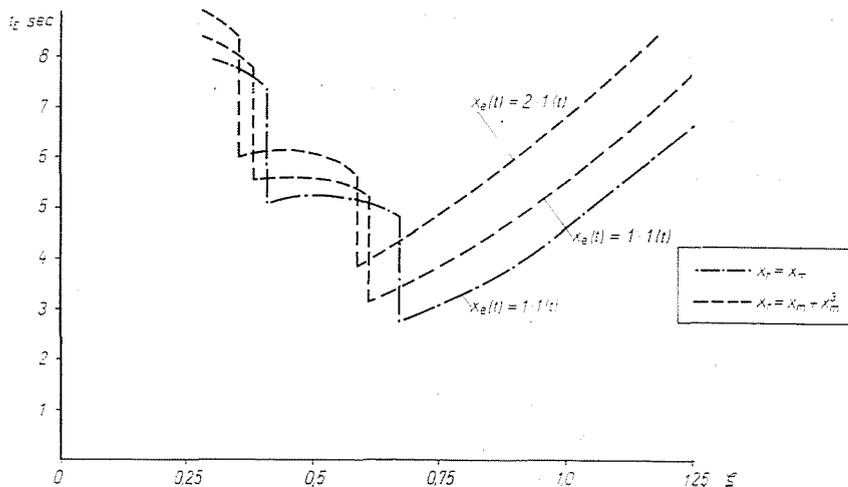


Abb. 8a

Schließlich zeigt *Abb. 14* und *15*, welche Abweichung bei »harter«, »weicher« und linearer Verstärkung die Berücksichtigung eines weiteren, weit entfernten reellen Pols oder Doppelpols bei einem Dämpfungsfaktor von  $\zeta = 0,5; 0,6$  und  $0,7$  verursacht wird.

### 6. Folgerungen

Aus den Untersuchungen auf dem Analogrechner lassen sich hauptsächlich qualitative Folgerungen ziehen, wenngleich in einigen Fällen, in denen die Polynome dritten Grades eine gute Approximation bedeuten und die allei-

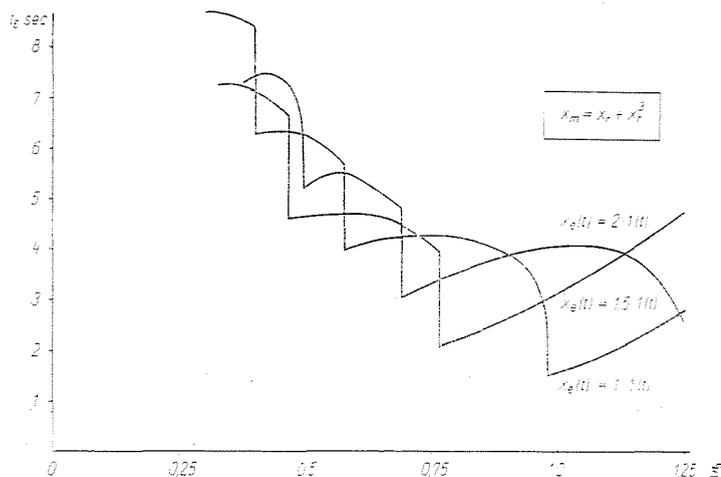


Abb. 8b

nige Berücksichtigung des dominierenden Polpaars statthaft ist, auch quantitativ gute Resultate zu erzielen sind.

Bezüglich einzelner charakteristischer Größen des Übergangsprozesses kann folgendes festgestellt werden:

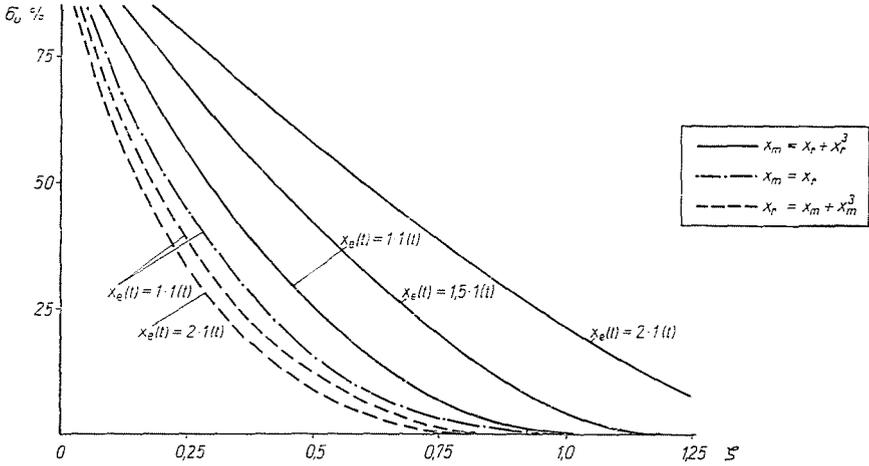


Abb. 9

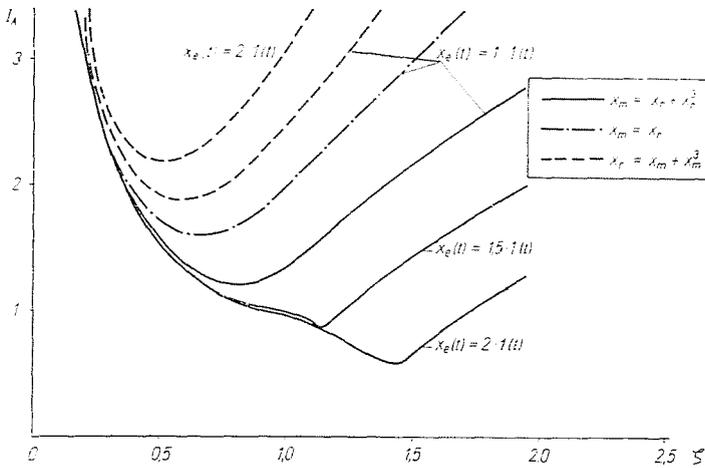


Abb. 10

1. Bei gegebenem Dämpfungsfaktor vermindert sich die Halbwertzeit (Abb. 5) bei »harter« Verstärkung, während sie sich bei »weicher« Verstärkung im Vergleich zum linearen Fall vergrößert. Diese Tendenz nimmt bei stärkerer Änderung der Führungsgröße zu. Im allgemeinen verlängert sich die Halbwertzeit mit wachsendem Dämpfungsfaktor. Bei »weicher« Verstär-

kung ist der Einfluß des Dämpfungsfaktors auf die Halbwertzeit größer, während er bei »harter« Verstärkung, besonders bei kleineren Dämpfungsfaktoren verhältnismäßig kleiner wird.

2. Hinsichtlich der Anregelzeit zur Erreichung von 90% des Endwertes (Abb. 6) können ganz ähnliche Folgerungen gezogen werden.

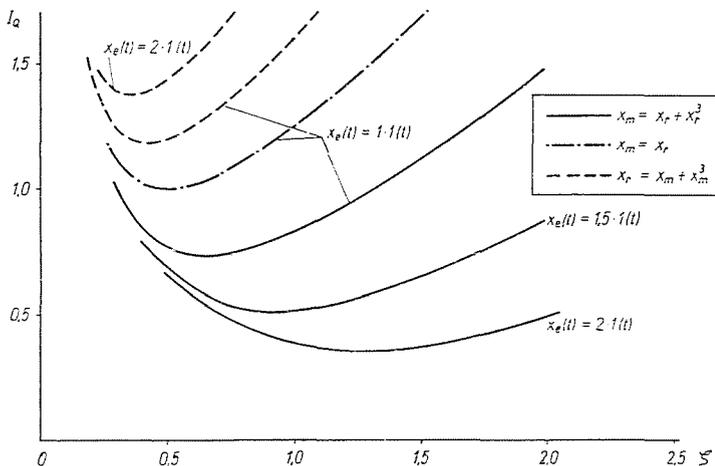


Abb. 11

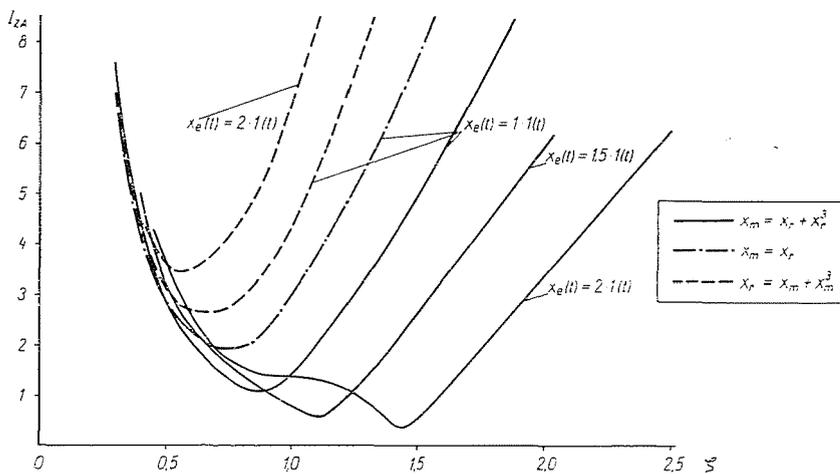


Abb. 12

3. Die soeben gemachten Feststellungen gelten auch für die Zeit der ersten Überschwingung (Abb. 7).

Wie man also sieht, vollzieht sich der Anlauf des Übergangsprozesses bei gegebenem Dämpfungsfaktor bei »weicher« Verstärkung langsam, bei »harter« Verstärkung dagegen schneller als im linearen Falle.

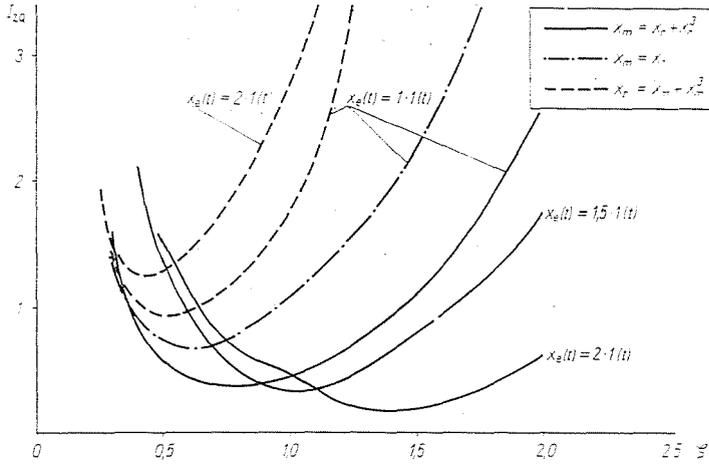


Abb. 13

4. Die Einstellzeit (Abb. 8a und 8b) ist bei aperiodischem Übergangsprozess eine stetige Funktion des Dämpfungsfaktors. Für diese Fälle gilt die eindeutige Feststellung, daß sich eine vorgeschriebene Einstellzeit bei »weicher« nichtlinearer Verstärkung mit einem kleineren Dämpfungsfaktor,

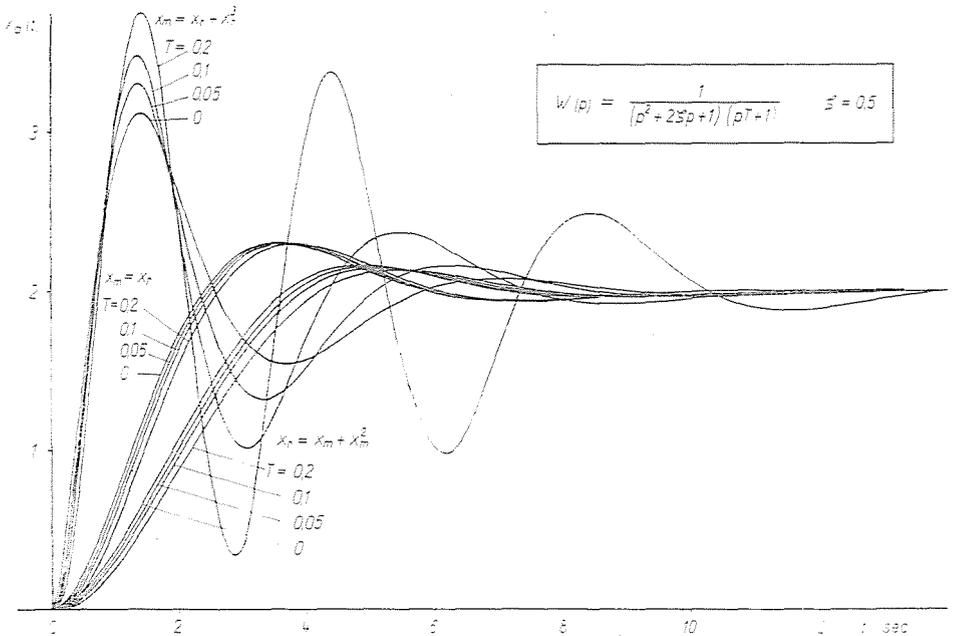


Abb. 14a

bei »harter« Verstärkung dagegen mit einem größeren Dämpfungsfaktor erreichen läßt als im linearen Fall. Diese Tendenz wächst mit dem Ansteigen der sprunghaften Sollwertänderung.

Beim gedämpften periodischen Übergangsprozeß ist die Einstellzeit keine stetige, sondern nur eine stückweise stetige Funktion der Dämpfungsfaktoren. Die Rißstellen treffen bei verschiedenen Dämpfungsfaktoren ein. So entsteht z. B. auch die minimale Einstellzeit bei verschiedenen Dämpfungsf-

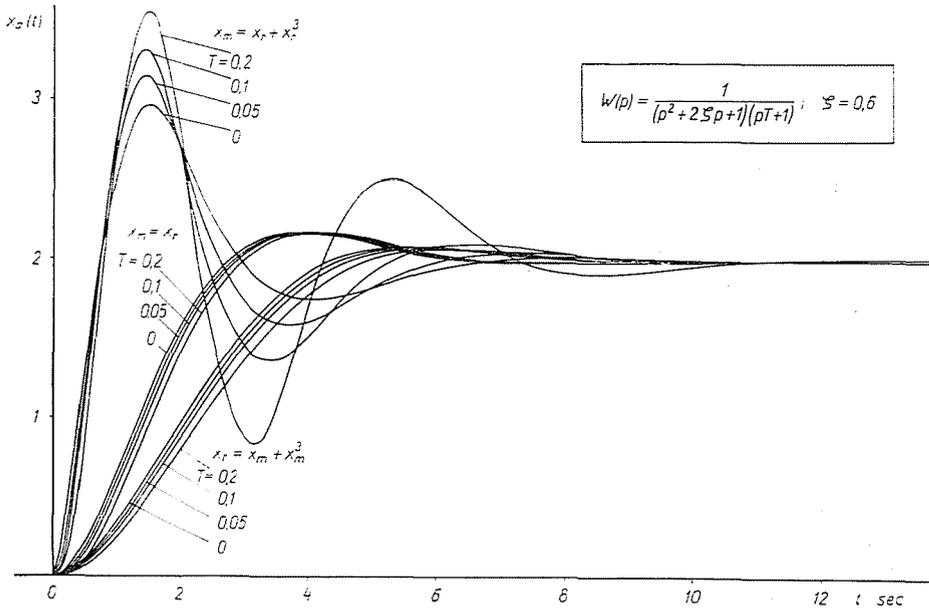


Abb. 14b

faktoren. Wegen der sich kreuzenden Kurven ist es schwer, eindeutige Feststellungen zu machen. Was die Einstellzeit betrifft, kann man höchstens die Tendenz erkennen, daß die Einstellzeit bei gegebenem Dämpfungsfaktor und bei »weicher« Verstärkung wächst und sich unter gleichen Umständen bei »harter« Verstärkung vermindert, u. zw. in allen Fällen um so mehr, je größer die Veränderung des Sollwertes ist. Ausnahmen von dieser Tendenz zeigen sich in der Nähe der Rißstellen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die minimale Einstellzeit bei »weicher« Verstärkung etwas wächst und ungefähr bei etwas kleinerem Dämpfungsfaktor als 0,7 eintritt, während sich das Minimum bei »harter« Verstärkung vermindert, und die minimale Einstellzeit eintritt, wenn der Dämpfungsfaktor größer ist als 0,7. Dies bedeutet auch, daß sich der kritische Dämpfungsf-

faktor, der die Grenze des periodischen und des aperiodischen Übergangsprozesses bestimmt und der im linearen Fall ungefähr 0,7 beträgt, bei nichtlinearer »weicher« Verstärkung um etwas vermindert, bei »harter« Verstärkung jedoch zunimmt.

5. Die relative Überschwingung (*Abb. 9*) bei gegebenem Dämpfungsfaktor wird bei der nichtlinearen »weichen« Verstärkung kleiner als im linearen Fall, wogegen sie bei »harter« Verstärkung wächst, u. zw. um so mehr, je größer die Änderung des Sollwertes ist.

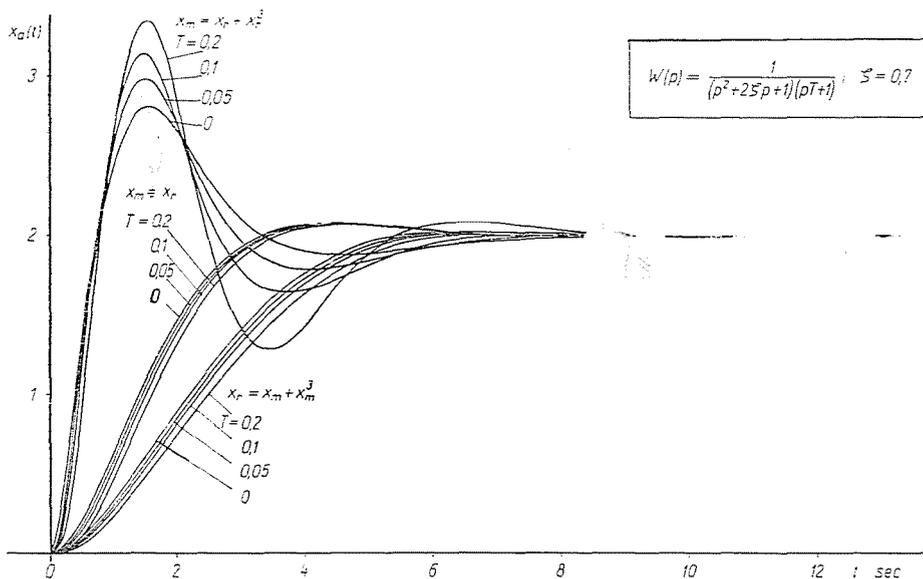


Abb. 14c

6. Die zur Beurteilung des Übergangsprozesses dienenden Integralwerte wachsen im allgemeinen bei »weicher« Verstärkung, während sie bei »harter« Verstärkung abnehmen. Genauer formuliert: die Kurve der Integralwerte, die als Funktion des Dämpfungsfaktors aufgetragen wurde (*Abb. 10, 11, 12, 13*) verschiebt sich bei »weicher« Verstärkung im allgemeinen nach links und aufwärts, bei »harter« Verstärkung dagegen nach rechts abwärts. Dasselbe gilt für die Minimumwerte. Bei »harter« Verstärkung wird das Minimum des Absolutwertintegrals und das Minimum des mit der Zeit multiplizierten Absolutwertintegrals in Abhängigkeit von der Dämpfung schärfer. Die Stelle des Minimums verschiebt sich bei »harter« Verstärkung mit zunehmender Sollwertänderung immer mehr in Richtung der größeren Dämpfungen. Die für lineare Systeme angenommene Faustregel, daß nämlich der günstigste Dämpfungsfaktor um 0,7 liegt, ist also bei nichtlinearer Verstärkung völlig unhaltbar.

## 7. Schlußbemerkungen

Zu Beurteilung der Berechtigung der Rechnung mit dem dominierenden Polpaar wurden die Diagramme in *Abb. 14* und *Abb. 15* auf dem Analogrechner aufgenommen. Außer dem dominierenden Polpaar spielt hier auch ein weiter entfernter negativer reeller Pol eine Rolle, dessen Wert im ersten Falle  $p_1 = -20$ , im zweiten Falle  $p_2 = -10$ , im dritten Falle  $p_3 = -5$  ist. (Das entspricht den Zeitkonstanten  $T_1 = 0,05$  sec,  $T_2 = 0,1$  sec und  $T_3 = 0,2$  sec.) Bei linearer Verstärkung schreibt sich hierfür die Übertragungsfunktion des geschlossenen Systems zu

$$W(p) = \frac{20}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(p + 20)} = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(0,05 p + 1)} \quad (11)$$

bzw. zu

$$W(p) = \frac{10}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(p + 10)} = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(0,1 p + 1)} \quad (12)$$

bzw. zu

$$W(p) = \frac{5}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(p + 5)} = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(0,2 p + 1)} \quad (13)$$

Mit diesen Verhältnissen sind die Übergangsfunktionen für eine Sollwertänderung  $x_e(t) = 2 \cdot I(t)$  mit den Dämpfungsfaktoren  $\zeta = 0,5; 0,6; 0,7$  in *Abb. 14a, b, c* graphisch dargestellt.

Ähnlich wurden sodann statt einzelner weit entfernter negativer reeller Pole Doppelpole mit den vorerwähnten Werten angenommen. Für lineare Verstärkung sind damit die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Systems

$$W(p) = \frac{400}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(p + 20)^2} = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(0,05 p + 1)^2} \quad (14)$$

bzw.

$$W(p) = \frac{100}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(p + 10)^2} = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(0,1 p + 1)^2} \quad (15)$$

bzw.

$$W(p) = \frac{25}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(p + 5)^2} = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta p + 1)(0,2 p + 1)^2} \quad (16)$$

Für dieselbe Sollwertänderung  $x_e(t) = 2 \cdot I(t)$  mit den gleichen Dämpfungsfaktoren  $\zeta = 0,5; 0,6; 0,7$  gibt *Abb. 15a, b, c* die zum Vergleich dienenden Übergangsfunktionen in Form von Kurvenschaaren.

Laut *Abb. 14* und *Abb. 15* ergibt die Berechnung mit dem dominierenden Polpaar bei linearer und noch mehr bei »weicher« nichtlinearer Verstärkung weit bessere Resultate als bei »harter« Nichtlinearität, bei der man immer mit Abweichungen rechnen muß.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß alle Kurven auf Berechnungen beruhen, die mit dem Analogrechner durchgeführt wurden, weshalb mit gewissen Ungenauigkeiten gerechnet werden muß.

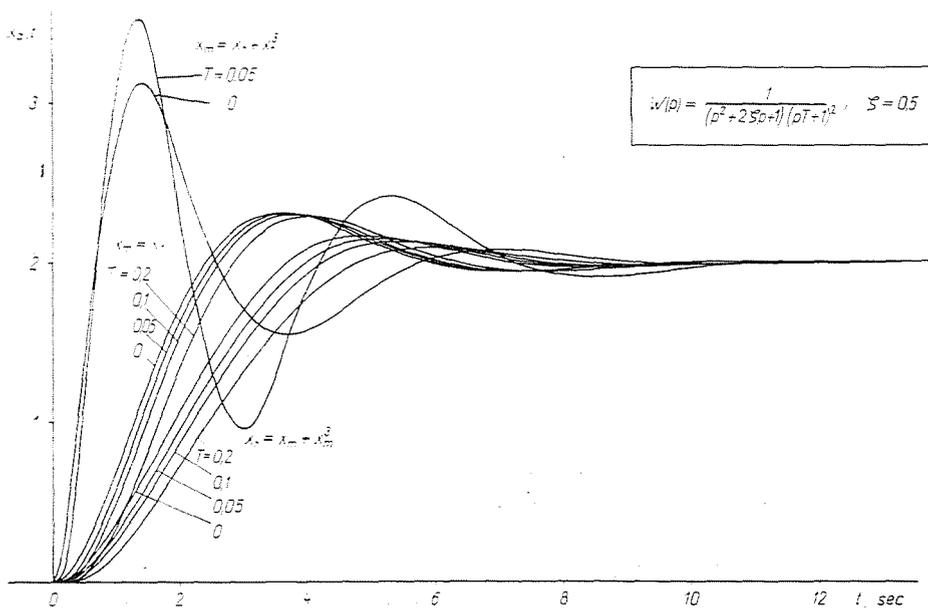


Abb. 15a

Hier spreche ich meinen Dank dem wissenschaftlichen Mitarbeiter J. GYÜRKI aus, der mir bei Durchführung der Berechnungen mit dem Analogrechner wertvolle Hilfe erwiesen hat.

## ANHANG

### 1. Einige Bemerkungen zu den linearen Systemen

Wenn die Übertragungsfunktion des geschlossenen linearen Systems

$$W(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\sigma_0 p + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(p + \sigma_0 - j\omega_d)(p + \sigma_0 + j\omega_d)}$$

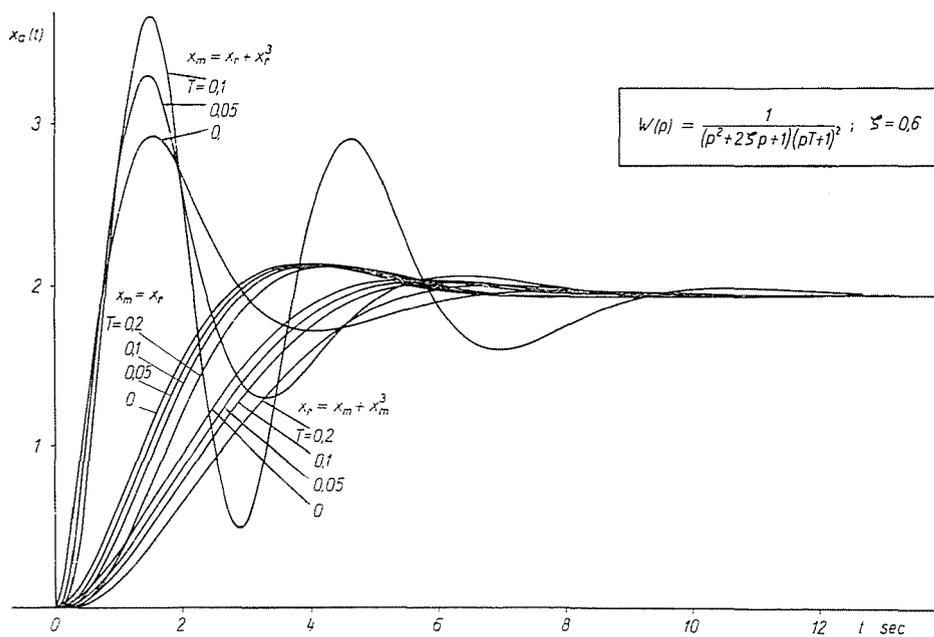


Abb. 15b

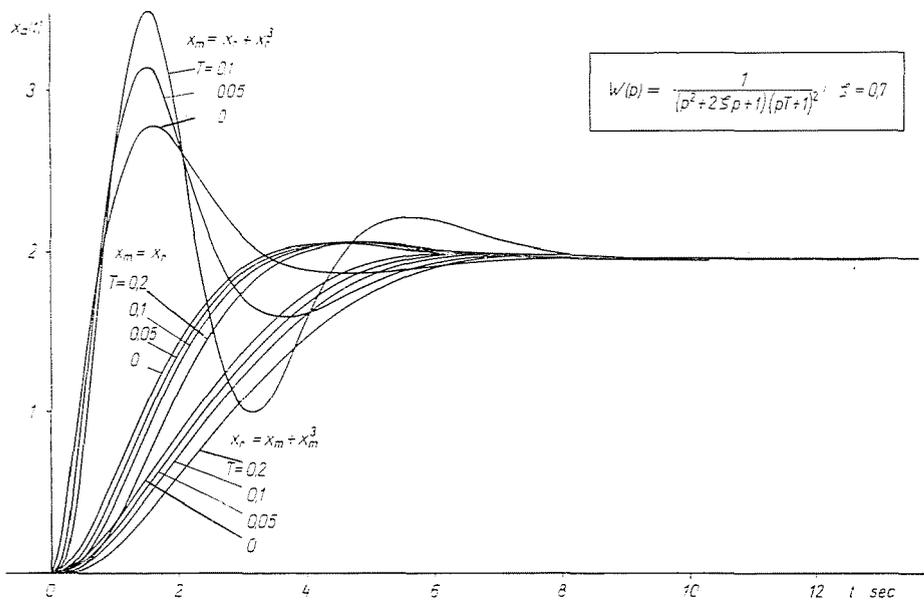


Abb. 15c

ist, kann für einen Einheitssprung die Übergangsfunktion in der Form

$$\begin{aligned}
 x_d(t) &= 1 + \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \omega_d^2}}{\omega_d} e^{-\sigma_0 t} \sin(\omega_d t - \psi_d) = \\
 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0 t - \psi_d) \\
 &\quad (0 \leq t)
 \end{aligned}$$

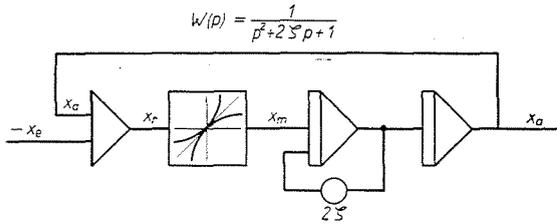


Abb. 16

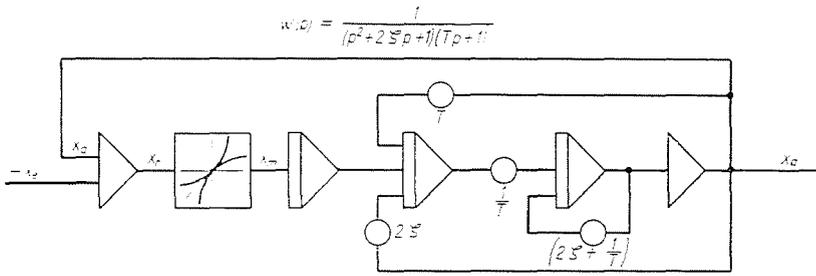


Abb. 17

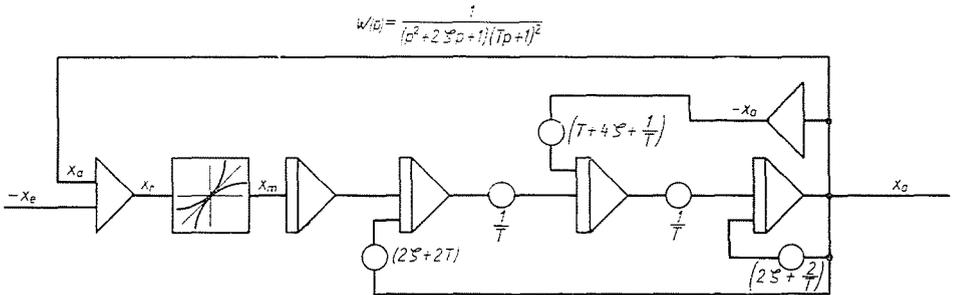


Abb. 18

ausgedrückt werden, wobei

$$\psi_d = \pi - \arctg \frac{\omega_d}{\sigma_0} = \pi - \arctg \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

ist.

Aus diesem Ausdruck lassen sich einige charakteristische Größen verhältnismäßig leicht errechnen. So ist z. B. die Einstellzeit für 5% Regelabweichung

$$t_E = \frac{3}{\sigma_0} = \frac{3}{\zeta \omega_0},$$

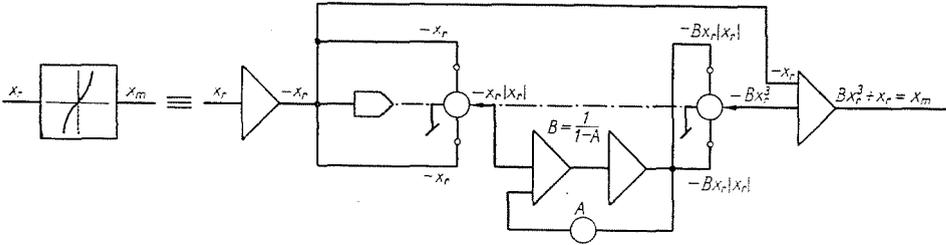


Abb. 19

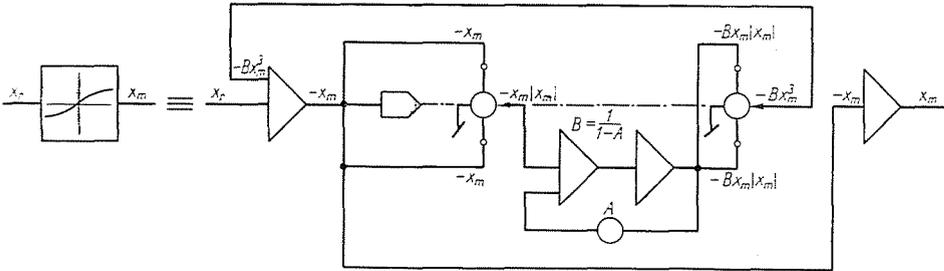


Abb. 20

die zum Erreichen der ersten Überschwingung nötige Zeit

$$t_U = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}},$$

das relative Überschwingungsverhältnis

$$\sigma_U = e^{-\pi \sigma_0 / \omega_d} = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

usw.

## 2. Zusammenfassung der qualitativen Programmbilder für die Lösung der linearen und nichtlinearen Aufgaben

Hier in Anhang 2. sind die angewandten prinzipiellen Rechenschaltungen kurz zusammengefasst. Abb. 16 zeigt das Programmbild, wenn in die Rechnung nur das dominierende Polpaar einbezogen wird. Abb. 17 gibt die qualitative Rechenschaltung für den Fall, daß einzelne weit entfernte negative reelle

Pole vorhanden und ähnlich *Abb. 18* die Rechenschaltung für den Fall, daß weit entfernte negative reelle Doppelpole berücksichtigt sind.

In den *Abb. 17, 18, 19* sind stets die Übertragungsfunktionen des geschlossenen linearen Systems aufgetragen. In diesen Fällen müssen die Punkte, in denen  $x_r$  bzw.  $x_m$  erscheint, weil  $x_r = x_m$ , kurzgeschlossen werden.

Für die Fälle von »harter« und »weicher« nichtlinearer Verstärkungen veranschaulichen die *Abb. 19* bzw. *20* die angewandten Rechenschaltungen für die Lösung der Gleichungen  $x_m = x_r^3 + x_r^m$  bzw.  $x_r = x_m^3 + x_m$ . Die Faktoren  $B$  in *Abb. 19* und *20* wurden wegen Maßstabänderungen eingeführt.

### Zusammenfassung

In linearen Regelungssystemen ist der Einfluß von dominierenden Polpaaren auf die charakteristischen Größen der Übergangsprozesse, wie z. B. auf Überschwingungsverhältnis, Einstellzeit, Schwingungszahl, Zeitpunkt der ersten Überschwingung usw. bekannt.

Die in Rede stehende Abhandlung untersucht als Resultat der mit Analogie-Rechengeräten durchgeführten Berechnungen in Form von Kurvenschaaren den Einfluß der Eingangssignale auf die erwähnten charakteristischen Größen in einfachen nichtlinearen Systemen. Es wird auch kurz erörtert, wie die Amplitude und die Nichtlinearität gewisse Integralkriterien beeinflussen.

### Schrifttum

1. GRABBE, E. M.—RAMO, S.—WOOLDRIGE, E.: Handbook of Automation, Computation and Control. John Wiley. New York. 1958. Volume 1. Chapter 22: C. E. BRADFORD—M. W. DE MERIT: Relation between Transient and Frequency Response.
2. BIERNSON, G. A.: Estimating Transient Response from Open-loop Frequency Response. Trans. Am. Inst. Elec. Engrs. 74, 388—402 (1955). Pt 2. January 1956.
3. TRUXAL, J. G.: Automatic Feedback Control System Synthesis. Mc Graw-Hill. New York 1955.
4. GRAHAM, D.—LATHROP, R.: The Synthesis of Optimum Transient Response. Criteria and Standard Forms. Trans. Am. Inst. Elec. Engrs. 72, 273—288 (1953).
5. OLDENBURGER, R.: Frequency Response. New York 1956.: 169—183: LEONHARD, A.: Determination of Transient Response from Frequency Response.
6. SCHULTZ, W. C.—RIDEAUT, V. C.: Control System Performance Measures: Past, Present and Future, IRE Trans. on Automatic Control Vol. AC—6. 22—35. 1961.
7. GIBSON, J. E.—REKASIUS, Z. V.—MCVEY, E. S.—SRIDHAR, R.—LEEDHAM, C. D.: Set of Standard Specifications for Linear Automatic Control Systems. Trans. Am. Inst. Elec. Engrs. 80, Part 2. 65—77. 1961.

Prof. Dr. Frigyes CSÁKI, Budapest XI., Egri József u. 18—20. Ungarn.