# ÜBER EINE TECHNISCHE ANWENDUNG DER DISTRIBUTIONENTHEORIE

Von

I. FENYŐ

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 24. August, 1964.)

1. FODOR hat in einem Aufsatz [1] und auch in seinem Buch [2] einen Unterschied zwischen dem *Endzustand* und den *Anfangsbedingungen* eines physikalischen Systems gemacht. Nach seiner Definition ist der Endzustand eines Systems derjenige, in welchem es sich in dem vorübergehend stationären Zustand unmittelbar vor einer plötzlichen Veränderung befindet, die durch eine Dirac-Delta-Funktion beschrieben werden kann. FODOR verweist auf die Tatsache, daß das Verhalten des Systems durch den Endzustand eindeutig bestimmt ist und daß die Anfangsbedingungen, die bei Lösung der die Erscheinung beschreibende Differentialgleichung verwendet werden sollen, durch den Endzustand eindeutig bestimmt sind.

Die auf der Laplace-Transformation beruhende Operatorenrechnung liefert bloß Lösungen, die die Anfangsbedingungen betrachten, kann also, aus prinzipiellen Gründen, Endzustandsbedingungen im Laufe der Rechnung nicht beachten. Auch durch Anwendung der Mikusinskischen Operatorenrechnung können die Endzustandsaufgaben nicht gelöst werden. Um auch Endzustandaufgaben anhand der Laplace-Transformation lösen zu können, hat FODOR einen Begriff eingeführt, den er als »verallgemeinerte Ableitung« bezeichnete, wobei er die Laplace-Transformierte der verallgemeinerten Ableitung einer Funktion bestimmte. Mit der von ihm abgeleiteten Formel lassen sich auch die Endzustandsprobleme anhand der Operatorenrechnung lösen. Die in der Arbeit [1] angeführten mathematischen Betrachtungen sind leider nicht einwandfrei und haben deshalb bloß heuristischen Wert.

Da aber das Problem physikalisch und technisch gleicherweise wichtig ist, wollen wir zeigen, daß die Endzustandsaufgabe nach der Distributionentheorie äußerst einfach und auch mathematisch einwandfrei und mit voller Strenge lösbar ist.

2. Zuerst wollen wir die Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' + ay = k\,\delta(t) \tag{1}$$

betrachten, in der $a$ und $k$ beliebige gegebene Konstanten sind. (Diese Differentialgleichung beschreibt das Verhalten einer vorgespannten Feder, eines geladenen Kondensators, einer stromdurchflossenen Spule usw.)

Wir wollen die allgemeine Lösung von (1) im Raume $D'$ suchen (Raum der im Sinne von Laurent Schwartz definierten Distributionen, deren Träger auf der reellen Zahlengerade liegen), wobei $\delta$ eine im Raume $D'$ definierte Diracsche Distribution ist.

Auf Grund des bekannten Satzes von L. SCHWARTZ [3, Théorème IX] besitzt (1) für jeden Wert von $k$ Lösungen (im allgemeinen Distributionen), die für $k = 0$ in die übliche übergehen.

Wie im klassischen Verfahren suchen wir eine partikuläre Lösung in der Gestallt

$$y = ce^{-at}, \tag{2}$$

wobei $c$ jetzt eine unbekannte Distribution ist. (Es ist bekannt, daß (2) einen Sinn hat, da $e^{-at}$ beliebig oft differenzierbar ist.)

Mit Gl. (2) erhält man aus Gleichung (1) durch einfaches Rechnen

$$c' = k\delta e^{at},$$

woraus

$$c = k \int \delta\, e^{at}\, dt = kH + \lambda, \tag{3}$$

wobei die Ableitung bzw. das Integral selbstverständlich im Sinne der Distributionentheorie betrachtet werden muß und $\lambda$ eine beliebige Integrationskonstante ist. Mit $H$ ist die Heavisidesche Sprungfunktion bezeichnet. Hier wurde die einfache Tatsache benutzt, daß für jede beliebig oft differenzierbare und der Bedingung $g(0) = 1$ genügende Funktion $g(x)$

$$g(x)\,\delta = \delta \tag{4}$$

gilt.

Aus (2) folgt, daß die allgemeine Lösung von (1) im Raume $D'$

$$y = kHe^{-at} + \lambda e^{-at}$$

ist. Wir erhalten also

$$y = \begin{cases} \lambda e^{-at}, & \text{für } t < 0 \\ (k + \lambda)\, e^{-at}, & \text{für } t > 0, \end{cases} \tag{5}$$

d.h. der Endzustand ist

$$y(-0) = \lambda\,,$$

und die Anfangsbedingung

$$y(+0) = k + \lambda\,.$$

Ist der Endzustand $\lambda$ gegeben, so ist die Lösung von (1) für $t \geqq 0$ gleich $y = (k + \lambda)\, e^{-at}$.

3. Auf ganz ähnliche Weise können die Endzustandaufgaben bezüglich Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelöst werden. Es sei die Differentialgleichung

$$y'' + \alpha y' + \beta y = k\delta \tag{6}$$

betrachtet, wobei $\alpha$ und $\beta$ beliebige gegebene Konstanten sind.

Auf Grund des schon zitierten Satzes von L. SCHWARTZ besitzt die Gleichung (6) für $k = 0$ — auch im Raume D′ — nur die klassischen Lösungen. Zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (6) für den Fall $k = 0$ seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$. Da diese beliebig oft differenzierbar sind, kann eine partikuläre Lösung von (6) in der Gestalt

$$y = cy_1(x) + y_2(x)$$

gesucht werden, wobei $c$ eine — noch unbekannte — Distribution ist. Setzen wir den soeben bestimmten Wert von $y$ in die Gleichung (6) ein, erhalten wir unter Beachtung der Tatsache, daß $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung sind.

Es kann natürlich ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit angenommen werden, daß z.B. $y_1$ mit $y_1(0) = 1$ vom Exponentialtyp ist. Deswegen erhalten wir aus (5) durch Dividieren mit $y_1$. Das aber ist eine lineare Differentialgleichung für $c'$, in der der Koeffizient von $c'$ eine Konstante ist. Bezeichnet man mit $r$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von (6), wie aus einer einfachen Rechnung ersichtlich, mit der Gleichung

$$c'' + (2r + \alpha)c' = k\delta$$

identisch. Ihre allgemeine Lösung schreibt sich auf Grund des Resultates (5) zu

$$c' = \begin{cases} \lambda_1 e^{-(2r+\alpha)} & \text{für } t < 0, \\ (\lambda_1 + k)\, e^{-(2r+\alpha)} & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

woraus

$$c = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_1}{2r+\alpha}\, e^{-(2r+\alpha)} + \lambda_2 & \text{für } t < 0, \\[2ex] \dfrac{-(\lambda_1 + k)}{2r+\alpha}\, e^{-(2r+\alpha)} + \lambda_2 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

sofern $2r + \alpha \neq 0$. Ist $2r + \alpha = 0$, dann wird

$$c = \begin{cases} \lambda_1 t + \lambda_2 & \text{für } t < 0, \\ (\lambda_1 + k)\, t + \lambda_2 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

wobei $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beliebige Integrationskonstanten sind.

Somit ist die Lösung von (6)

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{-\lambda_1}{2r+a}\,e^{-(r+a)t}+\lambda_2\,e^{-rt}+y_2(t) & \text{für } t<0,\\[2ex] \dfrac{-(\lambda_1+k)}{2r+a}\,e^{-(r+a)t}+\lambda_2\,e^{-rt}+y_2(t) & \text{für } t>0,\end{cases} \tag{7}$$

wenn $2r+a\neq 0$, und

$$y(t)=\begin{cases}(\lambda_1 t+\lambda_2)\,e^{-\frac{a}{2}t}+y_2(t) & \text{für } t<0,\\[2ex] [(\lambda_1+k)\,t+\lambda_2]\,e^{-\frac{a}{2}t}+y_2(t) & \text{für } t>0,\end{cases} \tag{8}$$

wenn $2r+a=0$ erfüllt ist.

Aus (7) bzw. (8) folgt, daß

$$y(+0)-y(-0)=-\frac{k}{2r+a}, \tag{9}$$

$$y'(+0)-y'(-0)=\frac{2r+a-1}{2r+a}\,k$$

bzw.

$$y(+0)-y(-0)=0,$$

$$y'(+0)-y'(-0)=k\,. \tag{10}$$

Die Formeln (9) bzw. (10) bestimmen eindeutig die Anfangswerte, wenn der Endzustand des Systems gegeben ist. Auf dieser Grundlage lassen sich die Endzustandaufgaben auch für diese Gleichungsart lösen.

4. Auf Grund ähnlicher Gedankengänge können auch Endwertprobleme bezüglich linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, ja selbst bezüglich Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten (die gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen) gelöst werden.

Das Lösungsverfahren ist ähnlich jenen, nach welchen die man die Grundlösung einer linearen Differentialgleichung erhält. Es sei jedoch betont, daß die bei gegebenen Endwerten gültige Lösung nicht mit der Grundlösung identisch ist, weil bei dieser die Stetigkeit der ersten n-2 Ableitungen im Nullpunkt gefordert wird.

## Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die in der mathematischen Physik und Technik äußerst wichtigen Endzustandaufgaben hinsichtlich der gewöhnlichen Differentialgleichungen, ohne daß irgendeine Operatorenmethode von heuristischem Wert, herangezogen werden müßte, auf sehr einfache Weise auf Grund der Distributionentheorie gelöst werden können.

## Literatur

1. FODOR, GY.: Über einen Satz der Laplace-Transformation. Periodica Polytechnica **5**, 41—56 (1961).
2. FODOR, GY.: A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása. Budapest 1962. (ungarisch)
3. SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. I. Paris 1950.

Prof. Dr. István FENYŐ, Budapest, XI., Sztoczek u. 2—4. Ungarn.