ÜBER DIE LÖSUNG EINES WIRTSCHAFTLICHEN PRODUKTIONSPROBLEMS

Von

I. Fenyő

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 9. März, 1965)

Im folgenden wollen wir eine Aufgabe bezüglich der Einrichtung eines Produktionsprozesses betrachten, die zu einer inhomogenen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art vom Faltungstypus führt. Sie kann explizit gelöst werden, allerdings nur in sehr speziellen Fällen, in einer geschlossenen Form.

Wir stellen die Frage, wie die Produktion gewisser Erzeugnisse als Funktion der Zeit verlaufen muß, damit die Gesamtmenge des Produktes bei bekanntem Ausfall durch Abnutzung einer gegebenen Funktion $F(t)$ gleich bleibt. $F(t)$ gibt also den Lagervorrat als Funktion der Zeit an. Die Produktion soll demnach so eingerichtet werden, daß in jedem Zeitpunkt die Gesamtmenge des Produktes gleich $F(t)$ sei.

Den Ausfall werden wir durch eine mit $k(t)$ bezeichnete Ausfallfunktion darstellen. Sie ist für $t \geqq 0$ definiert und hat folgende Bedeutung: $F(t)\ k(t)$ gibt an, wie groß die Menge ist, die durch Abnutzung ausfällt, wenn für $t<0$ nicht produziert würde. $k(t)$ wird als eine bekannte Funktion betrachtet, die unter gewisser Bedingungen willkürlich gegeben sein kann. Aus der Definition der Funktion $k(t)$ folgt, daß ihr Wertvorrat zwischen 0 und 1 liegen muß. Weiterhin muß sie auch noch die Bedingung

$$\int_0^\infty k(t)\,dt = 1 \tag{1}$$

erfüllen.

Das ergibt sich daraus, daß im Zeitpunkt $t = 0$ der Lagervorrat gleich $F(0)$ ist. Würde man die Produktion für $t > 0$ einstellen, so würde nur aus diesem Vorrat ausfallen und in einer unendlich großen Zeit würde alles, also die Menge $F(0)$ verbraucht werden. Es muß also gelten

$$\int_0^\infty F(0)\,k(t)\,dt = F(0)\,.$$

Wenn wir annehmen, daß $F(0) \neq 0$ ist, folgt die Beziehung (1).

Die Produktionsfunktion wollen wir mit $\varphi(t)$ bezeichnen. Sie gibt an, wieviel in der Zeit t pro Zeiteinheit produziert werden muß, damit die obigen Bedingungen befriedigt werden können. Die Produktion ist also im sehr kurzen Zeitintervall $(x,\ x+dx)$ gleich $\varphi(x)\,dx$. Das gibt zum späteren Zeitpunkt t Anlaß zu einem Ausfall $\varphi(x)\ k(t-x)\,dx$. Auch dieser Ausfall soll hinzuproduziert werden. Diese Überlegung führt dazu, daß

$$\int_0^t k(t-x)\,\varphi(x)\,dx$$

der Ausfall bis zum Zeitpunkt t ist. Deswegen ist die Differenz der Produktion und des bisherigen Ausfalls, also der Ausdruck

$$\varphi(t)-\int_0^t k(t-x)\,\varphi(x)\,dx$$

dem gegenwärtigen Ausfall, also $F(t)\,k(t)$ gleich, d. h. für $\varphi(t)$ gilt die Integralgleichung

$$\varphi(t)-\int_0^t k(t-x)\,\varphi(x)\,dx=F(t)\,k(t)\,. \tag{2}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine im voraus gegebene, bekannte Funktion; bezeichnen wir sie mit $\Phi(t)$ [es gilt also $\Phi(t)=F(t)\ k(t)$], dann gilt für $\Phi(t)$

$$\varphi(t)-\int_0^t k(t-x)\,\varphi(x)\,dx=\Phi(t)\,. \tag{2'}$$

Das ist eine Volterrasche inhomogene Integralgleichung zweiter Art (sogar vom Faltungstypus), die bekanntlich (vgl. z. B. [1] S. 133) für jede Funktion $\Phi(t)$ eindeutig lösbar ist. Wenn man aber die Lösung $\Phi(t)$ von (2) [bzw. (2')] schon kennt, hat man das gestellte Problem gelöst.

Zur Lösung der Gleichung (2) [bzw. (2')] sind mehrere Methoden bekannt. So kann man z. B. die Methode der sukzessiven Approximation mit der Nullnäherung $\varphi\geqq 0$ anwenden, sie ist immer konvergent und bestimmt die Lösung unserer Integralgleichung. Da aber $t\geqq 0$ und die Gleichung (2) vom Faltungstyp ist, kann sie auch mittels der Laplace-Transformation gelöst werden, vorausgesetzt, daß $F(t)\,k(t)=\Phi(t)$ eine Laplace-Transformierte hat [$k(t)$ besitzt wegen der Bedingung (1) immer eine Laplace-Transformierte]. Noch einfacher ist es, unmittelbar die Mikusinskische Operatorenrechnung anzuwenden. Von welcher Methode man immer gebrauch macht, ergibt sich die Lösung in folgender Gestalt:

$$\varphi(t)=\Phi(t)+\int_0^t r(t-x)\,\Phi(x)\,dx\,, \tag{3}$$

wobei $r(t)$ die lösende Funktion (Resolvente) von $k(t)$ ist, d. h.

$$r(t) = k(t) + k_2(t) + \ldots + k_n(t) + \ldots; \tag{4}$$

$k_n(t)$ sind die sogenannten Iterierten von $k(t)$, die aus der Beziehung

$$k_n(t) = \int_0^t k(t-x)\, k_{n-1}(x)\, dx\,, \quad k_1(t) \equiv k(t) \tag{5}$$

bestimmt werden.

Die unendliche Reihe (4) (die sog. Neumannsche Reihe) ist in jedem endlichen Intervall der Zahlengerade absolut und gleichmäßig konvergent.

Nun wollen wir einen wichtigen Sonderfall ausführlicher untersuchen. Nehmen wir an, daß $F(t) \equiv M$ ist, wobei M eine beliebige, von Null verschiedene Konstante bedeutet. Es wird also nach der Einrichtung jener Produktion gefragt, bei der die Gesamtmenge des Produktes beibehalten bleibt.

In diesem speziellen Fall ist also $\Phi(t) = M\, k(t)$, und nach (3) ergibt sich für die Produktionsfunktion

$$\varphi(t) = M\Big[k(t) + \int_0^t r(t-x)\, k(x)\, dx\Big]\,. \tag{6}$$

Wenn wir die Relationen (4) und (5) beachten und die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4) berücksichtigen, ergibt sich

$$\int_0^t r(t-x)\, k(x)\, dx = k_2(t) + k_3(t) + \ldots + k_n(t) + \ldots = r(t) - k(t)\,,$$

woraus

$$k(t) + \int_0^t r(t-x)\, k(x)\, dx = r(t)\,.$$

Auf Grund dieser Feststellung erhält (6) die Form

$$\varphi(t) = M\, r(t). \tag{7}$$

Dieses Resultat besagt, daß in unserem Sonderfall *die Produktionsfunktion der Resolvente der Ausfallfunktion proportional ist, wobei der Proportionalitätsfaktor die konstante Menge des Produktes bedeutet.*

Betrachten wir ein konkretes Beispiel. Nehmen wir an, daß der Ausfall nach einer Poissonschen Funktion verläuft, daß also

$$k(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^p}{p!} e^{-\lambda t} \tag{8}$$

gilt, wobei $\lambda > 0$ und $p \geqq 0$ gegebene Konstante sind. (p muß nicht unbedingt eine ganze Zahl sein; wäre p nicht ganz, dann soll für $p\,!$ die allgemeine Fakultätfunktion betrachtet werden.) Die Wahl für $k(t)$ nach der Formel (8)

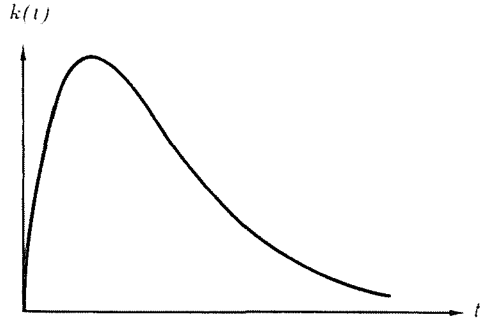

Abb. 1

ist gestattet, da die Funktion (8) die Bedingung (1) befriedigt. Durch die Substitution $\lambda t = \tau$ und unter Beachtung der Haupteigenschaft des Eulerschen Integrals erhalten wir

$$\int_0^\infty k(t)\,dt = \frac{\lambda}{p!}\int_0^\infty (\lambda t)^p e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{p!}\int_0^\infty \tau^p e^{-\tau}\,d\tau = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Um die Formel (7) anwenden zu können, müssen wir die Iterierten von $k(t)$ berechnen. Es wird behauptet, daß

$$k_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{np+n-1}}{(np+n-1)!} e^{-\lambda t} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

ist.

Für $n = 1$ gilt offenbar die Formel (9)

$$k_1(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^p}{p!} e^{-\lambda t} = k(t)\,.$$

Nehmen wir an, daß die Formel (9) schon für 1, 2, ..., $n-1$ bewiesen wäre, dann würde auf Grund von (5) folgen:

$$k_n(t) = \int_0^t k(t-x)\, k_{n-1}(x)\, dx =$$

$$= \int_0^t \lambda \frac{[\lambda(t-x)]^p}{p!} e^{-\lambda(t-x)} \lambda \frac{(\lambda x)^{(n-1)p+n-2}}{[(n-1)p+n-2]\,!} e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \lambda \frac{\lambda^{np+n-1}}{p!\,[(n-1)p+n-2]!} e^{-\lambda t} \int_0^t (t-x)^p\, x^{(n-1)p+n-2}\, dx\,. \qquad (10)$$

Für beliebige nichtnegative Zahlenwerte p und q gilt aber durch Anwendung der Substitution $x = ut$

$$\int_0^t (t-x)^p\, x^q\, dx = \int_0^1 (t-ut)^p\, u^q\, t^q\, t\, du = t^{p+q+1} \int_0^1 (1-u)^p\, u^q\, du\,.$$

Wie bekannt ist aber nach der Definition der Eulerschen Beta-Funktion [2. S. 224]

$$\int_0^1 (1-u)^p\, u^q\, du = B(p+1, q+1)\,,$$

und es gilt [2. S. 225]

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\,.$$

Deswegen ist

$$\int_0^t (t-x)^p\, x^q\, dx = t^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = t^{p+q+1} \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\,.$$

Setzen wir $q = (n-1)p + n - 2$, erhalten wir

$$\int_0^t (t-x)^p\, x^{(n-1)p+n-2}\, dx = t^{np+n-1} \frac{p!\,[(n-1)p+n-2]\,!}{(np+n-1)!}$$

und, zu (10) zurückkehrend, können wir also schreiben

$$k_n(t) = \lambda \frac{\lambda^{np+n-1}}{p!\,[(n-1)p+n-2]\,!}\, t^{np+n-1} \frac{p!\,[(n-1)p+n-2]\,!}{[np+n-1]!}\, e^{-\lambda t} =$$

$$= \lambda \frac{(\lambda t)^{np+n-1}}{(np+n-1)!}\, e^{-\lambda t},$$

womit die Formel (9) für alle Werte von n bewiesen ist.

Dementsprechend ist die Produktionsfunktion die Grenzfunktion der Reihe [vgl. (4)]

$$\varphi(t) = M\,\lambda e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{np+n-1}}{(np+n-1)!}\,. \tag{11}$$

Für $p = 0$ ist

$$k(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

und wir erhalten für die Produktionsfunktion

$$\varphi(t) = M\lambda e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = M\lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = M\lambda$$

eine Konstante; in diesem Falle muß also die Produktion pro Zeiteinheit gleichmäßig sein. Dieses Ergebnis ist selbstverständlich.

Es scheint, daß folgende Bemerkung bezüglich des Resultates (11) von Interesse ist.

Berechnen wir die Stelle, an der für die Funktion (8) ein Maximum auftritt:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{\lambda}{(p-1)!}\,\lambda^p t^{p-1} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^2}{p!}\,\lambda^p t^p e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^{p+1} t^{p-1}}{(p-1)!}\, e^{-\lambda t}\left(1 - \frac{\lambda}{p}\, t\right) = 0\,,$$

es ergibt sich dann

$$t = \frac{p}{\lambda}\,.$$

(Die Stelle $t = 0$ kommt für das Maximum nicht in Frage. Siehe die Abbildung.) Der Maximalwert beträgt

$$k_{\max} = k\left(\frac{p}{\lambda}\right) = \lambda\,\frac{p^p}{p!}\, e^{-p}\,. \tag{12}$$

Für große Werte von p kann man die Stirlingsche Formel benutzen (vgl. z. B. [1]. S. 452), nach der

$$\ln p! = \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln(p-1) - p + 1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + 0(1).$$

Damit erhalten wir für den Maximalwert von $k(t)$ die Näherung

$$k_{\max} \approx \frac{\lambda}{(2\pi p)^{1/2}}. \tag{13}$$

Man erkennt also, daß $k_{\max}$ mit $p^{-1/2}$ nach Null konvergiert für $p \to \infty$. Aus der Formel (11) sehen wir aber, daß die Glieder der hier auftretenden Reihe von der Form (8) sind, nur die Exponenten sind verschieden. Der Maximalwert des n-ten Gliedes in (11) ist also nach (12) und (13) für ein genügend großes n:

$$\frac{\lambda(np+n-1)^{np+n-1}}{(np+n-1)!} e^{-np-n+1} \approx \frac{\lambda}{2\pi(np+n-1)^{1/2}},$$

und das strebt in der Größenordnung $n^{-1/2}$ gegen null. *Die* durch (11) gegebene *Produktionsfunktion* $\varphi(t)$ *ist also nicht monoton, sondern zeigt Schwankungen, deren Maximalbeträge an den Stellen* $t = \frac{np}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(n-1)$ *auftreten und deren Amplituden wie* $n^{-1/2}$ *nach Null gehen für* $n \to \infty$.

Zusammenfassung

Es wird eine Aufgabe bezüglich der Einrichtung eines Produktionsprozesses gelöst, die zu einer inhomogenen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art führt. Die Aufgabe lautet wie folgt: Wie muß die Produktion gewisser Erzeugnisse in Abhängigkeit von der Zeit verlaufen, damit die Gesamtmenge des Produktes (Lagervorrat) bei bekanntem Ausfall durch Abnutzung einer gegebenen Funktion gleich bleibt. Ist der Lagervorrat konstant, ergibt sich die Produktionsfunktion als proportional der Resolvente der Ausfallfunktion. Der spezielle Fall, bei dem die Ausfallfunktion von Poissonscher Art ist, wird ausführlich diskutiert.

Literatur

1. COURANT—HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. 2. Aufl. Bd. I. Berlin 1931.
2. SMIRNOW, W. L : Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. III/2. Berlin 1959.

Prof. Dr. István FENYŐ, Budapest, XI. Sztoczek utca 2—4. Ungarn.