

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ СИНТЕЗА МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

Г. ГОНДА

Кафедра теоретических основ электротехники Будапештского Политехнического Института

(Поступило: 23 Августа 1965 г.)

Представлено зав. кафедрой проф. К. Шимони

1. Введение

Во многих областях науки и техники требуется магнитное поле, изменяющееся вдоль некоторого расстояния заданным образом. Чаще всего требуется однородное поле, однако, во многих случаях требуется поле с линейно, квадратично или периодически изменяющейся напряженностью. В технике управления, автоматики и в измерительной технике в датчиках положения, скорости, силы, ускорения и т. д. и в измерительных преобразователях нужно реализовать однородное, линейно или квадратично изменяющееся магнитное поле. В термоядерных реакторах ядерной физики требуется однородное поле. В электронной оптике в магнитных линзах желательно иметь магнитное поле, изменяющееся по закону $H(z) = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$;

$H(z) = B_0 e^{-z/a}$; или $H(z) = \frac{H_0}{ch\ z/a}$. Кроме этого для решения специальных задач может оказаться необходимым иметь магнитные поля, заданные другим, возможно, эмпирическим путем.

Ввиду важности задачи на эту тему появилось несколько публикаций [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 18, 19], которые, однако, не решают по сути дела проблему, потому что часть этих публикаций занимается только, созданием однородного магнитного поля и рассматривает отличие поля от однородного, а другая часть хоть и дает общий синтез поля, но полученные конечные результаты настолько сложны, что не могут быть использованы в практике.

В настоящей работе рассмотрим вопрос, как можно создать магнитное поле, изменяющееся вдоль заданной оси по заданному закону, с помощью прямой обмотки круглого сечения (соленоидом). При расчете предположим, что соленоид имеет очень густую намотку, а также и то, что в рассматриваемой части пространства магнитная проницаемость постоянна.

В работе дается метод синтеза магнитного поля вдоль продольной оси катушки, однако, коротко остановимся и на том, что зная напряженность

* Сокращенный текст докторской диссертации, представленной на электротехнический факультет Будапештского Политехнического Института в мае 1965 г.

поля вдоль оси, как можно определить напряженность поля в некоторой точке, лежащей вне оси.

Синтез осуществляется таким методом, что намотка выполняется не равномерной, а с шагом, меняющимся соответственно изменению напряженности поля. Задача заключается как раз в том, что к заданному распределению напряженности поля нужно определить необходимое изменение шага намотки.

Как заданная напряженность поля, так и закон изменения шага намотки записываются в виде многочлена Тейлора и в теоретических расчетах принимаются во внимание первые четыре члена, однако при практическом проектировании достаточно учитывать члены до третьей степени, обеспечивающие достаточную точность. Конечно, проблема может быть решена и путем применения каркаса с изменяющимся поперечным сечением, а также таким путем, что вместо приближения рядом Тейлора применяется приближение многочленом Лагранжа [17], многочленом Эрмита [17] или многочленом Чебышева, которые обеспечивают эквивалентное решение.

2. Определение напряженности поля вдоль оси

Напряженность поля вдоль оси прямой катушки круглого сечения с очень густой намоткой, изображенной на рисунке 1, определяется таким образом, что небольшой участок обмотки $d\zeta$, находящийся на месте ζ , принимается как один проводник круглой формы и по его магнитному полю определяется полная напряженность поля вдоль оси.

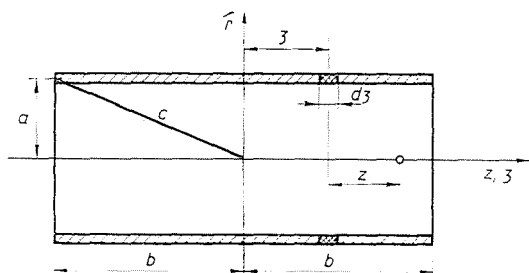


Рис. 1

Напряженность поля, создаваемая одним проводником круглой формы с радиусом a , по которому течет ток I , на некотором расстоянии z от центральной плоскости (например: [4], [15], [20]):

$$H(z) = \frac{1}{2} I a^2 \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Если на рассматриваемом участке $d\zeta$ находится dN витков, тогда напряженность поля, создаваемого этим участком обмотки на основании (1):

$$dH(z) = \frac{1}{2} I a^2 dN \frac{1}{[(z - \zeta)^2 + a^2]^{3/2}}. \quad (2)$$

Обозначим число витков на единицу длины, то есть густоту намотки через $f(\zeta) = \frac{dN(\zeta)}{d\zeta}$. При этом число витков на небольшом участке:

$$dN = f(\zeta) \cdot d\zeta. \quad (3)$$

Подставим это в (2), интегрируем по всей длине обмотки и получим напряженность поля в точке, имеющей абсциссу z :

$$H(z) = \frac{I a^2}{2} \int_{-b}^b \frac{f(\zeta)}{[(z - \zeta)^2 + a^2]^{3/2}} d\zeta. \quad (4)$$

Густота намотки задана в виде многочлена Тейлора, из которого учитываются первые пять членов:

$$f(\zeta) = \frac{dN(\zeta)}{d\zeta} = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + A_4 \zeta^4. \quad (5)$$

Для облегчения дальнейших расчетов введем следующие обозначения

$$g(z; \zeta) = \sqrt{(z - \zeta)^2 + a^2} = \sqrt{z^2 + \zeta^2 + a^2 - 2z\zeta}, \quad (6)$$

$$g_1(z) = g(\zeta = b) = \sqrt{a^2 + b^2 + z^2 - 2bz}, \quad (7)$$

$$g_2(z) = g(\zeta = -b) = \sqrt{a^2 + b^2 + z^2 + 2bz}. \quad (8)$$

Видно, что при подставке выражения (5) в (4), появляются интегралы следующего вида:

$$\int_{-b}^b \frac{1}{g^3(\zeta)} d\zeta; \quad \int_{-b}^b \frac{\zeta}{g^3(\zeta)} d\zeta; \quad \int_{-b}^b \frac{\zeta^2}{g^3(\zeta)} d\zeta; \quad umg. \quad (9)$$

Решая эти интегралы [14], в результате некоторых вычислений из уравнения (4) получим выражение для напряженности поля в явном виде:

$$\begin{aligned}
H(z) = & \frac{1}{2} I \left\{ A_0 \left[\frac{b-z}{g_1(z)} + \frac{b+z}{g_2(z)} \right] + \right. \\
& + A_1 \left[-\frac{a^2 - bz + z^2}{g_1(z)} + \frac{a^2 + bz + z^2}{g_2(z)} \right] + \\
& + A_2 \left[-\frac{a^2 b + a^2 z - bz^2 + z^3}{g_1(z)} - \frac{a^2 b - a^2 z - bz^2 - z^3}{g_2(z)} \right] + \\
& + a^2 \ln \frac{g_1(z) + b - z}{g_2(z) - b - z} \left. \right\} + \\
& + A_3 \left[\frac{2a^4 + a^2 b^2 - 5a^2 bz + a^2 z^2 + bz^3 - z^4}{g_1(z)} - \right. \\
& - \frac{2a^4 + a^2 b^2 + 5a^2 bz + a^2 z^2 - bz^3 - z^4}{g_2(z)} \left. \right] + \\
& + 3a^2 z \ln \frac{g_1(z) + b - z}{g_2(z) - b - z} \left. \right\} + \\
& + A_4 \left[\frac{a^2 b^3 + 5a^2 b^2 z - 25a^2 bz^2 + 2bz^4 + 13a^4 z + 11a^2 z^3 - 2z^5 + 3a^4 b}{2g_1(z)} - \right. \\
& - \frac{a^2 b^3 + 5a^2 bz + 25a^2 bz^2 - 2bz^4 + 13a^4 z + 11a^2 z^3 - 2z^5 - 3a^4 b}{2g_2(z)} \left. \right] + \\
& - \frac{3(4a^2 z^2 - a^4)}{2} \cdot \ln \frac{g_1(z) + b - z}{g_2(z) - b - z} \left. \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Для дальнейших расчетов это уравнение несколько преобразуем (одновременно пренебрегаем членом в пятой степени):

$$\begin{aligned}
\frac{2}{I} \cdot H(z) = & \left[\frac{1}{2g_1(z)} + \frac{1}{2g_2(z)} \right] \cdot [(2A_0 b - 2A_2 a^2 b + A_4 a^2 b^3 + 3A_1 a^2 b) + \\
& + z(2A_1 b - 10A_3 a^2 b) + z^2(2A_2 b - 25A_1 a^2 b) + \\
& + z^3 2A_3 b + z^4 2A_4 b] + \\
& + \left[\frac{1}{2g_1(z)} - \frac{1}{2g_2(z)} \right] \cdot [(2A_1 a^2 - 4A_3 a^4 - 2A_3 a^2 b^2) + \\
& + z(2A_0 + 2A_2 a^2 - 5A_4 a^2 b^2 - 13A_1 a^4) + \\
& + z^2(2A_1 - 2A_3 a^2) + z^3(2A_2 - 11A_4 a^2) + z^4 2A_3] + \\
& + \left[A_2 a^2 + 3A_3 a^2 z + 6A_4 a^2 z^2 - \frac{3}{2} A_4 z^4 \right] \cdot \ln \frac{g_1(z) + b - z}{g_2(z) - b - z}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Выражения (10) и (11) точные для очень густой намотки, однако они неудобны для обозрения. Но, так как выражение задано в виде многочленов Тейлора, поле рассматривается только вблизи центра обмотки, а также так как выражение $f(\zeta)$ может рассматриваться как приближенное выражение до четвертой степени какой-то общей функции, определим многочлен Тейлора четвертой степени для $H(z)$, описанного уравнением (11).

Введем обозначение, имеющее геометрический смысл,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (12)$$

При использовании известное разложение в ряд функции $(1 \pm x)^{-1/2}$ многочлены Тейлора четвертой степени функций $1/g_1(z)$ и $1/g_2(z)$ имеют следующие формы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{c} + z \frac{b}{c^3} + z^2 \frac{2b^2 - a^2}{2c^5} + z^3 \frac{b(2b^2 - 3a^2)}{2c^7} + \\ + z^4 \frac{3a^4 - 24a^2b^2 + 8b^4}{8c^9}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_2(z)} = \frac{1}{c} - z \frac{b}{c^3} + z^2 \frac{2b^2 - a^2}{2c^5} - z^3 \frac{b(2b^2 - 3a^2)}{2c^7} + \\ + z^4 \frac{3a^4 - 24a^2b^2 + 8b^4}{8c^9}. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти выражения являются сходящимися, если

$$b - \sqrt{a^2 + 2b^2} \leq z \leq b + \sqrt{a^2 + 2b^2}. \quad (15)$$

Ряд Тейлора до четвертой степени логарифмического выражения, фигурирующего в уравнении (11), при использовании рядов для $g_1(z)$ и $g_2(z)$ а также и приближенного выражения для $\ln(1 \pm x)$ после несложных вычислений получается в следующем виде:

$$\ln \frac{g_1(z) + b - z}{g_2(z) - b - z} = 2 \ln \frac{b + c}{a} - \frac{b}{c^3} z^2 - \left[\frac{k_2}{3} - k_4 \right] z^4, \quad (16)$$

где

$$k_2 = \frac{b}{c^3} \quad \text{и} \quad k_4 = \frac{3c^5 + 3c^3b^2 - 7cb^4 + 5bc^4 - b^3c^2 - 5b^5}{4c^7(b+c)^2}. \quad (17)$$

Отметим, что приближенное выражение (16) сходится тогда, если

$$z < \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \sqrt{\frac{c^3}{b}}, \quad (18)$$

а внутри обмотки это везде выполняется.

Если приближенные выражения (13), (14) и (16) подставить в уравнение (11), тогда — опуская подробности вычислений — (пренебрегая членами в степенях выше четвертой) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{2}{I} H(z) = & \frac{1}{c} [2 A_0 b - 2 A_2 a^2 b + A_4 a^2 b^3 + 3 A_4 a^4 b] + \\ & + 2 \ln \frac{b+c}{a} \left[A_2 a^2 - \frac{3}{2} A_4 a^4 \right] + z \left[\frac{2 A_1 b - 10 A_3 a^2 b}{c} - \right. \\ & - \frac{b}{c^3} (2 A_1 a^2 - 4 A_3 a^4 - 2 A_3 a^2 b^2) + 6 \ln \frac{b+c}{a} \cdot A_3 a^2 \left. \right] + \\ & + z^2 \left[\frac{2 A_2 b - 25 A_4 a^2 b}{c} + \frac{2 b^2 - a^2}{2 c^5} (2 A_0 b - 2 A_2 a^2 b + \right. \\ & + A_4 a^2 b^3 + 3 A_4 a^4 b) - \frac{b}{c^3} (2 A_0 + 3 A_2 a^2 - 5 A_4 a^2 b^2 - \\ & - \frac{29}{2} A_4 a^4) + 12 A_4 a^4 \ln \frac{b+c}{a} \left. \right] + z^3 \left[\frac{2 A_3 b}{c} + \right. \\ & + \frac{2 b^2 - a^2}{2 c^5} (2 A_1 b - 10 A_3 a^2 b) - \frac{b}{c^3} (2 A_1 - 2 A_3 a^2) - \\ & - \frac{3 A_3 a^2 b}{c^3} - \frac{b(2 b^2 - 3 a^2)}{2 c^7} (2 A_1 a^2 - 4 A_3 a^4 - \\ & - 2 A_2 a^2 b^2) \left. \right] + z^4 \left[\frac{2 A_4 b}{c} + \frac{2 b^2 - a^2}{2 c^5} (2 A_2 b - 25 A_4 a^2 b) + \right. \\ & + \frac{3 a^4 - 24 a^2 b^2 + 8 b^4}{8 c^9} (2 A_0 b - 2 A_2 a^2 b + A_4 a^2 b^3 + 3 A_4 a^4 b) - \\ & - \frac{b}{c^3} (2 A_2 - 11 A_4 a^2) - \frac{b(2 b^2 - 3 a^2)}{2 c^7} (2 A_0 + 2 A_2 a^2 - \\ & - 5 A_4 a^2 b^2 - 13 A_4 a^4) + \left(k_4 - \frac{k_2^2}{3} \right) \cdot \left(A_2 a^2 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} A_4 a^4 \right) - \frac{6 A_4 a^2 b}{c^3} \left. \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Для практических расчетов вполне достаточно учитывать члены для напряженности поля до третьей степени. Из вышенаписанного уравнения это получается подстановкой $A_4 = 0$ и $z^4 = 0$. Введем обозначение

$$k = \ln \frac{b+c}{a}, \quad (20)$$

и после недлинных расчетов получим многочлен Тейлора третьей степени для $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Ib}{c} \left\{ \left[A_0 - A_2 a^2 \frac{b-kc}{b} \right] + z \left[A_1 \frac{b^2}{c^2} - \right. \right. \\ \left. - A_3 a^2 \left(\frac{3c^2+b^2}{c^2} - \frac{3kc}{b} \right) \right] + z^2 \left[-A_0 \frac{3a^2}{2c^4} + \right. \\ \left. + A_2 b^2 \frac{3b^2-c^2}{2c^4} \right] - z^3 \left[A_1 \frac{5a^2b^2}{2c^6} + A_3 \frac{5b^6-3b^4c^2}{2c^6} \right] \left. \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Это выражение позволяет вычислить магнитное поле катушки, намотанной заданным образом (см. выражение (5)). Однако задача синтеза требует выполнения расчетов в обратном порядке, то есть нужно определить коэффициенты A_i катушки к заранее заданной напряженности поля. Для этой цели заданная напряженность магнитного поля записывается также в виде степенного ряда, причем соответственно вышеизложенным в приближении только до третьей степени:

$$H(z) = \frac{Ib}{c} [B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3]. \quad (22)$$

При сопоставлении выражений (21) и (22) коэффициенты A_i могут быть выражены как функции заданных коэффициентов B_i и геометрических данных катушки:

$$A_0 = \frac{B_0(3b^5 - b^3c^2) + B_2(2a^2bc^4 - 2a^2kc^5)}{3b^5 - b^3c^2 - 3a^4c + 3a^4kc}, \quad (23)$$

$$A_1 = \frac{B_1(5b^7c^2 - 3b^5c^4) + B_3(6a^2bc^5 + 2a^2b^3c^6 - 6ka^2c^9)}{5b^9 - 3b^7c^2 + 15a^4b^2kc^3 - 15a^4b^3c^2 - 5a^4b^5}. \quad (24)$$

$$A_2 = \frac{3a^2bB_0 + 2bc^4B_2}{3b^5 - b^3c^2 - 3a^4b + 3a^4kc}, \quad (25)$$

$$A_3 = \frac{5 a^2 b c^2 B_1 + 2 b c^6 B_3}{5 b^7 - 3 b^5 c^2 + 15 a^4 k c^3 - 15 a^4 b c^2 - 5 a^4 b^3}. \quad (26)$$

С помощью вышеприведенных относительно простых выражений может быть рассчитана катушка. Однако, до рассмотрения практического хода проектирования остановимся на нескольких важных вопросах.

3. Определение остальных компонентов напряженности поля

До сих пор рассматривали зависимость компонента направления z напряженности магнитного поля только от координат z . Однако, может оказаться нужной и зависимость компонента направления z от r , а также зависимость компонента направления r от обеих координат. (Так как поле имеет осевую симметрию, напряженность поля не зависит от угла φ .)

Как известно [20], если задано изменение компонента H_z напряженности магнитного поля, имеющего осевую симметрию, вдоль оси z , то есть задано $H_z(z; 0)$, тогда векторный потенциал $A_r(z; r)$ и через него $H_z(z; r)$ и $Hr(z; r)$ могут быть определены однозначно.

Приближенное выражение для векторного потенциала с точностью до пятой степени:

$$A_r(z; r) = r f_1(z) + r^3 f_3(z) + r^5 f_5(z). \quad (27)$$

где функции $f_i(z)$, полученные в результате разложения в ряд, вычисляются следующим образом:

$$f_1(z) = \frac{1}{2} \mu H_z(z; 0); \quad f_3(z) = -\frac{1}{8} f_1''(z) = -\frac{1}{16} \mu H_z''(z; 0). \quad (28)$$

$$f_5(z) = \frac{1}{12 \cdot 16} f_1^{(4)}(z) = \frac{1}{24 \cdot 16} \mu H_z^{(4)}(z; 0). \quad (29)$$

Так как в нашем случае

$$H_z(z; 0) = \frac{Ib}{c} [B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4], \quad (30)$$

после дифференцирования из уравнений (27), (28) и (29) получим выражение для напряженности магнитного поля

$$H_z(z; r) = H_z(z; 0) - \frac{1}{2} r^2 \frac{Ib}{c} [B_2 + 3 B_3 z + 6 B_4 z^2] + \frac{3}{8} r^4 \frac{Ib B_4}{c}, \quad (31)$$

где функция $H_z(z; 0)$ дается уравнением (30).

Из выражения (31) в центральной плоскости катушки ($z = 0$) получим:

$$H_z(0; r) = \frac{Ib}{c} \left[B_0 + \frac{3}{8} r^4 B_4 \right], \quad (32)$$

и в центре получим:

$$H_z(0; 0) = \frac{Ib}{c} B_0. \quad (33)$$

На основании выражений (32) и (33) можно определить относительное изменение компонента z напряженности поля в зависимости от радиуса вблизи центральной плоскости катушки:

$$k_z(r) = \frac{H_z(0; r) - H_z(0; 0)}{H_z(0; 0)} = \frac{3}{8} \frac{B_4}{B_0} r^4. \quad (34)$$

Если созданная напряженность поля является однородной при приближении сточностью до третьей степени, относительная погрешность, возникшая при смещении вдоль оси z , на основании выражения (22) составляет:

$$k_z(z) = \frac{H_z(z; 0) - H_z(0; 0)}{H_z(z; 0)} = \frac{B_4}{B_0} z^4. \quad (35)$$

После этого определим изменение напряженности поля вдоль радиуса, то есть выражения $H_r(z; r)$ [20].

По вышеопределенной функции векторного потенциала $A_\varphi(z; r)$:

$$H_r(z; r) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A_\varphi(z; r). \quad (36)$$

Так как

$$A_\varphi(z; r) = \frac{1}{2} \mu r H_z(z; 0) - \frac{1}{16} \mu r^3 H_z''(z; 0) + \frac{1}{24 \cdot 16} \mu r^5 H_z^{(4)}(z; 0), \quad (37)$$

после соответствующих дифференцирований на основании уравнения (36) получим:

$$H_z(z; r) = -\frac{Ib}{2c} r [B_1 + 2B_2 z + 3B_3 z^2] + \frac{3IbB_3}{8c} r^3. \quad (38)$$

В связи с этим интересно отметить, что член четвертой степени, которым пренебрегали по ходу расчета, не влияет на радиальный компонент напряженности поля и при создании однородного поля (в случае приближения с точностью до четвертой степени) радиального компонента вовсе не возникает. Из выражения (38) видно и то, что вдоль оси z нет компонента в направлении r .

Изменение радиального компонента напряженности поля вблизи центральной плоскости катушки дается следующей функцией:

$$H_r(0; r) = -\frac{3IbB_3}{8c} r^3 - \frac{IbB_1}{2c} r. \quad (39)$$

4. Расчет магнитного поля катушки Гельмгольца, и сравнение с соленоидом

В литературе опубликован расчет катушки Гельмгольца, предназначенной для создания однородного магнитного поля, однако применяется приближение с точностью только до третьей степени и пренебрегают членом

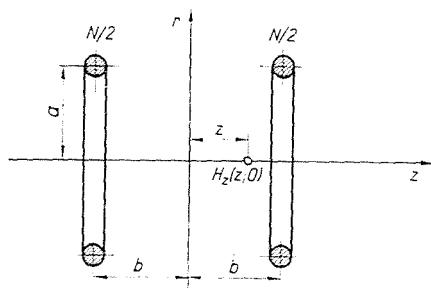


Рис. 2

четвертой степени, служащим как раз для сопоставления. Для получения погрешности однородности и для обеспечения возможности сопоставления катушки Гельмгольца с рассмотренным выше соленоидом произведем более точный расчет катушки Гельмгольца.

Обозначения на рисунке 2 согласованы с обозначениями на рисунке 1. Рассмотрим две катушки одинаковой конструкции, имеющих одинаковое число витков ($N/2$) и форму круглого кольца, которые расположены симметрично в системе координат $z - r$.

При использовании выражения, описывающего магнитное поле одного витка кругообразного проводника, напряженность поля рассматриваемой системы в точке $(z; 0)$ рисунка 2. записывается в следующем виде:

$$H_z(z; 0) = \frac{NIa^2}{4} \left[\frac{1}{[a^2 + (b+z)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (b-z)^2]^{3/2}} \right] = \\ = \frac{NIa^2}{4(a^2 + b^2)^{3/2}} \left\{ \left[1 + z \frac{z+2b}{a^2 + b^2} \right]^{-3/2} + \left[1 - z \frac{z-2b}{a^2 + b^2} \right]^{-3/2} \right\}. \quad (40)$$

При использовании общеизвестного разложения

$$(1+u)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}u + \frac{15}{8}u^2 - \dots \quad (41)$$

уравнение (40) после некоторых преобразований в приближении с точностью до четвертой степени можно записать в следующей форме:

$$H_z(z; 0) = \frac{NIa^2}{4\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left[2 + \frac{15b^2 - 3(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2} z^2 + \frac{15}{4(a^2 + b^2)^2} z^4 \right]. \quad (42)$$

При стремлении к созданию однородного поля выбором $a = 2b$ коэффициент члена, содержащего z^2 , приравняется к нулю, и таким образом, если членом четвертой степени заведомо пренебрегали, поле будет действительно однородным. Для более точных расчетов нужно учитывать и член, содержащий четвертую степень. В этом случае напряженность поля системы катушек из выражения (42) определяется следующим образом:

$$H_z(z; 0) = \frac{4NI}{a\sqrt{125}} \left[1 + \frac{6}{5a^4} z^4 \right]. \quad (43)$$

Из этого относительная погрешность однородности вдоль оси z :

$$k_z(z) = \frac{H_z(z; 0) - H_z(0; 0)}{H_z(0; 0)} = \frac{6}{5a^4} z^4. \quad (44)$$

Если при некотором применении допускается относительная погрешность однородности k , тогда из выражения (44) можно определить максимальную полезную длину системы.

Для этого имеем следующее выражение:

$$l = a \sqrt[4]{\frac{40k}{3}}. \quad (45)$$

Если например $k = 0,01\% = 10^{-4}$, из выражения (45) получим $l = 0,1072 \cdot a$, то есть приблизительно в 11% ширины можно считать магнитное поле однородным.

Для практических расчетов можно записать выражение из которого можно определить возбуждение $\Theta = NI$, необходимое для однородной напряженности поля H_0 вдоль длины l с погрешностью k . Из формул (43) и (45) для необходимого возбуждения получим:

$$\Theta = H_0 l \sqrt[4]{\frac{9375}{2048k}} \approx 1,5 \frac{H_0 l}{\sqrt[4]{k}}. \quad (46)$$

К этому принадлежат следующие геометрические размеры:

$$2a = 2l \sqrt[4]{\frac{3}{40k}} \quad \text{и} \quad 2b = a. \quad (47)$$

Если, например, с помощью катушки Гельмгольца нужно создать однородную напряженность поля величины $H_0 = 2000$ а/м вдоль длины $l = 5$ см с погрешностью $k = 10^{-4}$, тогда из выражений (46) и (47)

$$\Theta = 1500 a; \quad 2a = 52 \text{ см}; \quad 2b = 26 \text{ см}.$$

Зная компонент $H_z(z; 0)$ напряженности поля согласно вышеизложенному методу определим компонент $H_z(z; r)$ напряженности поля катушки Гельмгольца, создающей «однородное поле», с приближением с точностью до четвертой степени.

С помощью определения векторного потенциала на основании уравнений (27), (28), (29) и (43) можно записать

$$H_z(z; r) = H_z(z; 0) - r^2 \frac{72 NI}{5 a^5 \sqrt{125}} + r^4 \frac{9 NI}{5 a^5 \sqrt{125}}. \quad (48)$$

Согласно этому относительная погрешность вдоль радиуса:

$$k_z(r) = \frac{H_z(0; r) - H_z(0; 0)}{H_z(0; 0)} = \frac{9}{20 a^4} r^4. \quad (49)$$

Определим компонент в направлении r напряженности магнитного поля катушки Гельмгольца, создаваемой однородное магнитное поле. При использовании выражения (27) для векторного потенциала и уравнения (43) с приближением с точностью до четвертой степени можем записать:

$$H_r(z; r) = \frac{12 NI}{5 a^5 \sqrt{125}} r z [3 r^2 - z^2]. \quad (50)$$

Из этого видно, что в случае катушки Гельмгольца, создающей однородное поле, в точках, лежащих на оси, нет радиального компонента. Таким образом, поле, в этом отношении, действительно является однородным.

На основании предыдущих исследований уже можно сопоставить катушку Гельмгольца и соленоид, намотанный вышеизложенным образом, который был рассчитан, конечно, также для создания однородного поля.

Сравнение можно производить, исходя из нескольких точек зрения. Можно принять длины или диаметры обеих катушек одинаковыми; можно вести расчет на одинаковое израсходование провода, на одинаковые суммарные или полезные объемы, если погрешность в однородности фиксирована; можно рассматривать потребляемую энергию через возбуждение и т. д. Оказывается целесообразным сравнить полезные объемы.

В случае катушки Гельмгольца при рассмотрении погрешности в однородности вдоль оси z на основании выражения (45) полезная длина системы составляет:

$$l = a \sqrt[3]{\frac{40 k}{3}}. \quad (51)$$

или, задаваясь предыдущим значением погрешности $k = 0,01\%$, получаем $l = 0,1072 a$. В случае соленоида, как это видно было в пункте 3, погрешность вдоль оси z составляет:

$$k_z(z) = \frac{B_4}{B_0} z^4. \quad (52)$$

Для иллюстрации порядков величин рассмотрим численные данные.

В случае соленоида, предназначенного для создания однородного магнитного поля — к расчету еще вернемся — получим следующие значения:

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0; \quad B_0 = 111 \text{ cm}^{-1}; \quad |B_4| = 4,15 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-5}.$$

Используя это, можно определить и полезную длину соленоида (в данном случае $2b = 30$ см)

$$l = 20 \sqrt[3]{\frac{k}{3,75}}. \quad (53)$$

В случае погрешности $k = 10^{-4}$ из этого выражения получается $l = 1,43$ см. Это составляет 4,8% всей длины катушки. Таким образом, в этом отношении соленоид хуже, ведь в случае катушки Гельмгольца это значение составляло 11%. Однако, катушка Гельмгольца является очень высокой. Если расчет ведем в процентах высот, тогда соотношение будет обратное: 5,5% и 12% соответственно.

На основании выражения (1) сразу видно, что вследствие меньшего радиуса намотки для создания напряженности поля заданной величины в случае соленоида требуется гораздо меньшее возбуждение, чем в случае катушки Гельмгольца.

Наконец, катушка Гельмгольца может быть использована только для создания однородной напряженности магнитного поля и, если нужно создать поле другого характера, нет основания для сравнения.

Из вышеизложенного можно установить, что соленоид является выгодным даже и в случае создания однородного магнитного поля, а поля другого характера другим путем могут быть созданы только весьма сложным путем.

5. Ход практического расчета

а) Преобразование выражений

Теперь уже можем вернуться к выражениям (23)–(26), выведенным в пункте 2, и можем проверить, как производится расчет катушки, решающей конкретную задачу.

На основании формул уже можно было бы рассчитать соответствующие коэффициенты, однако, вследствие сложности выражений это составляло бы большой труд. Поэтому для практики несколько преобразуем уравнения и составим диаграммы, облегчающие счетную работу.

Прежде всего, введем безразмерные величины, определенные уравнениями

$$p = \frac{b}{a}; \quad q = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + p^2}, \quad (54)$$

которые зависят только от геометрических размеров катушки. Этим (20):

$$k = \ln \frac{b+c}{a} = \ln \left[\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right] = \ln(p+q). \quad (55)$$

С помощью вышеприведенных параметров, можно преобразовать выражение (23):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{3b^5 - b^3c^2}{3b^5 - b^3c^2 - 3a^4c + 3a^4kc} \cdot B_0 + \\ &= \frac{2a^2bc^4 - 2a^2kc^5}{3b^5 - b^3c^2 - 3a^4c + 3a^4kc} \cdot B_2 = \\ &= \frac{2p^5 - p^3}{2p^5 - p^3 - 3p + 3q \ln(p+q)} B_0 + \\ &= \frac{p^5 + 2p^3 + p - q \ln(p+q) \cdot (p^2 + 1)^2}{2p^5 - p^3 - 3p + 3q \ln(p+q)} \cdot 2a^2 B_2. \quad (56) \end{aligned}$$

Введением логичных обозначений F_{ij} это уравнение можно написать в следующем укороченном виде:

$$A_0 = F_{00}(p) \cdot B_0 + F_{02}(p) \cdot B_2. \quad (57)$$

где видно, что

$$F_{00}(p) = \frac{2p^5 - p^3}{2p^5 - p^3 - 3p + 3q \ln(p+q)}, \quad (58)$$

и

$$F_{02}(p) = \frac{p^5 + 2p^3 + p - q \ln(p+q) \cdot (p^2 + 1)^2}{2p^5 - p^3 - 3p + 3q \ln(p+q)} \cdot 2a^2.$$

Величина $F_{00}(p)$ безразмерная, а размерность $F_{02}(p)$ [m^2], и обе величины зависят только от геометрических размеров катушки.

Подобно вышеизложенным уравнения (24), (25) и (26) также можно переписать в следующем виде:

$$A_1 = F_{11}(p) B_1 + F_{13}(p) B_3, \quad (59)$$

$$A_2 = F_{20}(p) B_0 + F_{22}(p) B_2, \quad (60)$$

$$A_3 = F_{31}(p) B_1 + F_{33}(p) B_3. \quad (61)$$

где

$$F_{11}(p) = \frac{2p^7 - p^5 - 3p^3}{2p^7 - 3p^5 - 20p^3 - 15p + 15q^3 \ln(p+q)}, \quad [1] \quad (62)$$

$$F_{13}(p) = \frac{4p^9 + 15p^7 + 21p^5 + 13p^3 + 3p - 3q^9 \ln(p+q)}{2p^9 - 3p^7 - 20p^5 - 15p^3 + 15p^2 q^3 \ln(p+q)} \cdot 2a^2, [m^2] \quad (63)$$

$$F_{20}(p) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{3p}{2p^5 - p^3 - 3p + 3q \ln(p+q)}, [m^{-2}] \quad (64)$$

$$\begin{aligned} F_{22}(p) &= \frac{2p^5 + 4p^3 + 2p}{2p^5 - p^3 - 3p + 3q \ln(p+q)} = \\ &= \frac{2}{3} a^2 F_{20}(p^2 + 1)^2 = \frac{2}{3} a^2 q^4 F_{20}, [1] \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} F_{31}(p) &= \frac{5}{a^2} \cdot \frac{p + p^3}{2p^7 - 3p^5 - 15p - 20p^3 + 15q^3 \ln(p+q)} = \\ &= \frac{5}{2a^2} \cdot \frac{p + p^3}{p^7 + 3p^5 + 3p^3 + p} \cdot F_{33}(p), [m^{-2}] \end{aligned} \quad (66)$$

$$F_{33}(p) = 2 \cdot \frac{p^7 + 3p^5 + 3p^3 + p}{2p^7 - 3p^5 - 20p^3 - 15p + 15q^3 \ln(p+q)}, [1] \quad (67)$$

Для упрощения вычислений эти постоянные мы изобразили в зависимости от p в виде кривой функции на рисунках 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

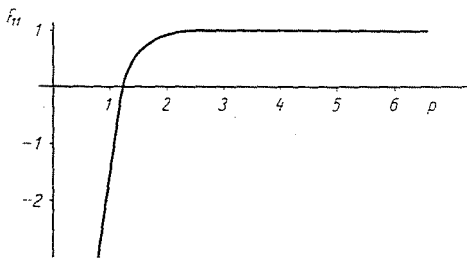


Рис. 3

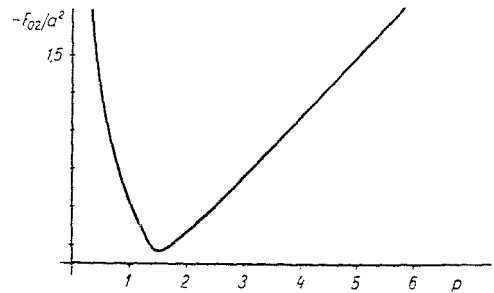


Рис. 4

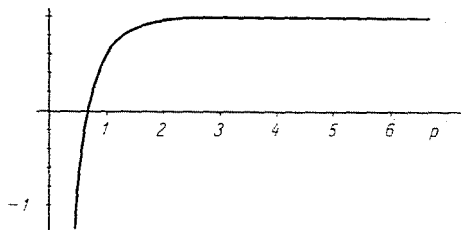


Рис. 5

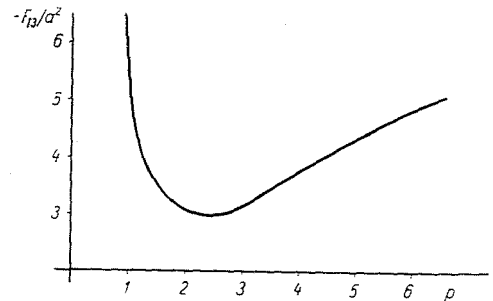


Рис. 6

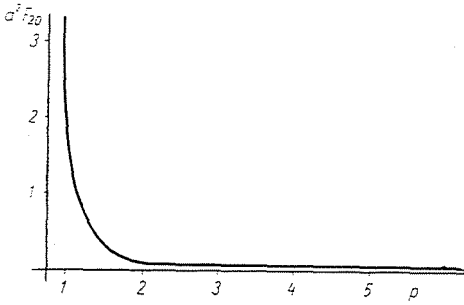


Рис. 7

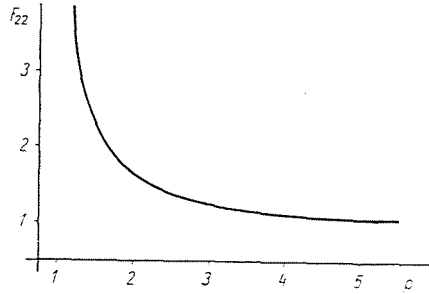


Рис. 8

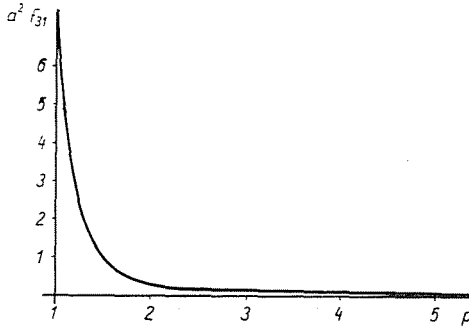


Рис. 9

Целесообразно обратить внимание на то, что в случае больших значений кривые стремятся всегда к некоторому характерному значению или к некоторой характерной функции:

	$p \geq 2$	$p \approx 2 \div 3$
F_{∞}	1	1
F_{02}/a^2	$1 - \frac{1}{2p^1} \cdot \ln 2p^5$	$\frac{2p^2(p^2 + 2) - \ln 2p^5}{p^2(2p^2 - 1)}$
F_{11}	1	$\frac{2p^2 - 1}{2p^2 - 3}$
F_{13}/a^2	$4 - 3 \ln 2p$	$\frac{2p^2(4 - 3 \ln 2p) + 30}{2p^2 - 3}$
$a^2 F_{20}$	0	0
F_{22}	1	$\frac{2p^2 + 4}{2p^2 - 1}$
$a^2 F_{31}$	0	0
F_{33}	1	$\frac{2p^2 + 6}{2p^2 - 3}$

Данное свойство функций может значительно сократить вычислительные работы, потому что, если длина катушки в меньшей мере в 3—4 раза превышает ее диаметр, тогда вместо соотношений (57) и (59)—(61) можно пользоваться следующими выражениями, являющимися гораздо более простыми:

$$A_0 = B_0 + F_{02}(p) B_2, \quad (68)$$

$$A_1 = B_1 + F_{13}(p) B_3, \quad (69)$$

$$A_2 = B_2, \quad (70)$$

$$A_3 = B_3, \quad (71)$$

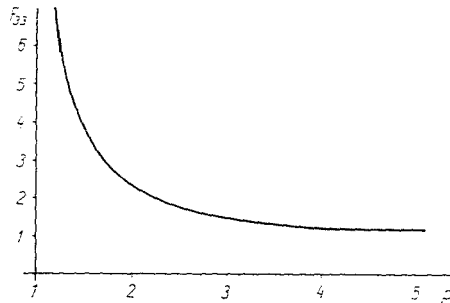


Рис. 10

Если для повышения точности или вследствие того, что нужное значение p уже не указано на диаграмме, коэффициенты $F_{ij}(p)$ хотим определить расчетным путем, тогда для сокращения вычислений уравнения (58) и (62)—(67) можно упростить путем соответствующих преобразований, и подстановок. В этом случае — как это легко видно — расчет можно производить в следующем порядке. Для соответствующего значения p из уравнения (64) вычислим величину $(a^2 \cdot F_{20})$. После этого уже просто получаются следующие выражения:

$$F_{00} = \frac{1}{3} (a^2 F_{20}) p^2 [2 p^2 - 1], \quad (72)$$

$$F_{22} = \frac{2}{3} (a^2 F_{20}) q^4, \quad (73)$$

$$F_{02} = a^2 F_{22} \left[1 - \frac{q}{p} \ln(q + p) \right]. \quad (74)$$

Потом из уравнения (66) вычислим величину $(a^2 F_{31})$, с помощью которой получим:

$$F_{11} = \frac{1}{5} \left(\frac{p}{q} \right)^2 (a^2 F_{31}) [2 p^4 - p^2 - 3], \quad (75)$$

$$F_{33} = \frac{2}{5q^2} (a^2 F_{31}) [p^6 + 3p^4 + 3p^2 + 1], \quad (76)$$

$$F_{13} = \frac{1}{5p^2q^2} [4p^9 + 15p^7 + 21p^5 + 13p^3 + 3p - 3q^9 \ln(p-q)]. \quad (77)$$

б) Порядок расчета на практике

Рассмотрим, в каком порядке производится расчет катушки, создающей магнитное поле заданного распределения.

Заданным магнитным полем задаются значения B_k . Соответственно назначению катушки можно задаваться геометрическими размерами катушки, с помощью которых можно рассчитать p . Для этого значения p по графикам

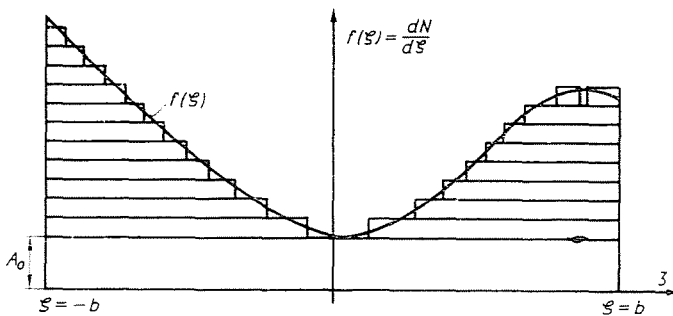


Рис. 11

3—10 отсчитывают значения F_{ik} . (Если некоторое из коэффициентов F_{ik} плохо отсчитывается, тогда с помощью уравнений (58), (62)—(67) можно произвести более точный расчет.)

Зная коэффициенты, можно рассчитать из выражений (57), (59)—(61) коэффициенты A_i , с помощью которых можно записать функцию (5), задающую закон изготовления обмотки. Эта функция изображена (целесообразно) на миллиметровой бумаге (см. рисунок 11). Таким образом, нужно реализовать такой закон намотки.

в) Осуществление намотки

Вышеуказанную намотку при производстве можно реализовать двумя методами. Можно изготовить намотку или действительно с переменным шагом намотки, или непрерывную кривую, изображенную на рисунке, можно аппроксимировать ступенчатой кривой. Это значит, что несколько слоев провода наносится друг на друга, а сами эти слои изготавливаются равномерной намоткой. Этот последний вариант на практике легче изготовить. Начала ступеней, т. е. начало каждого нового слоя можно легко отсчитывать непосредственно по миллиметровой бумаге. Для того, чтобы как можно точнее аппроксимировали кривую, целесообразно применять

небольшие ступени. Одно, при этом катушка будет иметь очень много слоев и в этом случае уже нельзя пренебречь толщиной обмотки по сравнению с диаметром. А это должно учитываться в исходном уравнении (1). (Катушку, имеющую очень много слоев, тяжелее изготовлять.)

На практике, вообще, целесообразно рассчитать какую толщину шага может обеспечивать имеющийся провод при намотке виток к витку. Затем, конечно, нужно проверить, что в этом случае суммарная толщина слоев не будет ли весьма большой. Конечно, основной слой обмотки с густотой намотки A_0 нужно намотать вдоль всей катушки. В этом случае может оказаться, что при большом A_0 с помощью одного основного слоя нельзя реализовать A_0 . В этом случае нужно намотать два или несколько основных слоев. Потом все обмотки нужно включить последовательно друг другу с учетом соответствующих направлений намотки.

Видно, что при проектировании намотки на основании кривой $f(\zeta)$ можно поступать довольно произвольно и учитывать имеющийся провод.

После этого уже легко можно задавать технологию изготовления катушки, так как на чертеже можно указать начало обмоток и можно указать и соответствующие толщины проводов. С помощью этих данных можно изготовить катушки без всяких других описаний.

Для упрощения изготовления целесообразно все слои кроме основного слоя наматывать из одного и того же провода (принимая равномерную высоту ступеней). В этом случае при производстве катушек нужно работать с проводами всего с двумя различными диаметрами.

Конечно, если имеется, такой намоточный станок, на котором изменение шага намотки не является серьезной проблемой, можно применять и первый метод производства соответственно кривой $f(\zeta)$ рисунка 11.

6. Расчет конкретного численного примера

Для иллюстрации метода и применения теории для конкретного случая приведем расчет катушки, которая затем будет изготовлена, и магнитное поле, создаваемое этой катушкой будет измерено. При этом будем рассчитывать катушку с относительно большими размерами, чтобы измерения можно было выполнять легко и достаточно точно.

Пусть длина прямой катушки с круглым поперечным сечением $2b = 20$ см, а радиус пусть $a = 6$ см. При таких данных на основании уравнения (54):

$$p = \frac{b}{a} = \frac{10}{6} = 1,67; \quad c = a \sqrt{1 + p^2} = 6 \sqrt{1 + 2,79} = 11,6 \text{ см.}$$

и $b/c = 10/11,6 = 0,865$.

Пусть закон изменения создаваемого магнитного поля вдоль оси линейный, то есть

$$H(z) = I \frac{b}{c} [B_0 + B_1 z]. \quad (78)$$

Итак, в данном случае $B_2 = B_3 = 0$.

Значение напряженности поля задается постоянными B_0 и B_1 .

Пусть будет

$$B_0 = 10 \text{ см}^{-1} \quad \text{и} \quad B_1 = 2 \text{ см}^{-2}.$$

т. е. в случае $I = 1$ а создаваемая напряженность поля

$$H(z) = 0,865 I [10 + 2z] = [8,65 + 1,73z] \text{ а/см}. \quad (79)$$

На следующем этапе для вычисленного $p = 1,67$ по диаграммам, приведенным на рисунках 3—10, отсчитываем значения коэффициентов F_{ik} . (Так как в нашем случае $B_2 = B_3 = 0$, коэффициенты F_{02} , F_{13} , F_{22} и F_{33} не нужны.)

По диаграммам:

$$F_{00} = 0,90; \quad F_{11} = 0,90; \quad a^2 F_{20} = 0,2; \quad F_{20} = \frac{0,2}{36} = 0,00556 \text{ см}^{-2},$$

$$a^2 F_{31} = 0,55; \quad F_{31} = \frac{0,55}{36} = 0,0153 \text{ см}^{-2}.$$

На основании этих данных уравнения, выражающие коэффициенты A_i , имеют следующий вид:

$$A_0 = F_{00} B_0 = 0,90 \cdot 10 = 9,0 \text{ см}^{-1},$$

$$A_1 = F_{11} B_1 = 0,90 \cdot 2 = 1,8 \text{ см}^{-2},$$

$$A_2 = F_{20} B_0 = 0,00556 \cdot 10 = 0,0556 \text{ см}^{-3},$$

$$A_3 = F_{31} B_1 = 0,0153 \cdot 2 = 0,0306 \text{ см}^{-4}.$$

Таким образом, можно записать функцию, описывающую закон изменения шага катушки:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{dN}{d\zeta} = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 = \\ &= 9,0 + 1,8 \zeta + 0,0556 \zeta^2 + 0,0306 \zeta^3. \end{aligned} \quad (80)$$

Эта функция вычерчена на рисунке 12. Согласно вышеизложенным по всей длине катушки нужно изготовить основную обмотку с густотой намотки $A_0 = 9,0$ витков/см. Для этого требуется провод с диаметром $1,9 = 0,111$ см = 1,11 мм с наматыванием витков рядом непосредственно друг к другу. Для этого был использован изолированный провод с диаметром 1,1 мм.

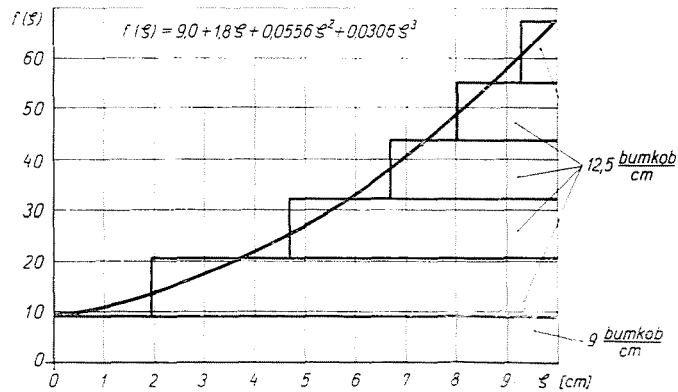


Рис. 12

На основании рисунка 12 оставшаяся ордината была разделена на пять равных частей. Вследствие этого густота намотки компенсирующих обмоток равны друг другу и равны 12,5 витков/см. В случае густой намотки для этого требуется диаметр провода $10 \cdot 12,5 = 0,8$ мм. Проводом с таким диаметром были изготовлены все десять обмоток.

По рисунку 12 можно отсчитывать, где должны начинаться эти маленькие обмотки. Расстояния, измеренные от торца катушки по порядку следующие: 8,25 см, 5,35 см, 3,40 см, 1,95 см и 0,8 см.

На основании вышеизложенного можно изготовить катушки и в результате последовательного включения слоев можно создать заданное магнитное поле. Измерение параметров изготовленной катушки будет рассматриваться в следующем пункте.

Здесь отметим, еще, что в случае отдельного вывода выводов каждого слоя катушки, изготовленной таким образом, имеется возможность создавать магнитные поля, имеющие отличающиеся друг от друга формы. Если правосторонняя компенсирующая обмотка включается последовательно с основной обмоткой с одинаковыми направлениями намотки, а левостороннюю компенсирующую обмотку — навстречу, тогда получим магнитное поле, изображенное на рисунке 13а.

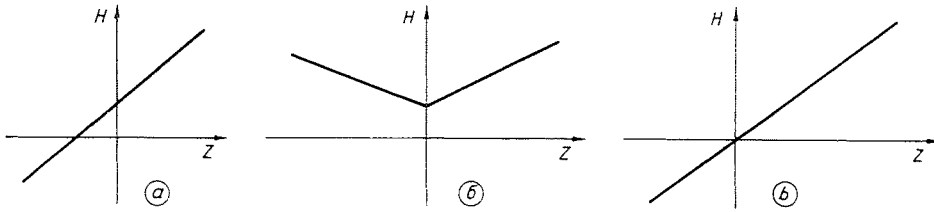


Рис. 13

Если выбрать это же самое направление катушки, но основная обмотка вовсе не включается, создается поле, изображенное на рисунке 13в. Если включить основную обмотку с таким же направлением катушки как и правосторонние маленькие обмотки и с таким же направлением катушки включаются и левосторонние слои, тогда создается поле, изображенное на рисунке 13б. Каждое из них может являться решением отдельной задачи.

7. Измерение параметров изготовленной катушки

Катушка, которая была рассчитана методом, изложенным в предыдущем пункте, была изготовлена, а также были произведены измерения для контроля того, что созданное магнитное поле действительно ли является линейным. В настоящей главе рассмотрим метод измерений и полученные результаты.

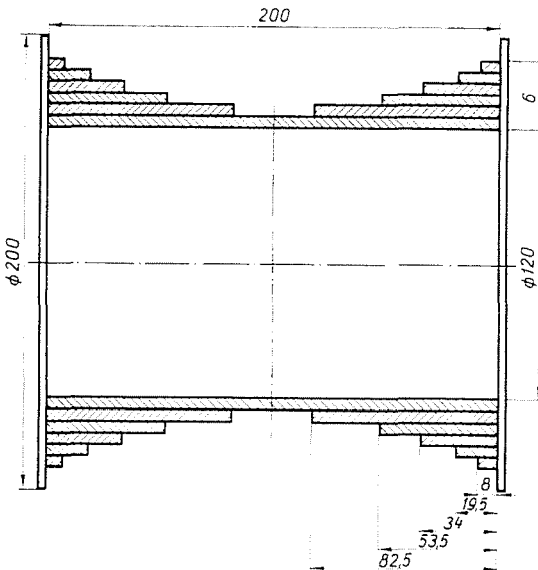


Рис. 14

Чертеж изготовленной катушки приведен на рисунке 14, причем толщина слоя изображена без соблюдения масштабов, а фотография катушки приведена на рисунке 15.

Измерение магнитного поля, создаваемого катушкой, может производиться на основании нескольких методов.

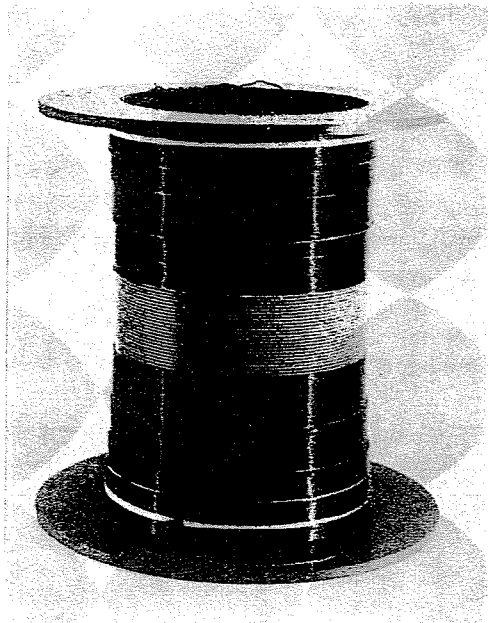


Рис. 15

1. Баллистическим гальванометром (флюксметром). В этом случае внутри измеряемой катушки размещается подвижная относительно небольшая измерительная катушка и измеряется ее напряжение при повороте маленькой катушки или при включении и выключении тока большой катушки.

2. С помощью генератора Холла можно измерять магнитное поле в каждой точке непосредственно.

3. Измерением переменным током. При этом методе к зажимам большой катушки подключается переменное напряжение и с помощью маленькой измерительной катушки измеряется индуцированное напряжение в каждой точке.

Так как метод 1) является затруднительным и медленным, а генераторы Холла не пригодны для измерения таких относительно слабых полей, во время измерения катушки был применен метод 3).

Была изготовлена измерительная катушка небольших размеров с числом витков 75 и сопротивлением постоянному току 75 ом. Чертеж этой катушки приведен на рисунке 16.

Сразу в начале измерений возникает вопрос об измерительной частоте. В случае применения очень низкой частоты напряжение, возникающее на зажимах измерительной катушки, будет весьма низким, и это затрудняет измерения. Если частота очень высокая, тогда может оказаться, что вследствие большого сопротивления генератор не может обеспечивать достаточно

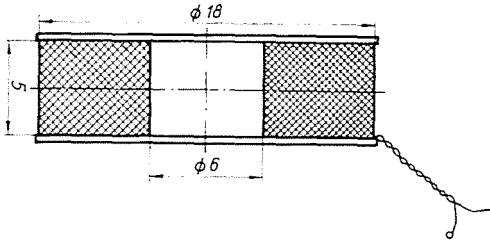


Рис. 16

большой ток через катушку и индуцированное напряжение вследствие этого будет низкое. Кроме этого на некоторой частоте вследствие емкости между витками катушки может возникнуть резонансное явление, приводящее к погрешностям измерений. Поэтому при поддержании значения напряжения на зажимах большой катушки постоянным была снята характеристика зависимости напряжения маленькой катушки от частоты. Для этого была получена кривая, изображенная на рисунке 17 — при этом может оказаться отличие в постоянном множителе в зависимости от поло-

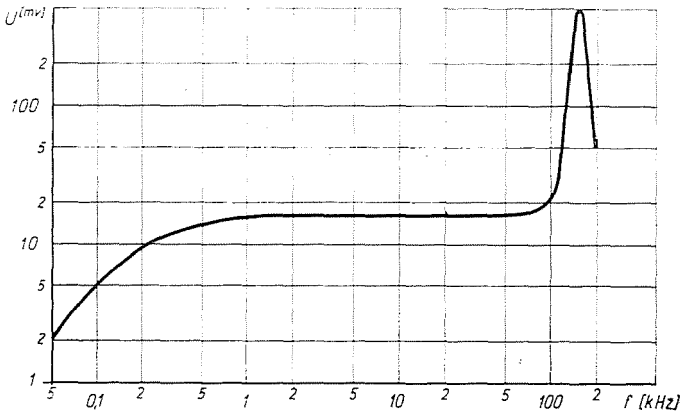


Рис. 17

жения измерительной катушки. Хорошо виден резонанс, возникший на частоте вблизи 170 кгц.

Таким образом, целесообразно производить измерения на частоте около 5 кгц потому, что при этом возможное колебание частоты генератора практически не приводит к погрешностям измерений.

Частотную зависимость напряжения, возникающего на зажимах измерительной катушки, легко можно определить.

Если значение напряжения U_1 , подаваемого на зажимы большой катушки, постоянное, а R_1 — активное сопротивление и L_1 — индуктивность большой катушки также можно считать постоянным, тогда напряжение, возникающее на зажимах измерительной катушки, выражается следующим образом:

$$\bar{U}_2 = j\omega L_{12} I_1 = \frac{j\omega L_{12} U_1}{R_1 + j\omega L_1}, \quad (81)$$

где L_{12} — коэффициент взаимной индукции двух катушек.

Напряжение, измеряемое прибором, равно:

$$U_2 = |\bar{U}_2| = \frac{\omega L_{12} U_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}. \quad (82)$$

Если ω малое, это напряжение имеет следующее значение:

$$U_2 \approx \frac{\omega L_{12} U_1}{R_1} = k_1 \omega, \quad \omega L_1 \ll R_1 \quad (83)$$

а, если ω большое, тогда

$$U_2 \approx \frac{\omega L_{12} U_1}{\omega L_1} = k_2, \quad \omega L_1 \gg R_1 \quad (84)$$

то есть в случае низких частот напряжение на выходе является линейной функцией частоты, а на более высоких частотах напряжение в принципе не зависит от частоты. Эта закономерность наглядно представлена и на рисунке 17.

Для измерений было изготовлено устройство из плексиглаза, на котором можно было укрепить измерительную катушку. С помощью этого устройства можно было плавно перемещать измерительную катушку в двух направлениях (z и r). Это перемещающее устройство укрепляется на большой катушке с помощью трех винтов. Это обеспечивает возможность и быстрой замены измеряемых катушек. Перемещающее устройство, укрепленное на большой катушке, изображено на фотографии рисунка 18. Таким

образом, можно снять кривую магнитного поля в зависимости от координат z и r как внутри катушки, так и вне ее.

Таким образом была заснята характеристика изменения напряженности магнитного поля вдоль оси z и была получена кривая, изображенная на рисунке 19. Если учесть, что прибор, измеряющий напряжение измерительной катушки, не был фазочувствительным, тогда рисунок 20,

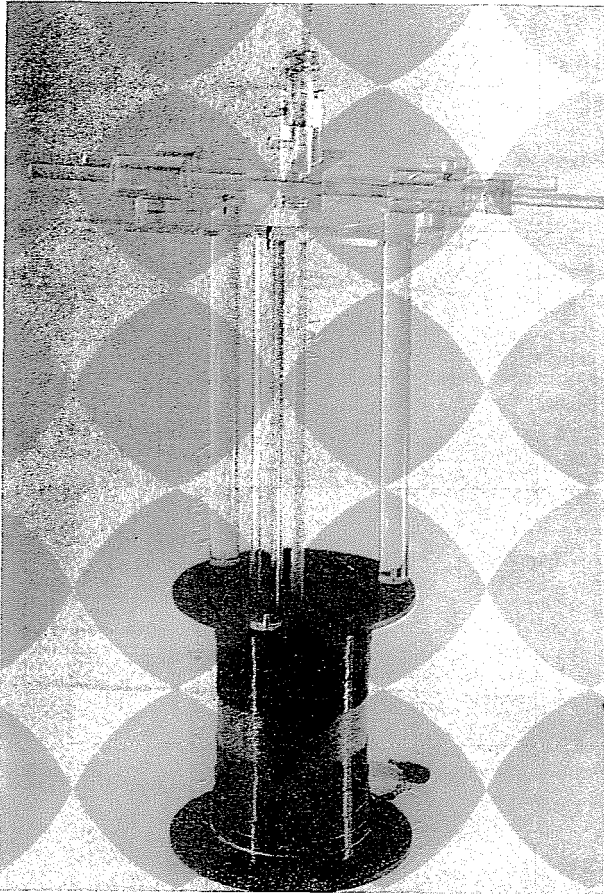


Рис. 18

изображающий истинное изменение напряженности магнитного поля, получается из предыдущего таким образом, что ординаты, лежащие налево от точки минимума кривой, откладываются в обратном направлении. Из этой диаграммы видно, что симметрично относительно центра катушки (указан стрелкой) на относительно большом участке изменение магнитного поля действительно линейное — согласно требованию.

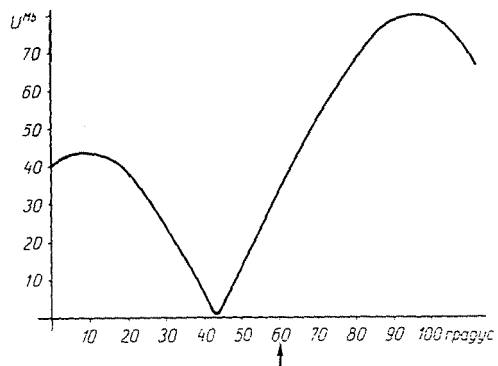


Рис. 19

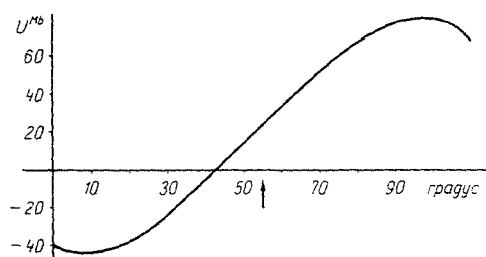


Рис. 20

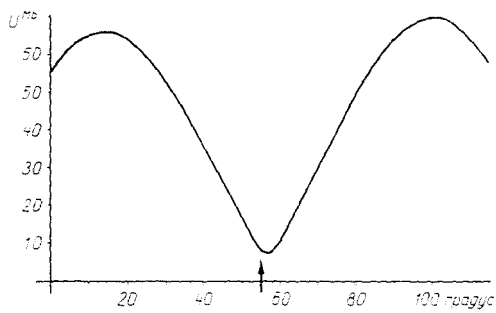


Рис. 21

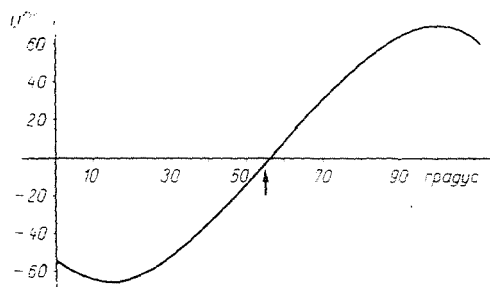


Рис. 22

Если согласно изложенным относительно рисунка 13в не включить основную обмотку, тогда в результате измерений получим закон изменения напряжения, изображенный на рисунке 21, который соответствует линейному изменению магнитного поля, изображенному на рисунке 22.

Таким образом, можно сделать заключение, что измерения подтвердили теорию, магнитное поле, созданное катушкой удовлетворяло требованиям.

Теперь вкратце рассмотрим, какие теоретические и практические погрешности могли возникнуть.

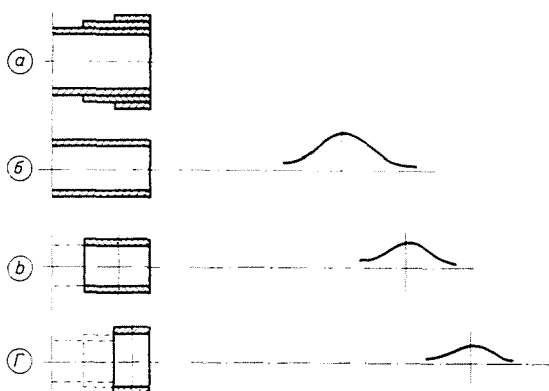


Рис. 23

Так как вся теория обоснована на аппроксимации рядом Тейлора, созданная напряженность магнитного поля лучше всего приближает создаваемое поле вблизи центра катушки, а на краях катушки возникают изменения, отклоняющиеся согласно рисункам 20 и 22. Кроме погрешности разложения в ряд погрешности возникают и вследствие аппроксимации функции $f(\xi)$, полученной по ходу расчетов, с помощью ступенчатой кривой. () всех этих теоретических погрешностях можно получить наглядную картину и ожидаемое магнитное поле рассчитанной многослойной катушки можно определить следующим методом. Трехслойную катушку, изображенную на рисунке 23а, можно составить из трех однослойных катушек с равномерными шагами намотки, изображенных на рисунках б, в и г. Диаметры этих катушек одинаковы и их центры смещены друг относительно друга на расстояния, полученные в результате расчетов. (Для более точных расчетов можно учитывать и увеличение диаметра.) Так как магнитное поле колоколообразной формы составляющих катушек можно рассчитать известным методом, поле, создаваемое полной катушкой, можно определить численно или графически из отдельных колоколообразных кривых.

Это магнитное поле будет создано рассчитанной катушкой. Очевидно, это поле не совпадает с полем, подлежащим синтезу, ведь аппроксимация

рядом Тейлора означает только приближение. Таким образом, с помощью этого метода можно оценить «теоретическую» погрешность синтеза. Однако, расхождение между магнитным полем, сложным вышеописанным методом, и магнитным полем, полученным в результате измерений, является погрешностью «изготовления».

В заключение, здесь, хотелось бы выразить благодарность кандидату технических наук доценту др. ДЁРДЮ ФОДОРУ, который своими советами и указаниями оказал мне очень ценную помощь во время моей работы.

Резюме

Работа занимается вопросом, как можно с помощью прямой катушки круглого сечения (соленоида), создавать магнитное поле с заданным изменением вдоль оси катушки. В работе дается метод синтеза магнитного поля вдоль оси катушки. В работе дается метод синтеза магнитного поля вдоль продольной оси катушки, но имеется короткое указание и на то, как можно определить напряженность поля в некоторой точке, лежащей вне оси, если известна напряженность поля вдоль оси. По описанному методу синтез осуществляется таким путем, что намотка производится не равномерно, а соответственно заданному закону изменения напряженности поля с переменным шагом намотки. В работе как заданная напряженность поля, так и закон изменения широты намотки представляются в виде полиномов Тейлора, в котором для теоретических расчетов берется член соответствующей степени, а для практических конструктивных расчетов берется член соответствующей степени и учетом членов до третьей степени.

Литература

1. Бадалян: Получение постоянных магнитных полей заданной формы с помощью неявнополюсной магнитной системы. Журнал Технической Физики **33**, 345. (1963).
2. BEUERLE: Archiv für Elektrotechnik. **25**, 269 (1931).
3. VJEZIKOVICS: Közéltő számítások. Tankönyvkiadó. Bp. 1952.
4. FODOR GYÖRGY: Kvázistacionárius terek. Tankönyvkiadó. Bp. 1954.
5. GARRETT: Axially symmetric systems for generating and measuring magnetic fields. Journal of Applied Physics. **22**, 1091 (1951).
6. GLASER: Über die zu einem vorgegebenem Magnetfeld gehörende Windungsdichte einer Kreisspule. Zeitschr. Phys. **118**, 264 (1941).
7. Глазер: Основы электронной оптики. Москва 1957 г.
8. GRAY: Absolute Measurements in Electricity and Magnetism. 2nd ed. p. 210.
9. Явор—Силادي: Создание однородного магнитного поля прямоугольным соленоидом конечной длины. Приборы и техника эксперимента. 1961 г. № 1.
10. Кельман—Явор: Электронная оптика. Москва—Ленинград. 1963 г.
11. Крисюк—Латышев: Компенсация магнитного поля земли. Изв. Акад. Наук СССР. Сер. Физ. **22**, 976 (1958).
12. LYDDANE-RUARK: Coils for the Production of a Uniform Magnetic Field. Rev. Sci. Instr. **10**, 253 (1939).
13. MC KECHAN: Rev. Scient. Instrum. **7**, 150. (1936).
14. MEYER ZUR CAPELLEN: Integraltafeln. Springer Verlag. Berlin. 1950.
15. RETTER, G.: Mágneses terek és körök. Tankönyvkiadó. Bp. 1952.
16. ROSA: Bulletin of the Bureau of Standards. **2**, 71 (1906), and **3**, 209 (1907).
17. RÓZSA, P.: Matematika. Országos Atomenergia Bizottság kiadása. Bp. 1960.
18. RUARK-PETERS: Helmholtz coils for producing uniform magnetic fields. Opt. Soc. America. **13**, 205 (1926).
19. SCOTT: Compensation of the Earth's Magnetic Field. Rev. Sci. Instr. **28**, 270 (1957).
20. SIMONYI, K.: Elméleti villamosságтан. Tankönyvkiadó. Bp. 1960.
21. SIMONYI, K.: Villamosságтан. Akadémiai Kiadó. Bp. 1964.
22. URBANEK, J.: Bevezetés a műszaki elméleti villamosságтанba. Tankönyvkiadó. Bp. 1952.

Gábor Gonda. Budapest, XI., Egry József u. 18—20. Венгрия.