QUELQUES REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Par

G. Balkányi et P. Fischer

Chaire d'Automation de l'Université Technique, Budapest
(Reçu de 24 octobre 1964)
présenté par le Prof. Dr. F. Csáki

Introduction

Les applications de la transformation de Laplace se multiplient de plus en plus et jouent un rôle toujours plus important dans la pratique de l'ingénieur. La transformation de Laplace formulée par l'analyse ordinaire ne sait faire de différence entre le cas où la fonction $f(t)$ est continue en $t = 0$, et celui où elle présente un saut en ce point. Ce fait prend une grande importance quand il faut calculer la transformée de Laplace d'une fonction dérivée. Les résultats de l'analyse ordinaire se trouvent alors en contradiction avec ceux de la pratique quotidienne, qui calcule avec la formule suivante ([4], [5]):

$$L\{f'(t)\} = L\{f(t)\} - f(-0) \tag{1}$$

($L\{\ \}$ désignant la transformée de Laplace de la fonction), où $f(-o)$ est la valeur de la fonction $f(t)$ «au moment du branchange», tandis que l'analyse ordinaire utilise l'expression

$$L\{f'(t)\} = L\{f(t)\} - f(+0) \tag{2}$$

où $f(+0) \neq f(-0)$, si la fonction présente un saut en $t = 0$.

Dans ce qui suit, nous démontrons que cette contradiction peut être éliminée et les résultats expérimentaux peuvent être confirmés à l'aide des distributions. Nous allons généraliser d'abord la tranformation de Laplace des distributions, nous en déduirons ensuite la formule (1) et donnerons enfin quelques exemples de son application.

I. Il est connu qu'on a réussi à créer la transformation de Fourier des distributions; il n'est pas difficile d'en déduire la transformation de Laplace des distributions, formulée directement par Schwartz [1].

Soit T une distribution sur l'axe réel de la variable de t, de support contenu dans la demi-droite $t \geqslant 0$, donc $T \in D'_+$. Dans ce cas, la définition de la transformée de Laplace de la distribution T est la suivante:

$$L(T) = < T, e^{-pt} > \tag{3}$$

(où, $<T, >$ est la valeur de la fonctionnelle T correspondant à la fonction e^{-pt}), si le second membre a un sens. Cette condition doit être prescrite, puisque e^{-pt} est indéfiniment dérivable, mais non à support borné.

SCHWARCZ a démontré le théorème suivant: «Pour toute $T \in D'_{+}$ existe un nombre réel b de signe quelconque (qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$), tel que $L(T)$ existe pour $\zeta > \sigma$ et c'est alors une fonction holomorphe de p (où ζ est la partie réelle de p).

Sur la base de cette définition, on ne peut pas donner un sens à la transformation de Laplace de la fonction constante considérée comme distribution. Aussi modifierons-nous la définition ci-dessus donnée; mais exposons d'abord quelques théorèmes bien connus.

Si «F» est un ensemble fermé et borné et U un domaine comprenant F, alors on peut trouver une fonction $\varphi(t)$ indéfiniment dérivable et à support borné qui est égale à 1 en F, est identiquement égale à 0 en dehors de U et prend, dans les autres points, une valeur comprise entre 1 et 0 (démontré dans [2]).

De ce théorème peut être déduit le suivant. Soit N un nombre entier positif quelconque, il existe alors une fonction indéfiniment dérivable e_N^{-pt} qui a les propriétés suivantes:

$$e_N^{-pt} = \begin{cases} e^{-pt} & ,\text{si} \quad t \geqslant 0 \\ h(t)\, e^{-pt} & ,\text{si} \quad -\dfrac{1}{N} \leqq t \leqq 0 \\ 0 & ,\text{si} \quad t < -\dfrac{1}{N} \end{cases} \tag{4}$$
$$\text{et} \quad 0 \leqq h(t) \leqq I$$

C'est à la base de ce second théorème que nous définirons la transformée de Laplace de T:

$$L(T) = \lim_{N \to \infty} < T, \mathrm{e}_N^{-pt} > \tag{5}$$

si le second membre de (5) existe. Nous n'avons pas exclu ici les distributions dont le support s'étend aussi aux valeurs $t \leqq 0$. Il est évident que si $T \in D'_{+}$, alors (5) identique à (3). Il peut être démontré que si la transformation de Laplace ainsi définie existe pour b, alors elle existe aussi pour tout $\zeta > b$.

Notons encore qu'il n'est pas difficile de prouver que si une fonction continue ou bornée dans le voisinage de gauche du point $t = 0$ (le voisinage étant compris dans le sens euclidien) dispose d'une transformée de Laplace définie dans le sens original, alors cette même fonction considérée comme distribution a une transformée de Laplace exprimée par la formule (5) et les deux transformées sont identiques.

Puisqu'elles nous seront encore utiles par la suite, donnons maintenant les transformées de Laplace de quelques distributions concrètes:

$$L\{1\} = \frac{1}{p} \tag{6}$$

$$L\{\delta\} = 1 \tag{7}$$

$$L\{\delta^{(m)}\} = p^m \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{p} \tag{9}$$

où δ désigne la distribution de la fonction de Dirac et $1(t)$ représente la fonction échelon-unité, c'est-à-dire:

$$1(t) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 \quad , & \text{si} \quad t \geqq 0 \end{cases}. \tag{10}$$

II. Soit la fonction $f(t)$ n-fois continuellement dérivable, excepté en $t = 0$, et supposons qu'en $t = 0$ la fonction et ses dérivées présentent un saut. Désignons le saut de $f^{(i)}(t)$ par

$$f^{(i)}(+0) - f^{(i)}(-0)$$

où $f^{(i)}(+0)$, resp. $f^{(i)}(-0)$ est la valeur limite de droite, resp. de gauche de la fonction $f^{(i)}(t)$ en $t = 0$.

Examinons la fonction $g(t)$ ci-dessous:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) + f(+0) - f(-0) & , \text{si } t < 0 \\ f(t) & , \text{si } t \geqq 0 \end{cases}. \tag{11}$$

La fonction $f(t)$ peut s'écrire alors de la façon suivante:

$$f(t) = g(t) - [f(+0) - f(-0)] + [f(+0) - f(-0)]\ 1(t). \tag{12}$$

Formulons la dérivée de la distribution $f(t)$; on sait que la dérivée définie dans le sens originel de la fonction (11) peut être identifiée avec celle de la distribution de cette même fonction $f(t)$ [3]

$$f'(t) = g'(t) + [f(+0) - f(-0)]\ \delta. \tag{13}$$

Selon notre remarque ci-dessus:

$$L\{g'(t)\} = pL\{g(t)\} - f(+0) \tag{14}$$

la transformée de Laplace définie par (5) de la fonction (13) sera

$$L\{f'(t)\} = pL\{g(t)\} - f(+0) + f(+0) - f(-0) = pL\{g(t)\} - f(-0). \tag{15}$$

La transformation de Laplace est une opération linéaire; compte tenu d'autre part des égalités (6) et (9), nous obtenons

$$L\{f(t)\} = L\{g(t)\}. \tag{16}$$

Substituons (16) dans (15), nous recevons alors l'expression (1), qui était à démontrer.

Cette relation peut naturellement être étendue à des dérivées d'ordre supérieur. On procède alors de la même facon à chaque étape, la fonction continuellement dérivable — excepté le lieu du saut — étant remplacée par une fonction continue, une constante et une fonction-échelon; la formule (14) est valable à chaque étape. Il est alors simple d'obtenir l'expression suivante:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n L\{f(t)\} - p^{n-1} f(-0) - p^{n-2} f'(-0) - \ldots - f^{n-1}(-0). \tag{17}$$

III. Dans ce qui suit, nous présentons deux exemples, dans lesquels la fonction examinée (quantité physique) présente un saut au moment du branchage, c'est-à-dire au moment $t = 0$. En électrotechnique aussi bien

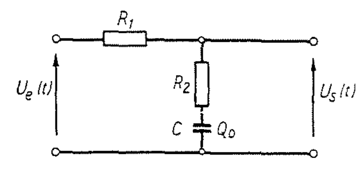

Fig. 1

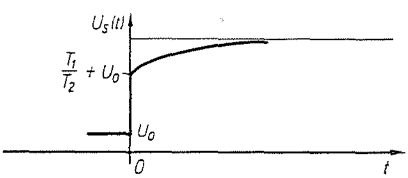

Fig. 2

qu'en automatique, on trouve souvent des circuits, des éléments de réglage (par ex. des éléments de compensation) dont le signal de sortie présente un saut en cas de signal d'entrée correspondant à une fonction-échelon.

La figure 1 montre un circuit souvent employé pour réaliser une compensation de type PI.

L'équation différentielle décrivant la fonction $U_s(t)$ est la suivante:

$$T_2 \frac{dU_s(t)}{dt} + U_s(t) = T_1 \frac{dU_e(t)}{dt} + U_e(t). \tag{18}$$

Si le condensateur C a au moment du branchage, une charge Q_0, l'équation est modifiée de la façon suivante:

$$T_2 \frac{dU_s(t)}{dt} + U_s(t) = T_1 \frac{dU_e(t)}{dt} + U_e(t) + U_0 \tag{19}$$

où $U_0 = \frac{Q_0}{C}$.

Si $U_e(t)$ est une fonction échelon-unité, la solution sera:

$$U_s(t) = \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}}\right] 1(t) + U_0 \tag{20}$$

La figure 2 nous montre la forme de la fonction

$$U_s(t) = \begin{cases} U_s(t) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ U_0(t) & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}. \tag{21}$$

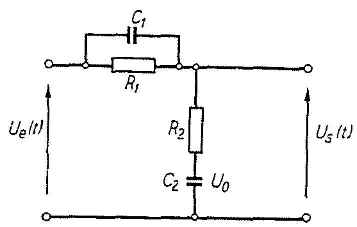

Fig. 3

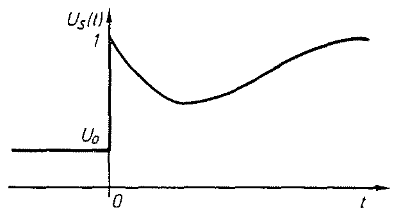

Fig. 4

Si ce signal est branché à l'entrée d'un réseau de dérivation, nous recevons à la sortie de ce dernier la dérivée du signal d'entrée. Déterminons, à l'aide de la formule (1), la transformée de Laplace de la dérivée de la fonction mentiontée. Nous recevons alors:

$$L\left\{U_s'(t)\right\} = p\,L\left\{U\,(t)\right\} - U_s(-0) \tag{22}$$

nandis qu'avec la formule (2), nous obtenons

$$L\left\{U_s'(t)\right\} = p\,L\left\{U_s(t)\right\} - U_s(+0)\,. \tag{23}$$

La différence entre (22) et (23) correspond justement à la grandeur du saut en $t = 0$.

L'équation différentielle du quadripôle visible sur la figure 3 sera, en supposant une tension initiale u_0 sur le condensateur C_2:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 U_s(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2 + R_2 C_1) \frac{dU_s(t)}{dt} + U_s(t) =$$

$$= T_1 T_2 \frac{d^2 U_e(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\,U_e(t)}{dt} + U_e(t) + U_0\,. \tag{24}$$

Si $U_e(t)$ est une fonction échelon-unité, la solution de l'équation différentielle sera:

$$U_s(t) = \left[1 - A e^{-\frac{t}{T_1}} + B e^{-\frac{t}{T_2}}\right] 1\,(t) + U_0 \tag{25}$$

où A, B, T_1, T_2 peuvent être calculés des paramètres du quadripôle.

La figure 4 nous montre cette fonction. Nous nous trouvons encore en présence d'un cas où $U_s(-0)$ et $U_s(+0)$ sont différents

$$U_s(+0) = 1 - A + B + U_0 .$$
$$U_s(-0) = U_0 . \tag{26}$$

La transformée de Laplace de la dérivée de cette fonction sera, d'après la formule(1):

$$L\left\{\frac{dU_s(t)}{dt}\right\} = p\, L\{(U_s(t)\} - U_0 . \tag{27}$$

Résumé

Les auteurs démontrent qu'à l'aide de la théorie des distributions, on peut prouver la validité de la formule couramment utilisée dans la pratique, pour calculer la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$ continuellement dérivable, excepté en $t = 0$, où la fonction présente un saut

$$L\{f'(t)\} = p\, L\{f(t)\} - f(-0)$$

où $f(-0)$ est la valeur limite de gauche de la fonction $f(t)$ en $t = 0$.

Ce résultat est obtenu à l'aide de la généralisation de la transformation de Laplace. Ainsi, les distributions à support $T \epsilon D'_+$ ne seront plus seules à avoir des transformées de Laplace. Quelques exemples montrant l'application de la formule terminent l'étude.

Littérature

1. Schwartz, L.: Transformations de Laplace (Les Cours de Sorbonne), Paris 1960.
2. Schwartz, L.: Théorie des distributions. Paris I., 1950., II. 1951.
3. Fenyő, St.: Disztribúciók, operátorok I., Matematikai Lapok, **XIV**, (1963).
4. James, H. H. —Nichols N. B.—Phillips: Theory of Servomechanism. Mc. Graw Hill. 1947.
5. Fodor, G.: Periodica Polytechnica, **6**, (1962).

Dr. György Balkányi, Pál Fischer, } Budapest, XI., Egry József u. 18. Hongrie