

BEITRAG ZU DEN KOMPLEXEN NULLSTELLEN VON POLYNOMEN MIT REELLEN KOEFFIZIENTEN

Von
T. FARACÓ

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest,
(Eingegangen am 4. Januar, 1965)
Vorgelegt von Prof. Dr. S. BORBÉLY

Es sei $f(x) = x^n + \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}$, a_k reell, ($k = 1, 2, \dots, n$) $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Weiters gelte:

$$[A_k]^k = \frac{a_k^2 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{\min(k; n-k)} (-1)^s a_{k+s} \cdot a_{k-s}}{\binom{n}{k}},$$

worin $a_0 = 1$, ferner $a_i = 0$, wenn $i > n$, bzw. $i < 0$.

Satz

a) Ist für jedes k $A_k > 0$, und gibt es ein A_i und A_m , für die $A_i < A_m$, $1 \leq i < m \leq n$ ist, hat $f(x)$ eine komplexe Nullstelle. (Ist k gerade, berücksichtigen wir den positiven Wert der k -ten Wurzel.)

b) Gibt es ein A_k^k , für das

$$A_k^k \leq 0^*$$

ist, dann besitzt $f(x)$ eine komplexe Nullstelle: $x_0 = a + b i$, an der

$$b^2 \geq a^2.$$

Beweis

a) Es sei $F(z) = z^n + \sum_{k=1}^n b_k z^{n-k}$, wobei b_k reell ($k = 1, 2, \dots, n$) $b_n \neq 0$, $n \geq 2$ ist.

* Daß es bei $A_k^k < 0$ eine komplexe Nullstelle gibt, ist schon bei Euler (Opera omnia VI. S. 217) zu finden.

Sind z_1, z_2, \dots, z_n Nullstellen von $f(z)$, wird — wegen $b_n \neq 0 - z_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Auf Grund der bekannten Beziehung zwischen Nullstellen und Koeffizienten ist

$$b_k = (-1)^k \sum_{s=1}^k z_{i_s}, \quad 1 \leq i_s \leq n.$$

Sämtliche Nullstellen von $f(z)$ positiv angenommen: $z_k > 0$, ergibt sich auf Grund der bekannten Ungleichung für positive Zahlen*

$$\left[\frac{(-1)^k b_k}{\binom{n}{k}} \right]^{\frac{1}{k}} \geq \left[\frac{(-1)^{k+1} b_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k+1}} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1)$$

Die Gleichheit gilt dann und ausschließlich dann, wenn sämtliche Nullstellen gleich sind.

x_1, x_2, \dots, x_n seien die Nullstellen von $f(x)$. Dann gilt

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad \text{und daraus}$$

$$(-1)^n f(-x) = (x + x_1) (x + x_2) \cdot \dots \cdot (x + x_n).$$

Multipliziert man die beiden obigen Polynome miteinander und setzt man an Stelle von x^2 (ähnlich dem Verfahren von Dandelin—Lobatschewski—Graeffe) z ein, erhält man

$$F(z) = z^n + \sum_{n=1}^n b_k z^{n-k}, \quad \text{wo}$$

$$b_k = (-1)^k \left[a_k^2 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{\min(k, n-k)} (-1)^s a_{k+s} \cdot a_{k-s} \right].$$

Die Nullstellen von $F(z)$ sind offenbar $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$. Nimmt man sämtliche Nullstellen von $f(x)$ als reell an, ist also $x_k^2 > 0$, (eine Nullstelle 0 ist nicht vorhanden, denn $a_n \neq 0$) und substituiert man die obige Formel für b_k in die Ungleichung (1), erhält man unter Benützung der einleitend gebrauchten Bezeichnung

$$[A_k^k]^{\frac{1}{k}} \geq [A_{k+1}^{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Für $i < m$ ist $A_i < A_m$, folglich kann offenbar nicht jede Nullstelle reell sein.

Sind nicht sämtliche Nullstellen von $f(z)$ einander gleich, genügt für $i < m$ auch $A_i \leq A_m$ als Bedingung für das Vorhandensein einer komplexen Nullstelle.

b) Für den Fall $A_k \leq 0$ ist (1) nicht erfüllt, $f(x)$ muß also eine komplexe Nullstelle aufweisen, weil $f(x)$ reelle Koeffizienten besitzt, und somit auch die Konjugierte der komplexen Nullstelle eine Nullstelle von $f(x)$ ist.

* z. B. Hardy-Littlewood-Polya: Inequalities 1952 S. 52.

Die Bedingung *b*) ist nur bei $k = 1, 2 \dots n-1$ erfüllt, denn

$$A_n^n = a_n^2 > 0.$$

$\binom{n}{k} A_k^k$ ist offenbar die Summe der Produkte der aus den Quadraten der Nullstellen von $f(x)$ gebildeten Kombinationen k -ter Klasse im Sinne von

$$\binom{n}{k} A_k^k = x_1^2 x_2^2 \dots x_k^2 + \dots + x_{n-k+1}^2 \cdot x_{n-k+2}^2 \dots x_n^2.$$

Man unterteile die obigen Kombinationsprodukte in zwei Klassen: in die erste Klasse mögen all jene Produkte mit den Faktoren $1, 2, \dots n-1$ eingereiht werden, in denen sämtliche Nullstellen reell sind, bzw. in denen sich eine komplexe Nullstelle findet, deren Konjugierte auf der gleichen Potenz figurirt wie die ursprüngliche komplexe Nullstelle. Offenbar sind diese Produkte ausnahmslos positiv. Alle übrigen Produkte mögen in die zweite Klasse gehören. Da $f(x)$ eine komplexe Nullstelle besitzt, fallen in die zweite Klasse auch Produkte.

Wählt man von den in die Klasse II eingereihten Produkten mit dem Faktor k eines, in welchem sich eine komplexe Nullstelle mit den für die II. Klasse charakteristischen Eigenschaften befindet, z. B. $x_m = a_m + b_m i$, dann läßt sich das gewählte Produkt in der Form

$$q_k(x) = x_m^2 q_{k-1}(x)$$

schreiben, worin das Produkt $q_{k-1}(x)$ der Faktor $k-1$ enthält; auch wenn dieses Produkt das Konjugierte von x_m enthält, so doch nur auf der nicht mit seinem konjugierten Paar übereinstimmenden Potenz. Bei $k = 1$ wird $q_{k-1}(x) = q_0(x) = 1$.

Da auch das Konjugierte von x_m eine Nullstelle von $f(x)$ liefert, gibt es unter den in die Klasse II eingereihten Produkten auch das folgende:

$$\bar{x}_m^2 q_{k-1}(x).$$

Summiert, ergeben die beiden Produkte:

$$x_m^2 q_{k-1}(x) + \bar{x}_m^2 q_{k-1}(x) = 2(a_m^2 - b_m^2) q_{k-1}(x).$$

$q_{k-1}(x)$ gehört entweder in die Klasse I oder in die Klasse II. Gehört es in die Klasse II, so ist darin eine Zahl $x_r = a_r + b_r i$ enthalten, die ähnliche Eigenschaften aufweist wie x_m . Für diese Zahl gilt $q_{k-1}(x) = x_r^2 q_{k-2}(x)$. Offenbar gibt es ein den Faktor $k-1$ enthaltendes Produkt, das in der Form

$$q'_{k-1}(x) = \bar{x}_r^2 q_{k-1}(x)$$

geschrieben werden kann.

Man summiere die folgenden vier, den Faktor k enthaltenden Produkte:

$$x_m^2 q_{k-1}(x) + \bar{x}_m^2 q_{k-1}(x) + x_m^2 q'_{k-1}(x) + \bar{x}_m^2 q'_{k-1}(x) = (x_m^2 + \bar{x}_m^2) x_r^2 q_{k-2}(x) + (x_m^2 + \bar{x}_m^2) \bar{x}_r^2 q_{k-2}(x) = 4 \cdot (a_m^2 - b_m^2) (a_r^2 - b_r^2) q_{k-2}(x).$$

Das vorstehende Verfahren ist solange fortzusetzen, bis das beim s -ten Schritt sich ergebende $q_{k-s}(x)$ bereits in die Klasse I gehört bzw. bei $k-s$ gerade 1 (eins) ergibt.

Verbleibt hiernach in $\binom{n}{k} A_k^k$ noch ein von der obigen Umwandlung nicht berührtes, in die Klasse II gereihtes Produkt, ist das obige Verfahren an den Produkten so oft zu wiederholen, bis jedes ursprünglich in die Klasse II eingereichte, den Faktor k enthaltende Produkt umgewandelt ist. Die in die Klasse I eingereichten Produkte sind also sämtlich positiv, die in die Klasse II eingereichten hingegen nach Umwandlung und Summierung sämtlich Summen von Produkten, in denen die einzelnen Faktoren die Quadratsummen zusammengehöriger konjugierter komplexer Zahlen darstellen, abgesehen von einer ausgesprochen positiven Zahl. $A_k^k \leq 0$ ist also für jedes in Frage kommende k dann und nur dann möglich, wenn wenigstens für die eine Nullstelle x_0

$$(\mathcal{R}e x_0)^2 - (\mathcal{I}m x_0)^2 \leq 0.$$

Dies gilt offenbar auch für das Konjugierte von x_0 .

Beispiel.

$$f(x) = x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 20x - 25.$$

k	a_k	$\binom{n}{k} A_k^k$	A_k
0	1		
1	-8	$(-8)^2 - 2 \cdot 1 \cdot -3$	17,5
2	-3	$(-3)^2 - 2 \cdot -8 \cdot 20 + 2 \cdot 1 \cdot -25$	$\sqrt[4]{46,5}$
3	20	$(20)^2 - 2 \cdot -3 \cdot -25$	$\sqrt[4]{62,5}$
4	-25	$(-25)^2$	$\sqrt[4]{625}$

Wie sich zeigt, ist $A_3 < A_4$, sodaß $f(x)$ eine komplexe Nullstelle aufweist. (Mit der Bezeichnung $\frac{1}{x} = z$, ergibt sich $f(x) = a^n x^n g(z)$. Beim zweiten Schritt zeigt sich bereits, daß $g(z)$ eine komplexe Nullstelle hat.)

Anmerkungen

Für das Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, a_k reell, $a_n a_0 \neq 0$, $n \geq 2$, kann unter Berücksichtigung der Ausführung unter a) ein weniger scharfes, aber handlicheres Kriterium gewonnen werden. $f(x)$ besitzt eine komplexe Nullstelle, wenn

$$\frac{a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2}}{n a_n^2} < \left[\frac{a_0^2}{a_n^2} \right]^{\frac{1}{n}},$$

bzw. (unter Berücksichtigung der reziproken Gleichung) wenn

$$\frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{n a_0^2} < \left[\frac{a_n^2}{a_0^2} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Dies stellt für den Fall $n = 2$ notwendige und genügende Bedingungen dar. Ist $n > 2$, enthält a) nur hinreichende Bedingungen, denn beim Polynom $g(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 1,1)$ z. B. ist die Bedingung gemäß a) nicht erfüllt, obwohl es eine komplexe Nullstelle aufweist.

Dr. Tibor FARAGÓ, Budapest XI., Sztoczek u. 2-4. Ungarn.