# ÜBER NULLFREIE BEREICHE VON POLYNOMEN

Von

T. FARAGÓ

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 23. September 1963)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. FENYŐ

Es sei $f(z) = a_0 z^{\alpha_n} + \sum_{k=e}^{n} a_k z^{\alpha_{n-k}}$, worin $a_0$ und $a_k$ komplexe Zahlen sind, während $1 \leqq e < n$, $a_0\, a_e\, a_n \neq 0$, $0 = \alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_n$.
Führt man die Bezeichungen

$$|z| = r\,, \qquad \left|\frac{a_k}{a_0}\right| = A_k\,, \qquad k = e, \ldots n\,.$$

ein, so gibt es, wie bekannt, eine untere bzw. obere Schranke: $k$, $K$,

$$0 < k \leqq K,$$

an der $|f(z)| > 0$ wird, wenn $|z| < k$ oder $|z| > K$.
Es ist nämlich

$$|f(z)| \geqq |a_0|\,|z|^{\alpha_n} - \sum_{k=e}^{n} |a_k|\,|z|^{\alpha_{n-k}} = |a_0|\left[r^{\alpha_n} - \sum_{k=e}^{n} A_k r^{\alpha_{n-k}}\right] = |a_0|\, C(r)\,.$$

Hier ist $C(r)$ das sogenannte verallgemeinerte Cauchysche Polynom, das eine einzige positive Nullstelle $r_0$ $\big(C(r_0) = 0\big)$ aufweist; offenkundig ist ferner

$$|f(z)| > 0, \quad \text{wenn} \quad |z| > r_0\,,$$

die obige K-Schranke kann somit die positive Nullstelle (im weiteren nur »Nullstelle«) von $C(r)$ bzw. dessen beliebige obere Schranke sein.

Ähnlich stammt von CAUCHY (für den Fall positiver ganzer Exponenten) die Untersuchung der Ungleichung

$$|f(z)| \geqq |a_n| - |a_0|\,|z|^{\alpha_n} - \sum_{k=e}^{n-1} |a_k|\,|z|^{\alpha_{n-k}} =$$

$$= |a_n|\left[1 - \frac{1}{A_n} r^{\alpha_n} - \sum_{k=e}^{n-1} \frac{A_k}{A_n} r^{\alpha_{n-k}}\right] = |a_n|\, C'(r)\,.$$

Wenn $r_0'$ die positive Nullstelle des Polynoms $C'(r)$ ist, so kann die gesuchte Schranke $k$ offenbar $r_0'$ bzw. dessen beliebige positive untere Schranke sein.

Da man aus dem Polynom $C'(r)$ durch Substitution von $r = \frac{1}{\varrho}$ und durch Heraushebung von $\varrho^{a_n}$ ein Polynom erhalten kann, dessen Struktur dem des $C(r)$ ähnlich ist, befassen wir uns im folgenden nur mit der Nullstelle des Polynoms $C(r)$ bzw. mit dessen oberen Schranken, d. h. wir untersuchen das im Titel angegebene Problem mit Hilfe des Cauchyschen Polynoms bloß anhand des bekannten Absolutwertes der Koeffizienten.

Es soll auch ein Satz aufgestellt werden, der es gestattet, Schranken eines gewissen Typus zu verfeinern. Die Anwendung dieses Satzes wird eine Verschärfung bzw. Verallgemeinerung einiger bekannter Schranken ermöglichen.

## Über die oberen Schranken der Nullstelle von C(r)

Wie gezeigt, ist

$$C(r) = r^{a_n} - \sum_{k=e}^{n} A_k r^{a_n - k}.$$

Führt man die Bezeichnung $\sum_{k=e}^{n} A_k = S$ ein, so ergibt sich $C(1) = 1 - S$. Es ist zu untersuchen, welche Schranke $R$ der Nullstelle von $C(r)$ sich bei verschiedenen Werten von $S$ ergibt.

1. $S > 1$, also $r_0 > 1$. Bei $r > 1$ wird $r^{a_{n-e}} \geqq r^{a_{n-k}}$, $k = e, \ldots n.$, d. h. $Sr^{a_{n-e}} > \sum_{k=e}^{n} A_k r^{a_{n-k}}$ bzw. $C(r) > r^{a_n} - S r^{a_{n-e}}$, wenn also $r \geqq R = S^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}}$, dann ist $C(r) > 0$.

2. $S = 1$, also $r_0 = 1$. Wenn $r > R = 1$, so ist $C(r) > 0$.

3. $S < 1$, also $r_0 < 1$, wenn also $r \geqq R = 1$, so wird $C(r) > 0$. Ist $r < 1$, so ergibt sich nach ähnlicher Überlegung $C(r) > r^{a_n} - S$ bzw. wenn $r \geqq R = S^{\frac{1}{a_n}}$, ist $C(r) > 0$. Freilich können bei gründlicherer Betrachtung der Struktur von $C(r)$ auch Schranken gefunden werden, die besser sind als die obigen.

Die eine Art, obere Schranken zu gewinnen, ist folgende: Zum gegebenen Polynom $C(r)$ wird bei $r > 0$ ein von unten angenähertes Polynom

$$C_i(r) = r^{a_n} - \sum_{k=e}^{n} B_k r^{a_n - k},$$

konstruiert, für dessen Koeffizienten die Ungleichungen

$$B_k \geqq A_k, \qquad k = e, \ldots n. \tag*{$F_1./$}$$

$$\sum_{k=e}^{n} B_k > \sum_{k=e}^{n} A_k, \tag*{$F_2./$}$$

gelten. Offenbar ist $C(r) > C_i(r)$, wenn $r > 0$, d. h. die Nullstelle von $C_i(r)$ bzw. deren obere Schranke ist zugleich auch die obere Schranke der Nullstelle von $C(r)$.

Zu suchen sind im weiteren den obigen Bedingungen entsprechende Koeffizienten $B$, bei deren Kenntnis sich eine verhältnismäßig gute obere Schranke oder geradezu die Nullstelle von $C_i(r)$ leicht ergibt.

Mit der Verfeinerung der aus den Polynomen $C_i(r)$ resultierenden Schranken, hängt der folgende Satz zusammen:

**Satz**

Ist ein Wert $R$ bekannt, bei dem $C_i(R) \geqq 0$, so kann mit den bekannten Werten $C_i(R)$ und $C(R)$ ein $C_i'(r)$ Polynom

$$C_i'(r) = r^{a_n} - \sum_{k=e}^{n} \frac{B_k}{\mu} r^{a_{n-k}}, \qquad \mu = 1 + \frac{C(R) - C_i(R)}{R^{a_n}} > 1\,,$$

angegeben werden, für das, sofern $0 < r < R$, $C(r) > \mu\, C_i'(r)$ ist, (selbstverständlich ist $C_i'(r) > C_i(r)$). Dies besagt, daß die Nullstelle $r_{i_0}'$ von $C_i'(r)$ eine bessere obere Schranke der Nullstelle $r_0$ von $C(r)$ darstellt als die Nullstelle $r_{i_0}$ von $C_i(r)$.

**Beweis**

$C(r) = r^{a_n} - \sum_{k=e}^{n} B_k r^{a_{n-k}} + \sum_{k=e}^{n} (B_k - A_{kn})\, r^{a_{n-k}}$. Es seien $0 < r < R$, dann ist $\frac{1}{r^{a_n - a_{n-k}}} > \frac{1}{R^{a_n - a_{n-k}}}$, und weiter $r^{a_{n-k}} = r^{a_n} \frac{1}{r^{a_n - a_{n-k}}} > \frac{r^{a_n}}{R^{a_n - a_{n-k}}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{a_n} R^{a_{n-k}}$. Da $B_k - A_k \geqq 0$, ist $(B_k - A_k)\, r^{a_{n-k}} \geqq (B_k - A_k) \left(\frac{r}{R}\right)^{a_n} R^{a_{n-k}}$ und somit $\sum_{k=e}^{n} (B_k - A_k)\, r^{a_{n-k}} > \left(\frac{r}{R}\right)^{a_n} \cdot \sum_{k=e}^{n} (B_k - A_k)\, R^{a_{n-k}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{a_n} [C(R) - C_i(R)]$. Demnach gilt $C(r) > r^{a_n} - \sum_{k=e}^{n} B_k r^{a_{n-k}} + \left(\frac{r}{R}\right)^{a_n} [C(R) - C_i(R)] = r^{a_n} \left[1 + \frac{C(R) - C_i(R)}{R^{a_n}}\right] - \sum_{k=e}^{n} B_k r^{a_{n-k}} = \mu\, C_i'(r)$, worin $C_i'(r) = r^{a_n} - \sum_{k=e}^{n} \frac{B_k}{\mu} r^{a_{n-k}}$, $\mu = 1 + \frac{C(R) - C_i(R)}{R^{a_n}}$.

Da, wie gezeigt, sofern $r > 0$, $C(r) > C_i(r)$ wird $\mu > 1$.

Wie man sieht, vereinfacht sich die Rechnung, wenn die Bestimmung der Nullstelle von $C_i(r)$ gelingt, denn in diesem Fall ist zur Berechnung von $\mu$ nur die Kenntnis von $C(R)$ erforderlich.

## Anwendung des Satzes

Der erste Teil der Anwendungen soll von Schranken handeln, die so gewonnen werden, daß die Koeffizienten $B$ eine monotone Folge bilden, der zweite Teil hingegen von Schranken, die mittels Parametern erstellt wurden. Im ersten Teil ist

$$a_k = k, \ k = e, \ldots n.$$

### *I.1. Die Koeffizienten B sind einander gleich*

Es seien $\max A_k = m, \ k = e, \ldots n$, ferner $B_e = B_{e+1} = \ldots = B_n = m$. In diesem Falle ist die Bedingung $F_1$ erfüllt, demnach wird

$$C_i(r) = r^n - m\,[r^{n-e} + r^{n-e-1} + \ldots + 1]\,.$$

$$\text{Wenn } m = \frac{1}{n}, \text{ so ist } r_{io} = 1\,,$$

$$\text{wenn } m > \frac{1}{n}, \text{ so ist } r_{io} > 1\,,$$

$$\text{wenn } m < \frac{1}{n}, \text{ so ist } r_{io} < 1\,.$$

Im weiteren werden hier nur Schranken gesucht, die größer sind als Eins, das Polynom $C_i(r)$ wird also nur für den Fall $r > 1$ untersucht.

$$(r-1)\,C_i(r) = r^{n+1} - r^n - mr^{n+1-e} + m\,.$$

$a.)\ e = 1\,.$

$(r-1)\,C_i(r) = r^{n+1} - (1+m)\,r^n + m$; demnach ist

$C_i(r) > 0$, wenn $r \geqq R = 1 + m$, und somit

$C(r) > 0$, wenn $r \geqq R = 1 + \max A_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$.

Diese Schranke kommt bereits bei Cauchy, ja schon bei Rolle vor [3]*.

Sie kann folgendermaßen verschärft werden: Man betrachte zunächst das Polynom

$(r-1)\,C_i(r) = r^{n+1} - (1+m)\,r^n + m$ für den Fall $r < 1 + m$.

Da $1 > \dfrac{r}{1+m}$, wird $m > m\left(\dfrac{r}{1+m}\right)^{n-1}$, das heißt

$(r-1)\,C_i(r) > r^{n+1} - (1+m)\,r^n + \dfrac{m}{(1+m)^{n-1}}\,r^{n-1}$, und somit

$$C_i(r) > 0, \text{ wenn } r \geqq R' = \frac{1}{2}\left[1 + m + \sqrt{(1+m)^2 - \frac{4\,m}{(1+m)^{n-1}}}\right].$$

* S. das Schrifttumverzeichnis.

Die Verfeinerung dieser Schranke auf Grund unseres Satzes (im weiteren ist bei Anwendung unseres Satzes stets vorausgesetzt, daß die Bedingung $F_2$. erfüllt ist) zeigt folgendes Bild:

$$C(r) > 0,\ \text{wenn}\ r \geqq R_1' = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{m}{\mu} + \sqrt{\left(1+\frac{m}{\mu}\right)^2 - \frac{4m}{\mu\cdot\left(1+\frac{m}{\mu}\right)^{n-1}}}\right], \quad \text{wo}$$

$$\mu = 1 + \frac{C(1+m)-1}{(1+m)^n},$$

und für verfeinerte $R$ gilt

$$R_1 = 1 + \frac{m}{\mu}$$

$\beta$,) $e \geqq 2$. Es sei $r > 1$.
$r^{n-1} \geqq r^{n+1-e}$, $-mr^{n+1-e} \geqq -mr^{n-1} > -mr^n$, es wird daher
$(r-1)\,C_i(r) \geqq r^{n+1} - r^n - mr^{n-1} + m > r^{n+1} - (1+m)\,r^n + m$.

Zu untersuchen ist also das Polynom

$r^{n+1} - r^n - mr^{n-1} + m$ im Intervall $1 < r < 1 + m$.

Da $m > \dfrac{m}{(1+m)^{n-1}} \cdot r^{n-1}$, wird

$$r^{n+1} - r^n - mr^{n-1} + m > r^{n+1} - r^n - \left[m - \frac{m}{(1+m)^{n-1}}\right]\cdot r^{n-1}, \text{ und somit}$$

$$C(r) > 0,\ \text{wenn}\ r \geqq R' = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4\left(m - \frac{m}{(1+m)^{n-1}}\right)}\right].$$

Hieraus ergibt sich die weniger scharfe, aber einfachere Schranke $R = 1 + \sqrt{m}$. (Wenn $m < 1$, dann ist $1 + m$ die schärfere Schranke.) Die Verfeinerung der beiden Schranken geschieht ähnlich wie oben, indem in die Formeln der beiden Schranken an Stelle von $m$ der Bruch $\dfrac{m}{\mu}$ eingesetzt wird.

*Bemerkung.* Ein dem obigen angenäherten Polynom strukturell ähnliches Polynom kann auch so konstruiert werden, daß die ermittelte Schranke gerade auf die Nullstelle des angenäherten Polynoms fällt. Diese Konstruktion kann folgendermaßen geschehen:

Es sei $m = \max\,[A_e, \ldots A_{n-1}, A_n - 1]$, ferner sei
$B_e = B_{e+1} = \ldots = B_{n-1} = m$, $B_n = 1 + m$. In diesem Falle wird
$C_i(r) = r^n - m\,[r^{n-e} + \ldots + 1] - 1$.
Offenbar wird $C_i(1+m) = 0$, d.h. $C(r) > 0$, wenn $r > R = 1 + m$.
Führt man zur Bestimmung von $\mu_1$ die Größe $c$, dann wird

$$C(r) = r^n - m\,[r^{n-e} \ldots + 1] - 1 - c + \sum_{k=e}^{n} (m - A_k)\,r^{n-k} + 1 + c.$$

Nun kann das im Beweis unseres Satzes angegebene Verfahren angewendet und $c$ so angenommen werden, daß $\mu_1 = 1 + c$ wird.

Dann ergibt sich $\mu_1 = 1 + \dfrac{C(1+m)}{(1+m)^n - 1}$.

Hebt man diesen Ausdruck aus dem angenäherten Polynom heraus, so gelangt man zu einem mit $C_i(r)$ identischen Polynom, in dem nur an Stelle von $m$ der Bruch $\dfrac{m}{\mu_1}$ steht. Solcherart wird $C(r) > 0$, wenn $r \geqq R_1 = 1 + \dfrac{m}{\mu_1}$.

*I.2. Die Koeffizienten B bilden eine arithmetische Folge*

Es sei $d = \max \dfrac{A_k - A_e}{k - e}$, $k = e + 1, \ldots n$. Die Bedingung $F_1$ ist erfüllt, wenn $B_k = B_e + (k - e)\,d$.

Ist $d = 0$, so hat man den im vorangegangenen Absatz besprochenen Fall vor sich, ist dagegen $d < 0$, dann erhält man mit 0 an Stelle von $d$ ein angenähertes Polynom, dessen Nullstelle größer ist als die bei negativem $d$ anfallende, so daß die im vorstehenden Absatz besprochenen Schranken auch in diesem Fall entsprechen. Im folgenden ist daher nur der Fall von $d > 0$ zu erörtern. Zunächst gilt

$$C_i(r) = r^n - [B_e r^{n-e} + (B_e + d)\, r^{n-e-1} + \ldots + B_e + (n-e)\,d]\,.$$

Sodann sei $r > 1$. Dann wird

$$(r-1)^2 C_i(r) = r^{n+2} - 2\, r^{n+1} + r^n - B_e r^{n+2-e} + (B_e - d)\, r^{n+1-e} + \\ + [B_e + (n - e + 1)\, d]\, r - [B_e + (n-e)\, d]\,.$$

$\alpha$) $e = 1$.

$$(r-1)^2 C_i(r) = r^{n+2} - (2 + B_1)\, r^{n+1} + (1 + B_1 - d)\, r^n + \\ + (B_1 + nd)\, r - [B_1 + (n-1)\, d]\,.$$

Da $r > 1$ ist, wird $(B_1 + nd)\, r > B_1 + (n-1)\, d$, d. h.

$(r-1)^2 C_i(r) > r^{n+2} - (2 + B_1)\, r^{n+1} + (1 + B_1 - d)\, r^n$, und somit

$C(r) > 0$, wenn $r \geqq R = \dfrac{1}{2}\,[2 + B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4d}\,]$.

Hieraus kann die weniger scharfe, aber einfachere Schranke

$$R' = 1 + B_1 + \sqrt{d}$$

gewonnen werden.

$R$ läßt sich folgendermaßen schärfer gestalten:

Da $r > 1$ ist, wird auch $-[B_1 + (n-1)\, d] > -[B_1 + (n-1)\, d]\, r$,

und somit $(B_1 + nd)\, r - [B_1 + (n-1)\, d] > d.r.$

Es sei $r < R = \frac{1}{2}[2 + B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4d}]$, somit $1 > \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}$,

$d \cdot r > \frac{d}{R^{n-1}} r^n$, d. h.

$$(r-1)^2 C_i(r) > r^{n+2} - (2 + B_1) r^{n+1} +$$
$$+ \left[1 + B_1 - d\left(1 - \frac{1}{R^{n-1}}\right)\right] r^n.$$ Demnach wird

$$C(r) > 0, \text{ wenn } r \geqq R'' = \frac{1}{2}\left[2 + B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4d\left(1 - \frac{1}{R^{n-1}}\right)}\right].$$

Zur Verfeinerung der obigen drei Schranken wird an Stelle von $B_1$ der Bruch $\frac{B_1}{\mu}$, an Stelle von $d$ der Bruch $\frac{d}{\mu}$ eingesetzt. Da die Folge $\frac{B}{\mu}$ gleichfalls eine arithmetische ist, geschieht die Erstellung der Schranke von $C_i'(r)$ auf gleiche Weise wie die der Schranke von $C_i(r)$ durch Vollzug der obigen Substitution.

$\beta.$) $e \geqq 2$, $r > 1$.

Da, wie gezeigt, $[B_e + (n-e+1)d]\, r - [B_e + (n-e)d] > 0$, ferner $-1 \geqq -(r)^{e-2}$, so ergibt sich $-B_e r^{n+2-e} \geqq -B_e r^n$ und demnach
$$(r-1)^2 C_i(r) > r^{n+2} - 2r^{n+1} + r^n - B_e r^{n+2-e} - (d - B_e) r^{n+1-e} \geqq$$
$$\geqq r^{n+2} - 2r^{n+1} + (1 - B_e) r^n - (d - B_e) r^{n+1-e}.$$

$\beta_1.$) $d - B_e > 0$, und somit $-(d - B_e) r^{n+1-e} > -(d - B_e) r^n$ bzw.
$(r-1)^2 C_i(r) > r^{n+2} - 2r^{n+1} + (1-d) r^n$. Demnach wird
$C(r) > 0$, wenn $r \geqq R = 1 + \sqrt{d}$.

$\beta_2.$) $d - B_e = 0$; in diesem Fall wird
$C(r) > 0$, $r \geqq R = 1 + \sqrt{B_e} = 1 + \sqrt{d}$.

$\beta_3.$) $d - B_e < 0$. Nach dem Gesagten genügt es, $r < 1 + \sqrt{B_e}$ zu untersuchen. In diesem Falle ist $(B_e - d) r^{n+1-e} > (B_e - d) r^{n+1-e} \frac{r^{e-1}}{(1+\sqrt{B_e})^{e-1}}$, und somit

$$(r-1)^2 C_i(r) > r^{n+2} - 2r^{n+1} + \left[1 - B_e + \frac{B_e - d}{(1+\sqrt{B_e})^{e-1}}\right] r^n \text{ bzw.}$$

$$C(r) > 0, \text{ wenn } r \geqq R = 1 + \sqrt{B_e - \frac{B_e - d}{(1+\sqrt{B_e})^{e-1}}}.$$

Die Verfeinerung der obigen Schranke auf Grund unseres Satzes erfolgt gemäß Punkt $\alpha.$), d. h. in die Formeln der Schranken ist an Stelle von $B_e$ der Bruch $\frac{B_e}{\mu}$, für $d$ der Bruch $\frac{d}{\mu}$ einzusetzen.

*I.3. Die Koeffizienten B bilden eine geometrische Folge*

Bekannt ist die folgende Erstellung von $C_i(r)$:

Es sei $q = \max A_k^{\frac{1}{k}}$, ferner $B_k = q^k$, $k = e \ldots n$. In diesem Fall erscheint die Bedingung $F_1$ erfüllt, und es wird

$C_i(r) = r^n - [q^e r^{n-e} + q^{e+1} r^{n-e-1} + \ldots + q^n]$. Da $r_{i_0} > q$, ist

der Fall $r > q$ zu untersuchen, und man hat

$(r - q)\, C_i(r) = r^{n+1} - qr^n - q^e r^{n+1-e} + q^{n+1}$.

$\alpha$.) $e = 1$.

$(r - q)\, C_i(r) = r^{n+1} - 2\, qr^n + q^{n+1}$. Offenkundig ist $r_{i_1} < 2\, q$, das Polynom ist also im Intervall $q < r < 2\, q$ zu untersuchen. Da hier

$1 > \dfrac{r}{2\, q}$, wird $q^{n+1} > \left(\dfrac{r}{2\, q}\right)^{n-1} q^{n+1} = \dfrac{q^2}{2^{n-1}}\, r^{n-1}$. Demnach ist

$(r - q)\, C_i(r) > r^{n+1} - 2\, qr^n + \dfrac{q}{2^{n-1}}\, r^{n-1}$, und es wird

$C(r) > 0$, wenn $r \geqq R = q\left[1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}\right]$.

Diese Schranke ist schärfer als die Schranke bei HEIGL [5]

$q\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

$\beta$.) $e \geqq 2$.

Da $-1 \geqq -\left(\dfrac{r}{q}\right)^{e-2}$ bzw. $-q^e \cdot r^{n+1-e} \geqq -q^e r^{n-1}$, da ferner — wie soeben gezeigt —, $q^{n+1} > \dfrac{q^2}{2^{n-1}}\, r^{n-1}$, ergibt sich

$(r - q)\, C_i(r) > r^{n+1} - qr^n - \left(q^2 - \dfrac{q}{2^{n-1}}\right) r^{n-1}$. Somit wird

$C(r) > 0$, wenn $r \geqq R' = \dfrac{q}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}\right]$.

Hieraus kann die weniger scharfe, aber einfachere Schranke

$$R'' = \frac{q}{2}\,[1 + \sqrt{5}]$$

gewonnen werden.

Auf Grund unseres Satzes läßt sich diese Schranke folgendermaßen verfeinern:

Die in diesem Absatz behandelten Schranken für $C_i(r)$ können für $C_i'(r)$ angewendet werden, wenn die Größe $q'$ eingesetzt wird, wobei

$$q' = \max\left(\frac{B_k}{\mu}\right)^{\frac{1}{k}} = \max \frac{q}{\mu^{\frac{1}{k}}} \text{ und offenkundig } q' = \frac{q}{\mu^{\frac{1}{n}}} \text{ ist.}$$

Die Verfeinerung der obigen Schranken erhält man somit, indem man in ihre Formeln statt q überall q′ setzt.

*Anmerkung.* Es ist möglich, ein dem vorstehenden angenäherten Polynom strukturell ähnliches $C_i(r)$ zu konstruieren, dessen Nullstelle bekannt ist.

Es sei $q = \max\left[A_1, A_2^{\frac{1}{2}} \ldots A_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{A_n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$, $B_k = q^k$, $k = 1, 2, \ldots n-1$, $B_n = 2\,q^n$.

Damit ist die Bedingung $F_1$ erfüllt. Das angenäherte Polynom ist

$C_i(r) = r^n - qr^{n-1} - \ldots - q^{n-1}r - 2\,q^n$.

Da $C_i(2\,q) = 0$, wird $C(r) > 0$, wenn $r > R = 2\,q$.

Das für die Anwendung unseres Satzes zu bestimmende $q'$ ist

$$q' = \max\left[\frac{q}{\mu}, \frac{q}{\mu^{\frac{1}{2}}} \ldots \frac{q}{\mu^{\frac{1}{n}}}\right]. \text{ Offenkundig gilt } q' = \frac{q}{\mu^{\frac{1}{n}}}, \quad \text{d. h.}$$

$$C(r) > 0, \text{ wenn } r \geqq R = \frac{2\,q}{\mu^{\frac{1}{n}}}.$$

## *II. Durch Parameter gegebene Schranken*

Von diesen Schranken sollen nachstehend nur zwei Typen erörtert werden.

### *II.1. Aufgliederung von C(r) in Binome*

*a)* $C(r)$ kann in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$C(r) = \sum_{k=e}^{n} (\lambda_k r^{a_n} - A_k r^{a_{n-k}}), \text{ wo } \sum_{k=e}^{n} \lambda_k = 1.$$

Es sei $\lambda_k > 0$, $k = e, \ldots n$, weiters werde die Bezeichnung

$$r_k = \left[\frac{A_k}{\lambda_k}\right]^{\frac{1}{a_n - a_{n-k}}}$$

eingeführt. Bei einem Parametersystem von fixierten $\lambda_e \ldots \lambda_n$ wird $C(r) > 0$, wenn $r > R = \max r_k$ ist.

Ist beispielsweise $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ und $a_k = k$, $k = 1,2, \ldots n$, wird $R' = \max [n A_k]^{\frac{1}{k}}$. Diese Schranke kommt auch schon bei Cauchy vor. Auf Grund unseres Satzes kann $R$ folgendermaßen verfeinert werden.
Es sei $B_k = \lambda_k R^{a_n - a_{n-k}}$, also $B_k \geqq A_k$, womit $F_1$ entsprochen ist. Demnach ist $\frac{B_k}{\mu} = \frac{\lambda_k R^{a_n - a_{n-k}}}{\mu}$. Unter Beibehaltung des gegebenen Parametersystems und unter Anwendung der vorstehenden Überlegungen auf

$C_i'(r)$ wird $r_k' = \left(\frac{B_k}{\mu\lambda_k}\right)^{\frac{1}{a_n - a_{n-k}}} = \frac{R}{\mu^{\frac{1}{a_n - a_{n-k}}}}$, demnach ist

$R'' = \max r_k' = \frac{R}{\mu^{\frac{1}{a_n}}}$, d. h.

es wird $C(r) > 0$, wenn $r \geqq \frac{R}{\mu^{\frac{1}{a_n}}}$.

$\beta)$ $C(r)$ kann auch in folgende Binome aufgelöst werden:

$$C(r) = r^{a_n} - [A_e + c_e] r^{a_n - e} + \sum_{k=e+1}^{n} \left[c_{k-1} r^{a_{n-k+1}} - (A_k + c_k) r^{a_{n-k}}\right], \text{ wenn } c_n = 0.$$

Es sei $c_k > 0$, $k = e \ldots n-1$. Weiters werden die Bezeichnungen

$$r_e = [A_e + c_e]^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}}, \qquad r_k = \left[\frac{A_k + c_k}{c_{k-1}}\right]^{\frac{1}{a_{n-k+1} - a_{n-k}}}; \qquad k = e+1, \ldots n$$

eingeführt.

Wählt man ein fixiertes System von $c_k$, so wird

$C(r) > 0$, wenn $r > R = \max [r_e, r_k]$.

Es sei z. B. $c_e = c_{e+1} = \ldots c_{n-1} = 1$, ferner $m = \max A_k$, $k = e, \ldots n$,

$d = \min [a_n - a_{n-e};\ a_{n-k+1} - a_{n-k}]$; $k = e+1, \ldots n$. In diesem Falle wird

$C(r) > 0$, wenn $r > R = [1 + m]^{\frac{1}{d}}$.

Ist $a_k = k$, $k = 1,2, \ldots n$, so ergibt sich der unter I erörterte Fall.

Es soll nun die Wahl eines Parametersystems gezeigt werden, bei dem $r_e$ das Maximum unter den $r$-Werten bleibt. Dadurch erhält man die Verschärfung und Verallgemeinerung eines Satzes von Carmichael-Walsh. Die Verschärfung (auf positive ganze Exponenten) hat schon GONCALVES [2] auf einem vom nachstehenden abweichenden Weg abgeleitet.

Wie bereits gezeigt, ist

$r_e = [A_e + c_e]^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}}$, woraus sich $r_e \geqq c_e^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}}$ ergibt. Man wähle $c_e$ folgendermaßen: Es sei

$$c_e^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}} = r_{e+1} = \left[\frac{A_{e+1} + c_{e+1}}{c_e}\right]^{\frac{1}{a_{n-e} - a_{n-e-1}}} . \text{ Daraus folgt}$$

$c_e = [A_{e+1} + c_{e+1}]^{\frac{a_n - a_{n-e}}{a_n - a_{n-e-1}}}$ und somit

$r_e = [A_e + (A_{e+1} + c_{e+1})^{\frac{a_n - a_{n-e}}{a_n - a_{n-e-1}}}]^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}}$. Offenkundig ist $r_e \geqq c_{e+1}^{\frac{1}{a_n - a_{n-e-1}}}$.

Ferner werde $c_{e+1}$ so gewählt, daß

$$c_{e+1}^{\frac{1}{a_n - a_{n-e-1}}} = r_{e+2} = \left[\frac{A_{e+2} + c_{e+2}}{c_{e+1}}\right]^{\frac{1}{a_{n-e-1} - a_{n-e-2}}} \text{ sei.}$$

Hieraus wird $c_{e+1} = [A_{e+2} + c_{e+2}]^{\frac{a_n - a_{n-e-1}}{a_n - a_{n-e-2}}}$

und somit $r_e = \left\{A_e + [A_{e+1} + (A_{e+2} + c_{e+2})^{\frac{a_n - a_{n-e-1}}{a_n - a_{n-e-2}}}]^{\frac{a_n - a_{n-e}}{a_n - a_{n-e-1}}}\right\}^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}}$

Verfährt man weiter ähnlich, dann zeigt sich, daß max $r_k = r_e$ ist, unter den gegebenen Bedingungen ergibt sich also

$C(r) > 0$, wenn

$$r \geqq R = r_e = \left[\left[\ldots[(A_n)^{\frac{a_n - a_1}{a_n}} + A_{n-1}]^{\frac{a_n - a_2}{a_n - a_1}} + \ldots + A_{e+1}\right]^{\frac{a_n - a_{n-e}}{a_n - a_{n-e-1}}} + A_e\right]^{\frac{1}{a_n - a_{n-e}}} .$$

Mit der bekannten Ungleichung erhält man die weniger scharfe, aber einfachere Schranke

$$R' = \sum_{k=e}^{n} A_k^{\frac{1}{a_n - a_{n-k}}} ,$$

die für positive ganze Exponenten mit der Schranke nach Carmichael-Walsh identisch ist.

## *II.2. Aufgliederung von C(r) in Trinome*

Es sollen vor allem folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$a'_n = a_n , \; a'_{n-e} = \frac{a'_n + a_{n-e}}{2}, \text{ allgemein } a'_{n-k} = \frac{a'_{n-k+1} + a_{n-k}}{2}, \; k = e+1, \ldots n$$

Mit diesen Bezeichnungen kann $C(r)$ wie folgt aufgeschrieben werden:

$$C(r) = r^{a_n} - h_e r^{a'_{n-e}} - A_e r^{a_{n-e}} + \sum_{k=e}^{n-1} (h_k r^{a'_{n-k}} - h_{k+1} r^{a'_{n-k-1}} - A_{k+1} r^{a_{n-k-1}}), \text{ wo } h_n = 0.$$

Es sei $h_k > 0$, ferner seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$r_e = \left[\frac{h_e + \sqrt{h_e^2 + 4A_e}}{2}\right]^{\frac{2}{a_n - a_{n-e}}}, \quad r_k = \left[\frac{h_{k+1} + \sqrt{h_k^2 + 4h_{k-1}A_k}}{2h_{k-1}}\right]^{\frac{2}{a'_{n-k+1} - a_{n-k}}},$$

$$k = e+1, \ldots n.$$

Bei einem fixierten Parametersystem $h_k$ ist die gesuchte Schranke

$$R = \max\,[r_e, r_k]\,.$$

Ist der Exponent $n = 2m$ eine positive ganze Zahl, so kann $C(r)$ auch in folgende Trinome aufgegliedert werden:

$$C(r) = \sum_{k=0}^{m-1} [c_k r^{2m-2k} - A_{2k+1} r^{2m-2k-1} - (A_{2k+2} + c_{k+1})\, r^{2m-2k-2}] \quad \text{wo}$$

$$c_0 = 1,\ c_m = 0.$$

Es sei $c_k > 0$, $k = 1,2, \ldots m-1$, weiters

$$r_k = \frac{A_{2k+1} + \sqrt{A_{2k+1}^2 + 4\,c_k(A_{2k+1} + c_{k+1})}}{2\,c_k}\,.$$

Bei fixiertem $c_k$-System ist $R = \max r_k$.
Ist $n = 2\,m + 1$, so kann $C(r)$ z.B. in folgende Trinome bzw. Binome aufgelöst werden:

$$C(r) = \sum_{k=0}^{m-1} [d_k r^{2m+1-2k} - A_{2k+1} r^{2m-2k} - (A_{2k+1} + d_{k+1})\, r^{2m-2k-1}] +$$

$$+ d_m r - A_{2m+1}, \qquad \text{wo} \quad d_0 = 1\,.$$

Bei fixiertem $d_k > 0$-System, ergibt sich, sofern

$$r_k = \frac{A_{2k+1} + \sqrt{A_{2k+1}^2 + 4\,d_k\,(A_{2k+2} + d_{k+1})}}{2\,d_k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots m-1,$$

und $\quad r_m = \dfrac{A_{2m+1}}{d_m}\,,$

ein $R = \max r_k$, $k = 1,2, \ldots m$.
Für beide Fälle ist die Schranke

$$R = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

gültig, wenn $a = \max\,[A_1, A_3 \ldots]$, $b = \max\,[A_2, A_4, \ldots]$.
Setzt man in $C_i(r)$ die $B$ mit geradem Index dem $a$, die $B$ mit ungeradem Index dem $b$ gleich, so ist leicht einzusehen, daß sich die obige Schranke auf Grund

unseres Satzes zu

$$R_1 = \frac{\frac{a}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 + 4\frac{b}{\mu}}}{2}$$

verfeinert.

Die Aufgliederung von $C(r)$ in Trinome ist auch auf andere Weise durchführbar. Die Verfeinerung der Schranken erfolgt ähnlich wie soeben gezeigt.

*Anmerkung zur annähernden Bestimmung der Nullstelle von $C(r)$*

1. Ist an der gefundenen $R$-Schranke $C(R) > 0$, so ist die Methode nach Newton—Raphson, wie leicht erkennbar, im Falle positiver ganzer Exponenten, sofern $R$ als Ausgangswert genommen wird, stets konvergent.

2. Gleichfalls stets konvergent ist die durch die Formel

$$R_{m+1} = \left[\sum_{k=e}^{n} A_k R_m^{a_{n-k}}\right]^{\frac{1}{a_n}}$$

ausgedrückte sukzessive Approximation, wenn $C(R_1) > 0$ ist, was sich folgendermaßen beweisen läßt:

Es sei die Bezeichnung

$$\sum_{k=e}^{n} A_k r^{a_{n-k}} = Q(r)$$

eingeführt. Offenbar ist

$$Q)r_1) > Q(r_2), \text{ wenn } r_1 > r_2 .$$

Angenommenerweise ist

$$C(R_1) = R_1^{a_n} - Q(R_1) > 0 . \text{ Es sei } [Q(R_1)]^{\frac{1}{a_n}} = R_2$$

und somit $C(R_1) = R_1^{a_n} - R_2^{a_n} > 0$, d.h. $R_1 > R_2$. Entsprechend ist

$$Q(R_2) = R_2^{a_n} - Q(R_2) = Q(R_1) - Q(R_2) > 0 . \text{ Es sei } [Q(R_2)]^{\frac{1}{a_n}} = R_3$$

und damit $R_2 > R_3$.

Durch Weiterführung des Verfahrens erhält man die monoton abnehmende, von unten beschränkte Folge $R_1, R_2, R_3 \ldots$, die demnach einen Grenzwert besitzt, so daß die vorstehende Iteration konvergent ist.

## Zusammenfassung

In den Untersuchungen zur Bestimmung der Schranken für die maximalen Absolutbeträge der Nullstellen von Polynomen spielt das sogenannte Cauchysche Polynom eine Rolle. Ein Teil dieser Schranken wird durch Einführung von Polynomen einfacherer Struktur gewonnen, die dem Cauchyschen Polynom von unten angenähert werden. Für Polynome, deren Exponenten nicht unbedingt ganze Zahlen sein müssen, gibt der Verfasser einen Satz an, durch dessen Anwendung sich gewisse Schrankentypen verfeinern lassen, wenn die Werte des Cauchyschen sowie des Annäherungspolynoms für diese Schrankenstelle bekannt sind. Die Anwendung des Satzes wird an einer Anzahl von Schranken demonstriert, die der Verfasser zum Teil schon zuvor einer Verschärfung unterzogen hat.

## Literatur

1. MARDEN, M.: The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complexvariable, New York, 1949.
2. GONCALVES, I. V.: Quelques limites pour les modules des zéros d'un polynome, Lisboa, 1957.
3. GONCALVES, I. V.: Recherches modernes sur limites des racines des polynomes, Lisboa, 1958.
4. SPECHT, W.: Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten, Stuttgart, 1958.
5. HEIGL, F.: Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Monatshefte f. M. 1958.

Dr. Tibor FARAGÓ, Budapest, XI., Sztoczek u. 2—4. Ungarn