

CALCUL DE LA DURÉE DU DÉMARRAGE DES MOTEURS À COURANT CONTINU, À EXCITATION DÉRIVÉE

Par

T. KELEMEN

Chaire des Machines Électriques de l'Université Technique de Budapest

(Reçu le 10 juin 1964)

A propos de l'étude des conditions de démarrage des moteurs à courant continu, à excitation dérivée et à démarrage *en un temps*, nous avons exposé dans une communication précédente [1] une méthode pour calculer *la pointe de courant de démarrage*. Dans le présent article, nous rendons compte de nos résultats relatifs au calcul de la *durée du démarrage*. L'application *simultanée* des méthodes esquissées dans les deux études permet de déterminer facilement les paramètres qui créeront *les conditions de démarrage optima*, c'est-à-dire: *la durée minimum de démarrage en cas de pointe de courant prescrite, ou la pointe de courant minimum en cas de durée de démarrage prescrite*.

1. Définition de la durée du démarrage

Théoriquement, le moteur n'atteint sa vitesse stationnaire qu'après un temps infini. C'est pourquoi la littérature considère généralement comme durée de démarrage le temps que nécessite l'obtention d'un nombre de tours inférieur au nombre stationnaire. Il n'existe pas encore un point de vue homogène à cet égard.

Afin de permettre l'extension des recherches à la zone périodique, nous considérons pour notre part comme durée de démarrage le temps nommé *temps de réglage* (t_{reg}) en automatique. Le temps du réglage (donc dans notre cas *le temps t_d du démarrage*) est le temps à partir duquel la quantité examinée $y(t)$ (ici la vitesse angulaire) demeure à l'intérieur de la bande $\pm \Delta y$ tracée autour de sa valeur constante y_∞ (fig. 1).

La largeur de la bande $\pm \Delta y$ varie. La plus courante, celle que nous utilisons nous-même, est la bande de $\pm 5\%$.

Pour le cas apériodique, les valeurs du temps de réglage correspondant à différents amortissements pourraient être déterminées, par exemple, à la base des courbes qui indiquent le déroulement du processus à deux constantes de temps en cas de rapports T_1/T_2 différents (où T_1 et T_2 sont les constantes de

temps de l'équation décrivant le processus, en l'espèce de [6] — 11)*. T_1 et T_2 permettent de déterminer l'amortissement. Nous trouvons ces mêmes courbes dans [2] et [3]. Pour le cas périodique, nous trouvons des indications par ex. dans [4].

Nous trouvons dans [5] un diagramme correspondant directement à nos buts, qui se rapporte donc à la bande $\pm 5\%$ et représente le temps du réglage t_{reg} en fonction de l'amortissement. Dans nos examens ultérieurs, nous considérerons cette figure comme point de départ. La figure représente non

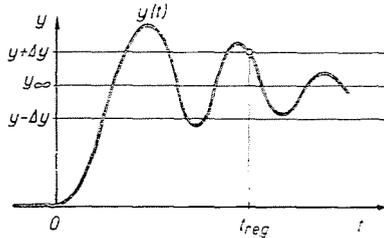


Fig. 1. Figure explicative pour la définition de la durée de démarrage

pas directement le temps de réglage t_{reg} , mais le rapport $\frac{t_{\text{reg}}}{T_0}$ en fonction de l'amortissement, où T_0 est la durée d'une période de l'oscillation non amortie

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \quad (1)$$

($\Omega_0 = 2\pi f_0$ est la fréquence circulaire de l'oscillation non amortie.)

Étant donné que, par la suite, le temps de base auquel seront rapportés les autres temps ne sera pas le temps T_0 , mais

$$T_{\text{min}} = \frac{1}{\Omega_0} \quad (2)$$

nous avons tracé sur la figure 2 le diagramme du *temps de réglage relatif*

$$\sigma = \frac{t_{\text{reg}}}{T_{\text{min}}} = 2\pi \frac{t_{\text{reg}}}{T_0} \quad (3)$$

en fonction de l'amortissement. Dans ce qui suit, la fonction $\sigma = f(z)$ constituera la base de comparaison de nos examens.

Remarquons encore, pour compléter nos observations, que la fonction $\sigma = f(z)$ n'est pas continue en cas périodique, ce qui découle de la définition

* Nous renvoyons dans cette étude à des formules figurant dans nos articles précédents. Le premier chiffre placé entre crochets désigne chaque fois le numéro de la référence bibliographique se trouvant à la fin de cet article, le second indiquant le numéro de la formule dans la communication citée.

du temps de réglage. Avec une bande $\pm 5\%$, la courbe de la fonction ne dépasse pas cette bande jusqu'à $z \cong 0,7$, ainsi la fonction est continue pour les valeurs $z > 0,7$. Notons encore que (d'après la *fig. 2*)

$$\sigma \cong 2\pi z, \text{ si } z > 3. \quad (3a)$$

2. Approximation de la durée de démarrage avec différentes constantes de temps

La durée de démarrage (temps de réglage) définie sous 1 est assez difficile à suivre par des calculs. C'est pourquoi nous essayons d'approcher la durée du démarrage avec des *constantes de temps* différentes, procédé que motive

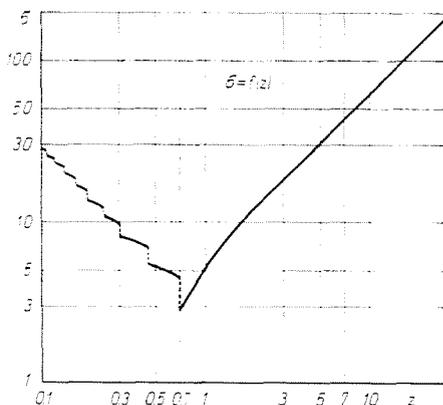


Fig. 2. Le temps de réglage relatif en fonction de l'amortissement [$\sigma = f(z)$]

aussi l'extension de l'examen de la durée du démarrage au cas de couples résistants différents. A la base des résultats obtenus, nous faisons des suggestions pour une méthode de calcul approximative.

2.1. La constante de temps de valeur plus grande et la constante de temps de la courbe enveloppante

L'une des méthodes approximatives est celle décrite dans l'article [6]. Nous avons calculé la durée de démarrage pour un processus *apériodique* à cette approximation près que nous avons remplacé la courbe à deux constantes de temps correspondant à l'équation ([6]-11) par une courbe à une constante de temps, dont la constante de temps est égale à la plus grande (T_1) des deux

constantes de temps

$$T_1 = \frac{1}{\varrho - A} \quad (4)$$

et

$$T_2 = \frac{1}{\varrho + A}. \quad (5)$$

On sait qu'au cas d'une constante de temps, la fonction atteint les 95% de sa valeur stationnaire en un temps correspondant au triple de la constante de temps. Étant donné qu'au cas de deux constantes de temps la fonction atteint cette même valeur en un temps plus long que le précédent, nous avons défini la durée du démarrage — sans en donner une analyse plus détaillée — sous la forme suivante:

$$t_d \cong 4 T_1. \quad (6)$$

Pour le cas *périodique*, nous avons remplacé la fonction par sa courbe enveloppante, et avons défini la durée du démarrage par la constante de temps T_{env} de cette courbe, de la façon suivante

$$t_d \cong 4 T_{\text{env}}. \quad (7)$$

Ici, nous avons considéré que la fonction atteint plus tôt (ou tout au plus en même temps) que la courbe enveloppante le moment à partir duquel elle reste à l'intérieur de la bande, de sorte qu'avec l'application de la formule (7), l'erreur est à l'avantage de la sécurité.

Examinons à présent plus minutieusement les deux constantes de temps suppléantes.

a) Cas *périodique*

A la base de l'équation ([6]-9), la constante de temps de la courbe enveloppante est

$$T_{\text{env}} = \frac{1}{\varrho}, \quad (8)$$

ou, en utilisant l'équation ([1]-14)

$$T_{\text{env}} = \frac{1}{z \Omega_0}. \quad (9)$$

En cas *périodique* on a $z < 1$, en cas limite $z = 1$. Il en résulte que la constante de temps est la plus petite lorsque $z = 1$; sa valeur est alors

$$T_{\text{min}} = \frac{1}{\Omega_0}. \quad (2)$$

Si $z < 1$, $T_{\text{env}} > T_{\text{min}}$. Voyons comment varie T_{env} en fonction de z . Afin d'obtenir une solution de valeur générale, introduisons la constante de temps relative

$$a_p = \frac{T_{\text{env}}}{T_{\text{min}}}. \quad (10)$$

La valeur de a_p sera, d'après (9) et (2)

$$a_p = \frac{1}{z}. \quad (11)$$

b) Cas apériodique

La valeur de la constante de temps T_1 est, en utilisant (4) et ([1]-14):

$$T_1 = \frac{1}{\Omega_0(z - \sqrt{z^2 - 1})} = \frac{1}{\Omega_0} (z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (12)$$

En cas apériodique $z > 1$, en cas limite $z = 1$. La constante de temps est la plus petite lorsque $z = 1$ [car si $z \rightarrow 1$, $(z + \sqrt{z^2 - 1}) \rightarrow 1$; tandis que si $z \rightarrow \infty$, $(z + \sqrt{z^2 - 1}) \rightarrow 2z$] et sa valeur est alors

$$T_{\text{min}} = \frac{1}{\Omega_0} \quad (2)$$

de même que dans le cas périodique.

Examinons ici également le changement de valeur de la constante de temps relative

$$a = \frac{T_1}{T_{\text{min}}} \quad (13)$$

en fonction de z . En comparant (12) et (2), on a:

$$a = z + \sqrt{z^2 - 1}. \quad (14)$$

Au fur et à mesure que z augmente, a tend vers la valeur limite $2z$. Si $z > 3$, la valeur de la différence existant entre a et $2z$, rapportée à a , est inférieure à 3%. Au lieu de (14) nous pouvons donc écrire à titre approximatif:

$$a \cong 2z, \text{ si } z \geq 3. \quad (15)$$

Pour plus de facilité, nous désignerons par a dans ce qui suit la constante de temps relative se rapportant aussi bien à la partie périodique qu'à la partie apériodique, en observant qu'en cas périodique $a = a_p$.

Sur la *figure 3*, nous avons indiqué la courbe $\sigma = f(z)$ du temps de réglage relatif, ainsi que la courbe $4a = f(z)$ de la durée relative du démarrage définie à la base des équations (6) et (7). On voit que, abstraction faite de l'entourage immédiat de la valeur $z = 1$, la courbe $4a$ passe partout au-dessus de la courbe σ , ainsi, en utilisant les équations (6) et (7), nous faisons erreur dans le sens de la sécurité. La différence est grande principalement dans la partie périodique. En comparant les formules (3a) et (15), nous voyons que si $z > 3$, $\sigma = \pi a$.

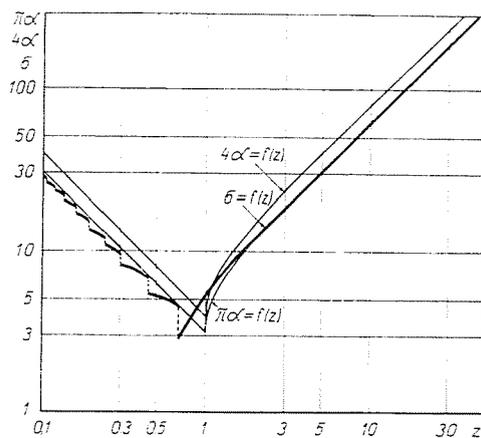


Fig. 3. Comparaison de $a = f(z)$ et $\sigma = f(z)$

Nous avons également porté sur la *fig. 3* la courbe de la fonction $\pi a = f(z)$. Celle-ci donne une meilleure approximation que la précédente sur la plus grande partie de l'intervalle.

2.2. La constante de temps «résultante»

Comme seconde approximation, nous avons choisi la constante de temps définie par *Nechleba* [7] et connue dans la littérature sous le nom de «résultante». *Nechleba* ne définit la constante de temps résultante que pour le cas aperiodique, de la façon suivante (avec les symboles de la *fig. 4a*):

$$T_{\text{res}} = \frac{1}{x_{\infty} - x(0)} \int_0^{\infty} (x_{\infty} - x) dt = \frac{A}{x_{\infty} - x(0)}. \quad (16)$$

Par la suite — et particulièrement dans la littérature consacrée aux amplificateurs (v. par ex. [8], [9]) — la notion de constante de temps résultante a été étendue aussi au cas *faiblement périodique*. Dans ce cas, la définition de la constante de temps résultante est par analogie (*fig. 4b*)

$$T_{\text{res}} = \frac{A_1 - A_2 + A_3}{x_{\infty} - x(0)}. \quad (17)$$

Voici les avantages de la constante de temps résultante définie par la formule (16):

a) La constante de temps résultante étant le rapport de l'aire située entre la valeur stationnaire et la courbe de la fonction, et de la valeur stationnaire (si la valeur initiale est zéro), elle caractérise le processus indépendamment de la grandeur de la valeur stationnaire. Dans nos examens, elle fournit donc une valeur caractéristique non seulement au cas du nombre de tours en marche à vide, relatif à la pure accélération de masse, mais aussi au cas d'un couple résistant $M_r \neq 0$ concernant un nombre de tours stationnaire, inférieur à celui de la marche à vide.

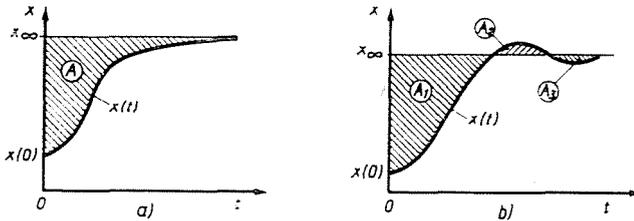


Fig. 4. Figure explicative pour la définition de la constante de temps «résultante»

b) Elle peut être définie directement par la calculatrice analogique.

c) Elle est facile à déterminer à la base de l'oscillogramme par planimétrie.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la définition primitive (16) de la constante de temps résultante ne se rapporte qu'au cas apériodique. C'est pourquoi nous allons commencer nos examens par le cas apériodique.

A) Cas apériodique

Dans notre cas, la valeur de la constante de temps résultante ([7], [3] etc.) est

$$T_{res} = T_1 + T_2. \tag{18}$$

(Il est indiqué de calculer la constante de temps résultante dans un cas général à partir de la forme d'équation transformée de Laplace. A ce sujet, nous nous contentons de citer la littérature (par ex. [8].)

En substituant les valeurs de T_1 et T_2 , on a, à la base de (4) et (5)

$$T_{res} = \frac{1}{\varrho - A} + \frac{1}{\varrho + A} = \frac{2\varrho}{\varrho^2 - A^2}. \tag{19}$$

Si nous exprimons les valeurs de ρ et A par l'amortissement à l'aide de ([1]-14) et ([1]-16), et les substituons dans (19), compte tenu de l'équation (2) nous avons

$$T_{\text{res}} = \frac{2z}{\Omega_0} = 2z T_{\text{min}}. \quad (20)$$

Introduisons ici encore la notion de constante de temps résultante relative:

$$\mu = \frac{T_{\text{res}}}{T_{\text{min}}} = 2z. \quad (21)$$

B) Cas périodique

Nous avons indiqué que certains auteurs considèrent la constante de temps résultante définie selon (16) comme pouvant caractériser aussi les processus *faiblement périodiques*. Étant donné que nous nous proposons d'étendre nos examens à la zone périodique complète, il convient de savoir quel est le résultat donné par la définition de la constante de temps relative (16) dans le cas périodique.

À la base de (17), il est évident que la valeur de T_{res} diminue sans cesse avec la diminution de z , et qu'au cas de $z = 0$ (oscillation non amortie), $T_{\text{res}} = 0$. *Ceci est un résultat erroné*, car en cas d'oscillation non amortie, il n'y a pas d'état stationnaire, donc la valeur de la constante de temps caractéristique ne peut être qu'infinie.

À l'Annexe 8.1, il est démontré que la valeur de la constante de temps résultante relative dans la phase périodique est également

$$\mu = 2z,$$

c'est-à-dire qu'elle diminue jusqu'à zéro en raison directe de l'oscillation.

Nous avons vu (fig. 2), qu'avec la réduction de z jusqu'à la valeur $z \cong 0,7$, le temps du réglage diminue, puis commence à augmenter et tend vers l'infini. En partant de ce fait, nous pouvons dire que la constante de temps résultante T_{res} peut être réellement caractéristique de la durée du démarrage jusqu'à la valeur $z \cong 0,7$ — en cas périodique aussi, — mais qu'en cas d'amortissement plus faible, elle donne un résultat erroné.

2.3. La constante de temps «d'aire»

Nous pouvons obtenir un résultat général valable aussi pour la zone périodique complète, avec la constante de temps définie sur le modèle de T_{res} et nommée constante de temps «d'aire»:

$$T_A = \frac{1}{x_\infty - x(0)} \int_0^\infty |x_\infty - x| dt. \quad (22)$$

(L'indice A rappelle d'une part le mot aire et d'autre part la valeur absolue.)

En vertu de la définition (22), nous additionnerons donc les aires situées entre la valeur stationnaire et la courbe de la fonction non pas selon leurs signes, mais selon leur valeur absolue. On peut voir que, conformément, la valeur de T_A tend vers l'infini avec la réduction de z , ce qui est juste.

A l'Annexe 8.2, nous avons calculé l'expression de la constante de temps d'aire relative

$$\tau = \frac{T_A}{T_{\min}} \tag{23}$$

valable pour notre cas:

$$\tau = 2 \cos a + 2 \exp \left(\frac{a}{\operatorname{tg} a} \right) \frac{1}{\exp \left(\frac{\pi}{\operatorname{tg} a} \right) - 1} . \tag{24}$$

(Si nous prenons en considération que $z = \cos a$, le premier membre de droite de l'expression (24) est $2z = \mu$. C'est donc le deuxième membre de droite qui donne la différence, en cas périodique, entre les constantes de temps relatives «résultante» et «d'aire».)

A titre de comparaison, nous avons tracé sur la fig. 5 la courbe $\sigma = f(z)$, de même que les courbes $4\tau = f(z)$ et $\pi\tau = f(z)$, conformément au raisonnement

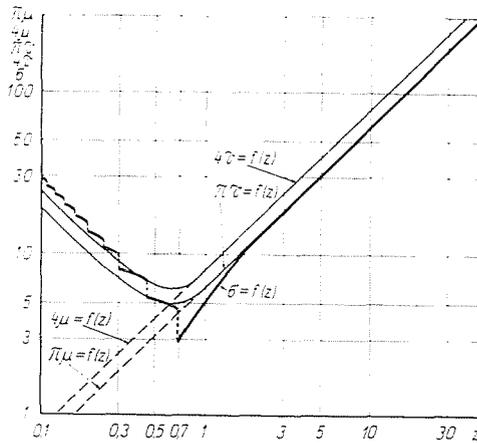


Fig. 5. Comparaison de $\tau = f(z)$ et $\sigma = f(z)$

suivi au point 2.1. La figure montre que la courbe $\pi\tau$ approche davantage la courbe σ pour les valeurs approximatives $z > 0,42$, alors que la courbe 4τ l'approche davantage pour les valeurs $z < 0,42$. Étant donné que généralement, dans la pratique $z > 0,5$, nous pouvons accepter la corrélation $\pi\tau = f(z)$ comme une bonne approximation de la corrélation $\sigma = f(z)$.

(Toujours à titre de comparaison, nous avons tracé au pointillé les droites $4\mu = f(z)$ et $\pi\mu = f(z)$ relatives à la constante de temps «résultante».)

Étant donné que la constante de temps d'aire présente une courbe d'allure analogue à celle de la fonction du temps de réglage $\pm 5\%$ définie comme durée du démarrage, et que d'autre part elle possède tous les avantages énumérés au début pour la constante de temps résultante, nous considérerons cette constante de temps comme la caractéristique de la durée de démarrage.

A propos de la constante de temps résultante (et d'aire), nous jugeons nécessaire d'indiquer que, comme le mentionne la littérature (voir par ex. [10]) et comme le démontre aussi directement le rapprochement des équations (20), ([1]-4) et ([1]-3):

$$T_{\text{res}} = T_1 + T_2 = \frac{R\theta}{K^2} = T_m \quad (25)$$

c'est-à-dire qu'en cas de moteur à courant continu et à excitation dérivée, la constante de temps résultante est égale à la constante de temps dite électromécanique du moteur (et des masses actionnées), que nous avons désignée par T_m .

(Outre la constante de temps électromécanique T_m , on considère habituellement comme une autre constante de temps «naturelle» du moteur, la constante de temps électrique

$$T_e = \frac{L}{R} . \quad (26)$$

Nous savons aussi de la littérature (v. par ex. [10], [11]), que

$$T_m T_e = T_1 T_2 , \quad (27)$$

d'où l'on a, selon (25):

$$T_e = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} . \quad (28)$$

2.4. La constante de temps «quadratique»

Dans l'article précédent, nous avons précisé qu'en cas périodique, c'est le total (absolu) des aires situées entre la valeur stationnaire et la courbe de la fonction qui caractérise le processus du point de vue du temps de réglage. Il est logique de prendre, à la place de l'intégrale difficile à calculer de $|x_\infty - x|$, celle de la valeur qui totalise à son tour les aires indépendamment des signes. En vertu de ce raisonnement (correspondant, en automatique, à la méthode de l'erreur quadratique), nous pouvons définir la constante de temps «quadratique» de la façon suivante:

$$T_Q = \frac{2}{[x_\infty - x(0)]^2} \int_0^\infty (x_\infty - x)^2 dt. \quad (29)$$

(Nous donnerons l'explication du facteur 2 figurant dans l'expression, à propos de l'examen du processus à une constante de temps. Soit par exemple

$$x = 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right); x_{\infty} = 1 \text{ et } x(0) = 0.$$

on aura alors, sans le facteur 2

$$\frac{1}{[x_{\infty} - x(0)]^2} \int_0^{\infty} (x_{\infty} - x)^2 dt = \frac{T}{2},$$

donc pour obtenir un résultat correct, il faut réellement multiplier par 2.)

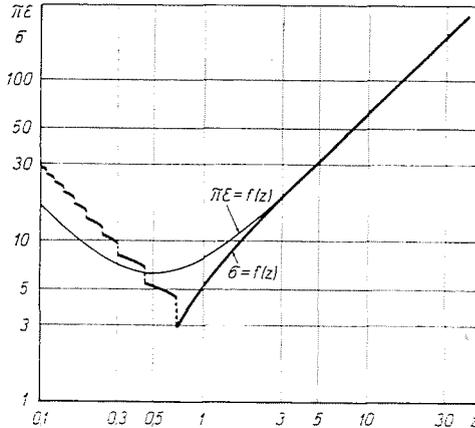


Fig. 6. Comparaison de $\epsilon = f(z)$ et $\sigma = f(z)$

A l'Annexe 8.3. nous avons calculé la valeur de la constante de temps quadratique T_Q et celle de la constante de temps quadratique relative ϵ . La valeur de cette dernière est

$$\epsilon = \frac{T_Q}{T_{\min}} = 2z + \frac{1}{2z}. \tag{30}$$

Sur la figure 6. nous avons comparé la courbe $\sigma = f(z)$ à la courbe $\pi\epsilon = f(z)$. La figure indique que, pour les valeurs $z < 3$, la courbe $\pi\epsilon$ diffère sensiblement de la courbe σ et présente aussi une allure différente (son minimum est à $z = 0.5$), c'est pourquoi nous ne pouvons considérer la constante de temps quadratique T_Q comme quantité caractéristique du point de vue de nos examens.

3. Méthode d'approximation proposée

A la base des examens effectués, nous proposons ce qui suit pour déterminer approximativement la durée du démarrage.

A) En cas de pure accélération de masse, on calcule la durée approximative du démarrage à la base de la fonction $\eta = f(z)$ — tracée sur la figure 7 — de la durée approximative relative du démarrage

$$\eta = \frac{t_{da}}{T_{\min}} \tag{31}$$

(nous désignons par t_{da} la durée approximative du démarrage). D'après la figure,

$$\text{si } z > 0,7, \quad \eta = 2\pi z, \quad (32a)$$

$$\text{si } z < 0,7, \quad \eta = \frac{3}{z}. \quad (32b)$$

(Le minimum de η est — exactement — à la valeur $z = 0,691$.)

D'après ces équations, ainsi que des équations (20), (25), ([1]-14), ([1]-5) et (27), la durée approximative du démarrage ($t_{da} = \eta T_{\min}$) est

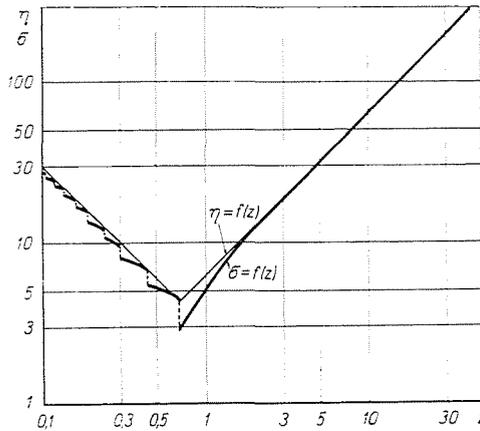


Fig. 7. La fonction de la durée relative approximative η du démarrage

si $z > 0,7$:

$$t_{da} = \frac{2\pi z}{\Omega_0} = \pi \frac{R\theta}{K^2} = \pi T_m; \quad (33a)$$

si $z < 0,7$:

$$t_{da} = \frac{3}{z\Omega_0} = 6 \frac{L}{R} = 6 T_e. \quad (33b)$$

Remarquons que pour les valeurs de l'ordre de $z > 3$, t_{da} coïncide avec la durée exacte du démarrage, et qu'au cas de $z < 3$, il donne des valeurs supérieures à cette dernière; donc en l'appliquant, on approche la sécurité.

B) S'il y a aussi un couple résistant, nous devons, en calculant la durée pu démarrage, prendre en considération les résultats de nos examens relatifs à la constante de temps d'aire, indiqués au chapitre 6.

4. Calcul des paramètres optimaux du démarrage

En mettant à profit simultanément nos considérations ci-dessus concernant le calcul approximatif du temps de démarrage, et la méthode de calcul de la pointe de courant de démarrage, exposée dans notre article précédent

[1], nous pouvons déterminer — en cas de pure accélération de masse — les paramètres optimaux du démarrage. Plus exactement: en cas de pointe de courant prescrite, on peut calculer la durée de démarrage minimum pouvant être réalisée, ou déterminer, pour une durée de démarrage donnée, la pointe de courant minimum pouvant être obtenue.

(Dans ce qui suit, nous ferons état de la méthode présentée dans [1] et utiliserons les formules qui y ont été obtenues — sans nous livrer à aucune explication détaillée. Les formules seront désignées de la même manière que jusqu'à présent.)

Dans la pratique, le problème se présente généralement de sorte que la pointe de courant admise est d'une valeur prescrite, tout comme la durée de démarrage demandée. De cette façon, le problème devient surdéterminé. Le raisonnement et la méthode à exposer nous permettent de maintenir l'une des exigences (par ex. la pointe de courant) à une valeur fixe, et de réduire l'autre (par ex. la durée du démarrage).

4.1. Réduction de la durée du démarrage et calcul de la durée de démarrage minimum

Dans ce cas, la valeur de la pointe de courant est donc fixée.

La marche du calcul consiste alors à déterminer, en connaissance des données du moteur, l'amortissement nécessaire à la base de la courbe $\beta = f(z)$, et d'en déduire la valeur de la résistance en série. (Dans la pratique, la pointe de courant admise est généralement d'une valeur telle que le processus du démarrage devient apériodique. Notre raisonnement ultérieur n'est valable que pour ce cas.)

Après cela, nous contrôlons la durée du démarrage à la base de la formule (33a). Si elle se trouve être supérieure à la durée prescrite, nous pourrions raisonner comme suit pour la réduire (d'après la méthode de calcul approximative décrite à l'article 3):

a) Tant que $z > 0,7$, la durée du démarrage ne dépend pas de l'inductance (car lorsque cette dernière change, z et Ω_0 changent dans un sens et une proportion identiques), mais uniquement de la résistance [cf. (33a)].

b) Si nous augmentons l'inductance du circuit d'induit par une inductance en série, la pointe de courant diminue.

Ceci est logique d'après la formule de la pointe de courant

$$i_m = \beta \frac{U}{r} \quad ([1]-44)$$

si l'on considère que

1. avec l'augmentation de l'inductance (par ex. à un multiple a), l'amortissement diminue, d'après l'équation ([1]-3) à une fraction $\frac{1}{\sqrt{a}}$ de sa valeur;

2. par suite, la valeur de β augmente bien d'après la courbe $\beta = f(z)$, mais en même temps

3. la valeur de la résistance transitoire r s'élève également à un multiple \sqrt{a} , conformément à la relation ([1]-31). Or, étant donné que

4. l'augmentation de β est inférieure à celle de r , la valeur de i_m diminue.

c) Donc, en cas de pointe de courant prescrite — et si nous utilisons une inductance en série, — la valeur de la résistance peut être réduite, ce qui diminue aussi proportionnellement la durée du démarrage selon la formule (33a).

L'inductance du circuit d'induit peut être augmentée (donc la durée du démarrage réduite) tant que nous n'avons pas atteint la valeur limite $z = 0,7$. Si nous continuons à réduire z , la durée du démarrage augmente conformément à la formule (33b).

Ces considérations se rapportaient à l'approximation selon $\eta = f(z)$. En cas de $\sigma = f(z)$, la durée exacte du démarrage est donc inférieure à celle calculée ici (dans la proportion de $\frac{2,8}{4,3}$ par ex., si $z = 0,7$, d'après la fig. 7).

Exemple numérique 1. Calculons la durée minimum de démarrage pouvant être réalisée avec une pointe de courant $i_m = 600$ A, par le moteur de 18 kW et de 1500 tours/min⁻¹ décrit dans l'article [6], effectuant une pure accélération de masse.

Les données initiales nécessaires sont:

$$U = 150 \text{ V,}$$

$$K = 0,955 \text{ Vs,}$$

$$\Theta = 0,85 \text{ W s}^3,$$

$$L_a = 3 \cdot 10^{-4} \text{ H,}$$

$$R_a = 0,0225 \text{ ohm.}$$

a) Calcul de la résistance correspondant à la pointe de courant prescrite.

$$r_a = K \sqrt{\frac{L_a}{\Theta}} = 0,01793 \text{ ohm,} \quad ([1]-31)$$

$$i_{m_0} = \frac{U}{r_a} = 8400 \text{ A,} \quad ([1]-32)$$

$$\beta = \frac{i_m}{i_{m_0}} = 0,0714 < 0,1. \quad (1-26)$$

Nous pouvons donc calculer avec l'approximation $i_m = \frac{U}{R}$.

D'où

$$R = \frac{U}{i_m} = 0,25 \text{ ohm.}$$

b) La durée du démarrage est, si nous démarrons seulement avec la résistance R :

$$t_{da} = \frac{\pi R \Theta}{K^2} = 0,732 \text{ sec.} \quad (33a)$$

c) Nous pouvons réduire cette durée de démarrage en utilisant, en plus de la résistance, une inductance en série.

La durée du démarrage est la plus petite si $z = 0,7$. Avec la résistance R que nous venons de calculer, la valeur de l'amortissement est

$$z = \frac{R}{2r_d} = 7,01. \quad ([1]-33)$$

Désignons par R_1 et L_1 la résistance et l'inductance satisfaisant aux conditions $z = 0,7$ et $i_m = 600$ A. La valeur de R_1 peut être calculée de la valeur de la nouvelle résistance transitoire r_1 . A $z = 0,7$ correspond, conformément à $\beta = f(z)$:

$$\beta_{\min} = 0,46.$$

D'où

$$i_{m01} = \frac{i_m}{\beta_{\min}} = 1304 \text{ A} = \frac{U}{r_1}. \quad ([1]-26)$$

$$r_1 = \frac{U}{i_{m01}} = 0,115 \text{ ohm}. \quad ([1]-32)$$

Étant donné que

$$z = 0,7 = \frac{R_1}{2r_1},$$

on a

$$R_1 = 0,161 \text{ ohm}.$$

On voit que $R_1 < R$. La durée du démarrage diminue proportionnellement aux résistances:

$$t_{da, \min} = \frac{R_1}{R} t_{da} = 0,472 \text{ sec}.$$

A la base de

$$r_1 = K \sqrt{\frac{L_1}{\Theta}} \quad ([1]-31)$$

la valeur d'inductance nécessaire du circuit d'induit est:

$$L_1 = \frac{r_1^2 \Theta}{K^2} = 1,235 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

4.2. Réduction de la pointe de courant et calcul de la pointe de courant minimum

Dans ce cas, la valeur de la durée de démarrage est fixe. Le problème peut être résolu par un raisonnement semblable au précédent. Tout d'abord, de la durée de démarrage prescrite (33a), nous calculons la valeur de la résistance en série R , puis nous choisissons pour cette valeur de R une inductance qui donne $z = 0,7$.

Exemple numérique 2. Choisissons de nouveau le moteur figurant dans l'exemple 1. Soit la durée de démarrage prescrite $t_d = 1$ sec. Conformément à (33a), la résistance s'y rapportant est

$$R_2 = \frac{K^2 t_{da}}{\pi \Theta} = 0,342 \text{ ohm}.$$

Comme R_2 est supérieur à R calculé dans l'exemple 1, nous pouvons calculer de nouveau par approximation

$$i_m = \frac{U}{R_2} = 439 \text{ A}.$$

Cette pointe de courant peut être réduite par une inductance en série. (Comme nous l'avons indiqué, la durée du démarrage ne change pas.) La pointe de courant est la plus petite si $z = 0,7$. On a alors

$$r_2 = \frac{R_2}{2 \cdot 0,7} = 0,244 \text{ ohm} \quad ([1]-33)$$

et la pointe de courant est

$$i_{m,\min} = \beta_{\min} \frac{U}{r_2} = 283 \text{ A} \quad ([1]-44)$$

L'inductance nécessaire est

$$L_2 = \frac{r_2^2 \Theta}{K^2} = 5,55 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

5. Résultats des expériences

Dans la communication [1], nous avons fait connaître les résultats de mesures relatifs à la pointe de courant, obtenus avec un moteur effectuant une pure accélération de masse, et évalués d'après les oscillogrammes relevés. Ces derniers nous ont également donné les résultats concernant la durée du démarrage. Nous nous contenterons de parler ici des valeurs mesurées de la constante de temps d'aire T_A et du temps de réglage t_{reg} de $\pm 5\%$. Nous avons déterminé T_A par planimétrage, tandis que les valeurs de t_{reg} ont été obtenues par lecture directe.

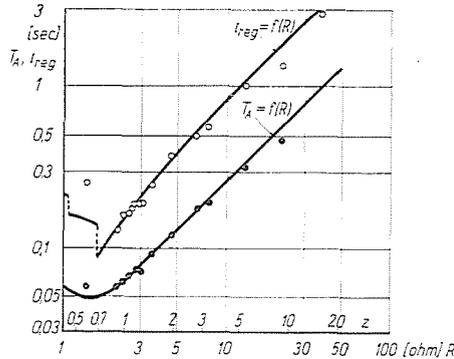


Fig. 8. Les valeurs mesurées de la constante de temps d'aire et du temps de réglage de $\pm 5\%$.

Sur la figure 8, nous avons marqué les valeurs de T_A par des cercles pleins, et celles de t_{reg} par des cercles. Nous avons également porté sur la figure les courbes $T_A = f(z)$ et $t_{\text{reg}} = f(z)$.

D'après les figures, nous pouvons constater qu'en cas apériodique, les résultats théoriques et pratiques montrent une bonne concordance. Pour le cas périodique, nous ne disposons pas d'un nombre suffisant de mesures, mais sur la figure 8, l'écart important entre la valeur mesurée à $z = 0,583$ et la valeur calculée, nous avertit qu'il faut prendre garde en calculant la durée du démarrage en cas périodique.

6. Changement de la durée du démarrage en cas de couple résistant

Les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent se rapportaient au moteur effectuant une pure accélération de masse.

Pour nous renseigner sur la valeur de la durée de démarrage, au cas où le moteur doit non seulement effectuer une accélération de masse, mais aussi vaincre le couple résistant M_r , pendant le démarrage, nous devons recourir de nouveau à la calculatrice analogique. (La programmation de celle-ci a été étudiée dans l'article [1].)

Il convient néanmoins d'observer que, sur la durée de démarrage d'un moteur chargé, nous ne pouvons obtenir des indications aussi générales que celles qui ont été données sur la pointe de courant [1]. La cause en est que le nombre de tours stationnaire d'un moteur chargé dépend de la chute de tension du circuit d'induit, qui dépend à son tour de la valeur de la résistance (de l'amortissement) du circuit, et de la valeur, à ce nombre de tours stationnaire, du courant d'induit nécessaire pour vaincre le couple résistant. Comme la durée du démarrage est rapportée au nombre de tours stationnaire, il ne suffit pas d'effectuer les examens en fonction du couple résistant et de l'amortissement, mais il faut aussi déterminer chaque fois le nombre de tours stationnaire dépendant des paramètres donnés M_r et z .

La recherche de relations tenant compte de tous ces points de vue n'entrait pas dans nos intentions. Les examens effectués sont en premier lieu d'intérêt théorique en ce qu'ils permettent d'obtenir un tableau *qualitatif* des conditions prévues. Les résultats pouvant être utilisés *quantitativement* sont peu importants.

La méthode choisie est la suivante:

1. A la base des considérations indiquées à l'article 2.3., nous avons admis, comme approximation, la constante de temps d'aire comme caractéristique de la durée de démarrage. La calculatrice analogique permet de déterminer directement la constante de temps d'aire sous charge T_{Ar} . (L'indice r désigne le couple résistant.)

2. Nous avons calculé le quotient des constantes de temps T_{Ar} et T_{\min} , c'est-à-dire la constante de temps relative:

$$\tau_r = \frac{T_{Ar}}{T_{\min}}. \quad (34)$$

3. Nous avons calculé, en outre, pour des amortissements identiques, le quotient des constantes de temps d'aire relatives se rapportant à l'accélération sous charge et à la pure accélération de masse, le coefficient

$$\delta = \frac{\tau_r}{\tau}. \quad (35)$$

Ce coefficient montre le multiple du temps nécessité par le moteur pour atteindre la bande de $\pm 5\%$ de sa *vitesse angulaire stationnaire* avec une charge, par rapport à la pure accélération de masse.

(Si nous calculons la durée de démarrage en cas de pure accélération de masse par la formule approximative (33), la durée de démarrage approximative sous charge sera

$$t_{dar} = \delta t_{ca'} \quad (36)$$

4. La vitesse angulaire stationnaire dépend — comme nous l'avons dit plus haut — des valeurs de M_r et de z .

Si le moteur effectue une pure accélération de masse, la vitesse angulaire stationnaire est la vitesse angulaire en marche à vide ω_∞ , indépendamment de l'amortissement (en supposant une marche à vide idéale).

a) Si nous mettons en marche le moteur avec un amortissement naturel z_n ($R = R_a$, démarrage «brutal»), la vitesse angulaire stationnaire est la vitesse angulaire nominale ω_n (nous supposons — comme nous l'avons fait jusqu'à présent — que le moteur est chargé nominalement).

b) Enfin, si l'amortissement du circuit d'induit du moteur est $z > z_n$, la vitesse angulaire stationnaire est $\omega_r < \omega_n$ et peut être calculée en vertu des considérations suivantes.

A l'état stationnaire, conformément à ([1]-1) et ([1]-40):

$$U = R i_r + K \omega_r, \quad (37)$$

$$K i_r = M_r(\omega_r) = M_n f(\omega_r). \quad (38)$$

Ici nous avons désigné par i_r le courant d'induit stationnaire, et par $f(\omega_r)$ le facteur qui tient compte du changement du couple résistant en fonction de la vitesse angulaire (cf. [6, 2.2.]).

Les deux équations donnent

$$U = R \frac{M_n f(\omega_r)}{K} + K \omega_r, \quad (39)$$

et après transformation:

$$i = \frac{R}{R_a} \frac{R_a M_n}{KU} f(\omega_r) + \frac{K}{U} \omega_r. \quad (40)$$

Considérons que

$$U = K \omega_\infty, \quad (41)$$

et que d'après ([1]-33)

$$\frac{R}{R_a} = \frac{z}{z_n}.$$

Il faut observer en outre, qu'en cas d'amortissement naturel

$$U = R_a i_n + K \omega_n, \quad (37a)$$

$$K i_n = M_n, \quad (38a)$$

et que par analogie avec (40) et compte tenu de (41):

$$1 = \frac{R_a M_n}{K U} + \frac{\omega_n}{\omega_\infty}, \quad (40a)$$

qui donne, à la base de ([1]-41)

$$\frac{R_a M_n}{K U} = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_\infty} = \frac{\Delta \omega_n}{100}. \quad (42)$$

En substituant ces formules dans (40) on a, après transformation

$$\omega_r = \omega_\infty \left[1 - \frac{z}{z_n} \frac{\Delta \omega_n}{100} f(\omega_r) \right]. \quad (40b)$$

Les expressions de ω_r , en fonction de $f(\omega_r)$, sont les suivantes (en négligeant la déduction):

I. Si $f(\omega_r) = 1$, c'est-à-dire $M_r = M_n$

$$\omega_r = \omega_\infty \left(1 - \frac{z}{z_n} \frac{\Delta \omega_n}{100} \right). \quad (40c)$$

II. Si $f(\omega_r) = \frac{\omega_r}{\omega_n}$, c'est-à-dire $M_r = M_n \frac{\omega_r}{\omega_n}$

$$\omega_r = \omega_\infty \frac{100 - \Delta \omega_n}{100 + \Delta \omega_n \left(\frac{z}{z_n} - 1 \right)}. \quad (40d)$$

III. Si $f(\omega_r) = \left(\frac{\omega_r}{\omega_n} \right)^2$, c'est-à-dire $M_r = M_n \left(\frac{\omega_r}{\omega_n} \right)^2$

$$\omega_r = \omega_\infty \frac{\sqrt{1 + 4B} - 1}{2B}, \quad (40e)$$

où

$$B = \frac{z}{z_n} \frac{100 \Delta \omega_n}{(100 - \Delta \omega_n)^2}. \quad (43)$$

6.1. Les valeurs du coefficient δ d'après les résultats obtenus sur la calculatrice analogique

Les figures 9 et 10 montrent, d'après les résultats obtenus sur la calculatrice analogique, la série des fonctions $\delta = f(z_n, z)$, pour une chute de vitesse nominale de $\Delta\omega_n = 5\%$.

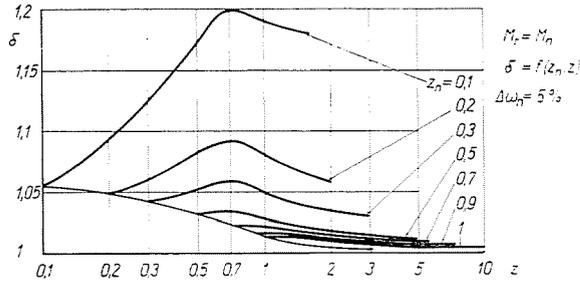


Fig. 9. Les valeurs du coefficient δ en fonction de l'amortissement, pour le cas de $M_r = M_n$

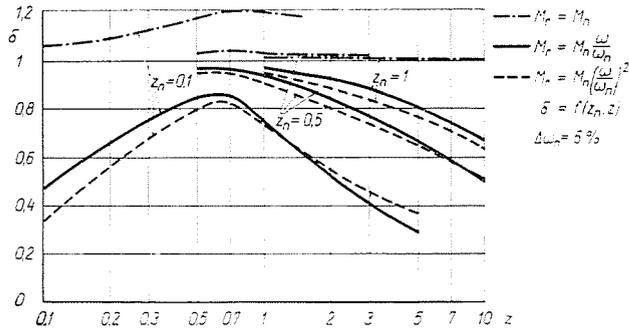


Fig. 10. Les valeurs du coefficient δ en fonction de l'amortissement, en cas de couples résistants différents

La figure 9 se rapporte au cas $M_r = M_n$. Il est intéressant de remarquer que, pour des amortissements peu importants, la valeur de δ est la plus grande en cas de $z = 0,7$, donc à la valeur d'amortissement où la durée du démarrage est la plus petite en cas de pure accélération de masse. — Si $z_n \cong 1$, $\delta \cong 1$ et reste à peu près constant, indépendamment de z .

Pour faciliter l'éventuelle interpolation, nous avons tracé sur la figure la courbe reliant les points $z = z_n$.

La fig. 10 est valable pour des couples résistants augmentant proportionnellement avec la vitesse angulaire et avec le carré de cette vitesse. Nous n'y avons représenté que les cas $z_n = 0,1, 0,5, \text{ et } 1$. A titre de comparaison, nous

avons également tracé sur la figure (au trait mixte) les courbes correspondant aux cas $M_r = M_n$ et prises dans la fig. 9.

On voit sur la figure 10 que si $z = z_n$ (dans ce cas les valeurs de la durée de démarrage peuvent être comparées directement, car elles se rapportent toutes à la vitesse angulaire ω_n), le moteur atteint le plus vite sa vitesse nominale lorsque le couple résistant varie selon le carré de la vitesse angulaire. La diffé-

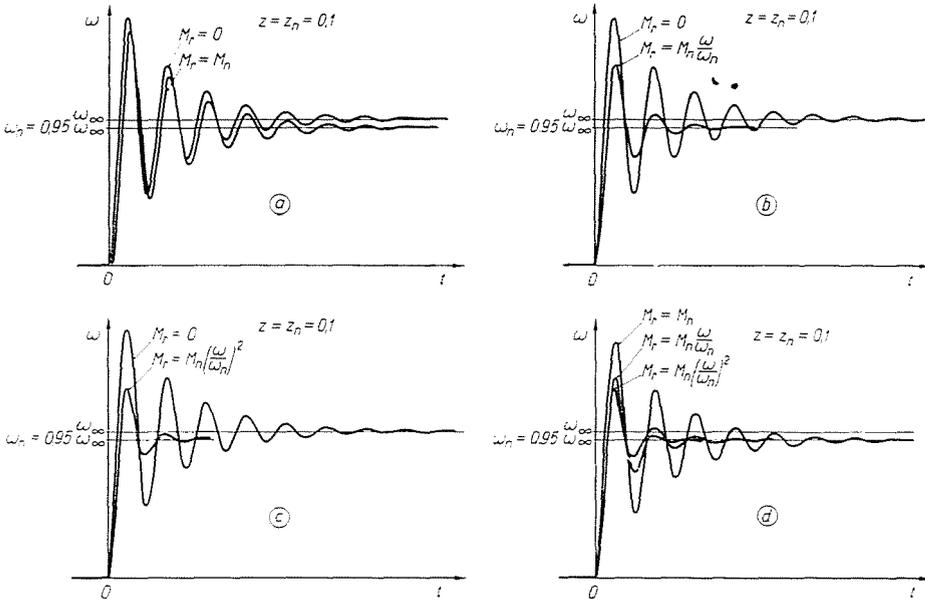


Fig. 11. Changement de la vitesse angulaire dans le temps sous l'effet de couples résistants différents, en cas de démarrage brutal, si $z_n = 0,1$

rence entre les trois cas est la plus grande au cas de $z_n = 0,1$, et diminue avec l'accroissement de l'amortissement naturel. L'explication en est plausible: le couple dépendant de la vitesse angulaire représente un amortissement additionnel, et c'est pourquoi le processus d'oscillation se termine plus vite qu'au cas de $M_r = M_n$. (Si ω est supérieur à ω_n , $M_r > M_n$, le moteur devient surchargé dans une mesure d'autant plus grande que le couple résistant croît avec la vitesse angulaire selon un exposant plus élevé.) Cet amortissement additionnel intervient d'autant moins que l'amortissement naturel est plus important.

Ce qui a été dit ressort clairement des figures 11–13, relevées avec l'enregistreur de diagrammes adapté à la calculatrice analogique. La figure 11 se rapporte au démarrage «brutal» du moteur à amortissement naturel $z_n = 0,1$. Les figures a), b) et c) comparent les vitesses angulaires des moteurs

différemment chargés et démarrant à vide, tandis que la *figure d)* offre une comparaison des trois cas de charge. Les figures 12 et 13 représentent respectivement le démarrage brutal d'un moteur à amortissement naturel $z_n = 0,5$ et $z_n = 1$. Les différences entre les diverses charges n'y sont plus perceptibles.

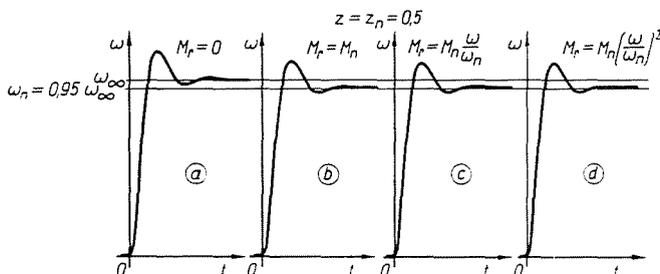


Fig. 12. Changement de la vitesse angulaire dans le temps sous l'effet de couples résistants différents, en cas de démarrage brutal, si $z_n = 0,5$

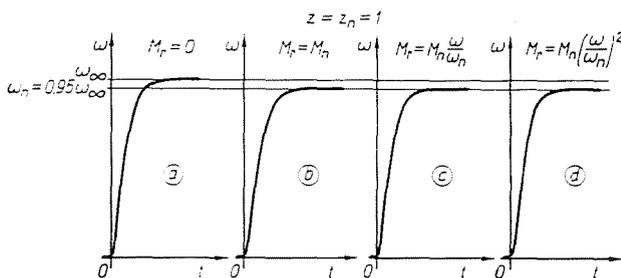


Fig. 13. Changement de la vitesse angulaire dans le temps sous l'effet de couples résistants différents, en cas de démarrage brutal, si $z_n = 1$

Nous soulignons de nouveau que les déductions que nous venons de faire ne sont valables que pour le cas $z = z_n$ ($R = R_a$). Si $z > z_n$ ($R > R_a$), le moteur atteint différents nombres de tours stationnaires en cas de couples résistants différents (il s'agit du démarrage en un temps !). Par ex., si $z = 10 z_n$, on a, d'après les formules (40c-e),

$$\text{au cas où } M_r = M_n \qquad \omega_r = 0,5 \omega_\infty,$$

$$\text{au cas où } M_r = M_n \frac{\omega}{\omega_n} \qquad \omega_r = 0,66 \omega_\infty, \text{ et}$$

$$\text{au cas où } M_r = M_n \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \qquad \omega_r = 0,72 \omega_\infty.$$

Exemple numérique 3. Dans l'article [1] nous avons calculé, en guise de comparaison, la pointe de courant de démarrage du moteur à démarrage brutal figurant dans les exemples 16–18 du livre de K.W. Wagner [12, pp. 315–318]. Poursuivons la comparaison et calculons la durée du démarrage.

Dans l'article [1] nous avons calculé que $z = z_n = 0.433$. Comme ainsi $z < 0.7$, en cas de pure accélération de masse, nous aurons la durée du démarrage par la formule (33b):

$$t_{da} = 6 T_e = 6 \frac{L}{R_a} = 0.5 \text{ sec} \quad (33b)$$

(étant donné que $L = 10^{-3} H$ et $R_a = 0,012 \text{ ohm}$).

Au démarrage avec une charge $M_r = M_n$

$$t_{dar} = \delta t_{da} \quad (36)$$

où la valeur de δ est prise dans la *fig. 9*. A la base du diagramme $\delta = 1,044$, ceci donne

$$t_{dar} = 0,522 \text{ sec.}$$

Wagner ne définit pas la durée du démarrage, mais trace la variation de la vitesse angulaire en fonction du temps et déclare, après l'examen de la courbe, que le démarrage s'est «pratiquement terminé» en 0.6 sec.

7. Conclusion

L'étude se proposait de calculer la durée du démarrage de moteurs à courant continu, à excitation dérivée, démarrés en un temps. Nous nous étions assigné l'examen d'ensemble de la question et la déduction de formules simples.

Comme *durée de démarrage*, nous avons adopté le temps de réglage se rapportant à une bande de $\pm 5\%$. Pour calculer approximativement la durée du démarrage, il est préférable d'utiliser la constante de temps d'aire T_{Δ} .

En cas de pure *accélération de masse*, nous calculons la durée du démarrage à la base des relations approximatives

$$t_{da} = \pi T_m \quad (\text{si } z \geq 0,7) \quad (33a)$$

et
$$t_{da} = 6 T_e \quad (\text{si } z < 0,7). \quad (33b)$$

En connaissant ces formules approximatives et la fonction $\beta = f(z)$ [1], nous pouvons calculer pour une pointe de courant prescrite la durée minimum de démarrage, ou pour une durée de démarrage prescrite la pointe de courant minimum — toutes deux en cas d'utilisation d'une *inductance en série*.

(L'utilisation de l'inductance en série peut être éventuellement limitée par des considérations d'économie dont nous n'avons pas fait mention.)

En cas de démarrage avec un *couple résistant*, le nombre de tours stationnaire dépend de l'amortissement et du couple résistant. La durée de démarrage rapportée au nombre de tours stationnaire peut être calculée à l'aide des formules approximatives valables pour la pure accélération de masse, et du coefficient δ expliqué au chapitre 6 et représenté par un diagramme.

8. Annexe

8.1. Valeur de la constante de temps résultante en cas périodique

Selon la définition (16):

$$T_{res} = \frac{1}{x_{\infty} - x(0)} \int_0^{\infty} (x_{\infty} - x) dt.$$

Dans notre cas $x = \omega$, $x_{\infty} = \omega_{\infty}$ et $x(0) = 0$. Après avoir ordonné l'équation, on a

$$T_{res} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{\infty}} \right) dt. \quad (\text{A.1})$$

En cas périodique, d'après ([6]-9)

$$1 - \frac{\omega}{\omega_{\infty}} = \left(\frac{\varrho}{\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right) \exp(-\varrho t). \quad ([6]-9a)$$

Substituons les valeurs $\varrho = z \Omega_0$ ([1]-14) et $\Omega = \sqrt{1-z^2} \Omega_0$ ([1]-15), puis introduisons la nouvelle variable a d'après l'équation $z = \cos a$ ([1]-19). Supposons enfin que $\Omega_0 = 1$, ce qui signifie qu'au lieu de la constante de temps résultante T_{res} , nous calculons la constante de temps résultante relative μ rapportée à $T_{min} = \frac{1}{\Omega_0}$. On a ainsi

$$\varrho = \cos a, \quad (\text{A.2})$$

$$\Omega = \sin a, \quad (\text{A.3})$$

qui, substitués dans ([6]-9a) et ordonnés, donnent

$$\mu = \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(a + t \sin a)}{\sin a} \exp(-t \cos a) \right] dt. \quad (\text{A.4})$$

Désignons l'intégrale indéfinie

$$\int \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{\infty}} \right) dt$$

par J , et calculons d'abord la valeur de

$$\sin a J = \int [\exp(-t \cos a) \sin(a + t \sin a)] dt.$$

Nous pouvons calculer l'intégrale de droite selon les règles de l'intégration du produit, mais on peut aussi prendre sa valeur dans des tables (v. par ex. Siemens Formel- und Tabellenbuch, 2^e édition. W. Girardet, Essen, p. 48). Nous aurons ainsi, après avoir ordonné l'équation

$$J = - \frac{\sin(2a + t \sin a)}{\sin a} \exp(-t \cos a). \quad (\text{A.5})$$

Si nous passons à l'intégrale définie, après substitution des limites nous aurons

$$\mu = \frac{\sin 2a}{\sin a} = 2 \cos a = 2z. \quad (21)$$

8.2. Valeur de la constante de temps d'aire en cas périodique

Conformément au raisonnement précédent, nous calculons cette fois encore la constante de temps d'aire relative, donnée par la formule

$$\tau = \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{\omega}{\omega_{\infty}} \right| dt \quad (\text{A.6})$$

à la base de la définition (22).

Pour obtenir l'intégrale de la valeur absolue, nous procédons par étapes à l'aide de l'intégrale indéterminée J . Les limites des diverses étapes sont les zéros de la fonction $1 - \frac{\omega}{\omega_{\infty}}$.

À la base de (A.4), la valeur de la fonction est zéro lorsque

$$\sin(a + t_n \sin a) = 0,$$

d'où

$$t_n = \frac{n\pi - a}{\sin a} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.7})$$

donne les temps cherchés.

On aura ainsi

$$\begin{aligned} \tau &= J(t_1) - J(0) - [J(t_2) - J(t_1)] + J(t_3) - J(t_2) - \dots = \\ &= -J(0) + 2J(t_1) - 2J(t_2) + 2J(t_3) - \dots \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Les diverses valeurs d'intégrales sont

$$\begin{aligned} J(0) &= -2 \cos a, \\ J(t_1) &= \exp\left(-\frac{\pi - a}{\operatorname{tg} a}\right), \\ J(t_2) &= -\exp\left(-\frac{2\pi - a}{\operatorname{tg} a}\right), \\ J(t_3) &= \exp\left(-\frac{3\pi - a}{\operatorname{tg} a}\right), \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

En les substituant dans (A.8), on a

$$\tau = 2 \cos a + 2 \exp\left(-\frac{\pi - a}{\operatorname{tg} a}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\operatorname{tg} a}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi}{\operatorname{tg} a}\right) + \dots \right].$$

Nous avons, entre crochets, une progression géométrique infinie convergente, dont il résulte

$$\tau = 2 \cos a + 2 \exp\left(-\frac{\pi - a}{\operatorname{tg} a}\right) \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{\operatorname{tg} a}\right)}.$$

On a enfin, en ordonnant l'équation

$$\tau = 2 \cos a + \exp\left(\frac{a}{\operatorname{tg} a}\right) \frac{1}{\exp\left(\frac{\pi}{\operatorname{tg} a}\right) - 1}. \quad (24)$$

8.3. Calcul de la constante de temps quadratique

D'après la définition, la constante de temps quadratique est

$$T_Q = \frac{2}{[x_\infty - x(0)]^2} \int_0^\infty (x_\infty - x)^2 dt. \quad (29)$$

Étant donné que, comme dans 8.1., $x_\infty = \omega_\infty$; $x(0) = 0$ et $x = \omega$, on a

$$T_Q = \frac{2}{\omega_\infty^2} \int_0^\infty (\omega_\infty - \omega)^2 dt = 2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{\omega}{\omega_\infty}\right)^2 dt. \quad (A.9)$$

La valeur de $\frac{\omega}{\omega_\infty}$ peut être écrite de la façon suivante (avec les symboles usuels de la transformation de Laplace):

$$\frac{\omega}{\omega_\infty} = 1 + A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t), \quad (A.10)$$

où

$$A_1 = \frac{\Omega_0^2}{p_1 H'(p_1)}, \quad (A.11)$$

$$A_2 = \frac{\Omega_0^2}{p_2 H'(p_2)} = -\frac{\Omega_0^2}{p_2 H'(p_1)}, \quad (A.12)$$

car $H'(p_2) = -H'(p_1)$.

En ordonnant et élevant au carré (A. 10)

$$\left(1 - \frac{\omega}{\omega_\infty}\right)^2 = A_1^2 \exp(2p_1 t) + 2 A_1 A_2 \exp[(p_1 + p_2)t] + A_2^2 \exp(2 p_2 t). \quad (A.13)$$

Après substitution dans (A.9) et intégration, on a

$$T_Q = -2 \left(\frac{A_1^2}{2p_1} + \frac{2A_1 A_2}{p_1 + p_2} + \frac{A_2^2}{2p_2} \right). \quad (A.14)$$

Après substitution des valeurs de A_1 et A_2

$$T_Q = -\frac{\Omega_0^4}{[H'(p_1)]^2} \left(\frac{1}{p_1^2} - \frac{4}{p_1 p_2 (p_1 + p_2)} + \frac{1}{p_2^2} \right). \quad (A.15)$$

En réduisant au même dénominateur l'expression mise entre parenthèses, on a

$$T_Q = -\frac{\Omega_0^4}{[H'(p_1)]^2} \frac{(p_1^2 + 3p_1 p_2 + p_2^2)(p_1 - p_2)^2}{p_1^2 p_2^2 (p_1 + p_2)}. \quad (A.16)$$

Si nous inscrivons la valeur de $H(p)$ sous forme de facteur radical, nous obtenons

$$H(p) = (p - p_1)(p - p_2), \quad (A.17)$$

d'où il ressort que

$$H'(p_1) = p_1 - p_2. \quad (A.18)$$

En substituant cette valeur dans (A.16), on a, après réduction

$$T_Q = -\Omega_0^4 \frac{(p_1 + p_2)^2 + p_1 p_2}{(p_1 + p_2)^2 p_1^2 p_2^2}. \quad (A.19)$$

Comme

$$p_1 + p_2 = -2q = -2z\Omega_0, \quad (\text{A.20})$$

et

$$p_1 p_2 = \Omega_0^2, \quad (\text{A.21})$$

après substitution dans (A.19) et réduction, on obtient

$$T_Q = \frac{1}{\Omega_0} \frac{4z^2 + 1}{2z} = T_{\min} \left(2z + \frac{1}{2z} \right) \quad (\text{A.22})$$

qui donnera la constante de temps quadratique relative

$$\varepsilon = \frac{T_Q}{T_{\min}} = 2z + \frac{1}{2z}. \quad (30)$$

Résumé

Après la définition de la durée de démarrage, l'auteur utilise différentes constantes de temps pour simplifier le calcul approximatif de la durée de démarrage en cas de pure accélération de masse. La constante de temps dite «d'aire» par l'auteur permet d'approcher le mieux la durée du démarrage. L'auteur propose une méthode d'approximation simple. Les résultats présentés, joints à ceux décrits dans un article précédent, qui servaient à calculer la pointe de courant de démarrage, permettent de déterminer les paramètres optima du démarrage. Sur la base des résultats donnés par la calculatrice analogique, l'article examine également le démarrage sous charges différentes. L'étude est complétée par la description des résultats expérimentaux et par des exemples numériques.

Bibliographie

1. KELEMEN, T.: Méthode pour le calcul de la pointe de courant de démarrage des moteurs à courant continu, à excitation dérivée. *Periodica Polytechnica (Electrical Engineering)*, **7**, 325—345 (1963).
2. CSÁKI, F.: Some remarks concerning the quickresponse overexcitation of synchronous generators. *Periodica Polytechnica (Electrical Engineering)*, **2**, 111—129 (1958).
3. BENEDIKT, O.: Különleges villamosgépek I. (Machines électriques spéciales I. Notes de l'Université Technique de Budapest. Remanié par T. Kelemen). Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.
4. SZABLYA, J.: Erősítőforgógépek alkalmazása a szabályozástechnikában. (Emploi des machines amplificatrices en automatique.) Méchnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1954.
5. GILLE, J. C.—PÉLEGRIN, M.—DECAULNE, P.: Lehrgang der Regelungstechnik I., p. 107. R. Oldenbourg, München — VEB Verlag Technik, Berlin, 1960.
6. CSÁKI, F.—KELEMEN, T.: Démarrage automatique d'un groupe auxiliaire d'alimentation. *Periodica Polytechnica (Electrical Engineering)*, **5**, 316—340 (1961).
7. NECHLEBA, F.: Erweiterung des Begriffes der Zeitkonstante. *ETZ-A*, **74**, 98—101 (1953).
8. SZABLYA, J.: Erősítőgépek dinamikus kihasználási száma. (Facteur dynamique de la mise à profit des machines amplificatrices.) Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei, **XV**, n° 1—4., 227—248 (1955).
9. PELCZEWSKI, W.: Elektrische Maschinenverstärker. VEB Verlag Technik, Berlin, 1961.
10. GENS, W.: Beitrag zur Ermittlung der Zeitkonstanten eines Gleichstromnebenschlussmotors. *Elektrie*, **16**, 282—284 (1962).
11. BENEDIKT, O.: Különleges villamosgépek II. (Machines électriques spéciales II. Notes de l'Université Technique de Budapest.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.
12. WAGNER, K. W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation nebst Anwendungen in Physik und Technik. Johann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig, 1950. (2° éd.)

Dr. Tibor KELEMEN, Budapest, XI., Egry József u. 18. Hongrie