

# ZUR FEHLERTHEORIE DES KORRELATORS UND SPEKTRALANALYSATORS BEI VERWENDUNG VON STATISTISCHEN TESTSIGNALEN\*

Von

F. H. LANGE und W. MÜLLER

(Eingegangen am 27. September 1963)

## 1. Einleitung

Die moderne Regelungstechnik und auch die Nachrichtentechnik bedienen sich in steigendem Maße der statistischen Breitbandsignale. In der Nachrichtentechnik machte CHARKEWITSCH [1] den Vorschlag, ein Frequenzband — also ein kontinuierliches Trägerspektrum — an Stelle der üblichen diskreten Trägerfrequenz auszustrahlen, um auf diese Weise den selektiven Schwund zu verringern. Ferner wurde von F. H. LANGE [2] ein Modulationsverfahren mit Rauschspannungen, die sogenannte Korrelationsabstands-Modulation vorgeschlagen, das vom Verfasser näher untersucht wurde [3]. Ein anderer Vorschlag von HORTON [4] sieht die Verwendung von Rauschen in der Meßtechnik, nämlich bei der Flugzeughöhenmessung vor. Über weitere Anwendungen in der Ortungstechnik berichtet LANGE [5]. In der Regelungstechnik gehen die Bestrebungen dahin, die Kennwerte von Regelungsanlagen mittels statistischer Methoden zu bestimmen, wie es von SOLODOWNIKOW—USKOW [9] vorgeschlagen wurde. Die Verwendung von statistischen Prüfsignalen hat den Vorteil, daß die Beanspruchung der Regelungsanlage, wie sie bei sinus- oder impulsförmigen Prüfsignalen gegeben ist, vermieden wird.

Allen Verfahren, die statistische Breitbandsignale benutzen, ist der Korrelator oder mindestens der Effektivwert-Messer als Auswertgerät gemeinsam. Nun setzt der Korrelator entsprechend der Definition der Korrelationsfunktion wie auch der Spektralanalysator nach der Multiplikation eine Integration im Zeitbereich voraus, die sich über den Bereich  $T \rightarrow \infty$  erstrecken soll. Diese Forderung läßt sich mit den zur Verfügung stehenden technischen Mitteln nur näherungsweise erfüllen. Andererseits kann aus anderen Gründen eine begrenzte Integrationszeit erforderlich sein. Damit tritt die Frage auf, welchen Einfluß die Kurzzeit-Integration auf die Messung

\* Prof. Dr. Ing. habil F. H. Lange, Direktor des Instituts für Fernmeldewesen und Hochfrequenztechnik an der Universität Rostock, verweilte im September 1963 als Gast der Technischen Universität Budapest in Ungarn. Er hielt am 27. September 1963 an der Universität einen Vortrag, der inhaltlich sich auf die hier mitgeteilte Arbeit stützte.

der Korrelationsfunktion hat, wobei es zunächst gleichgültig ist, ob es sich um die Kreuz- oder die Auto-Korrelationsfunktion handelt. Der Korrelator und der Spektralanalysator mit einem technisch realisierbaren Intigrierglied besitzen am Ausgang noch ein Restrauschen, dessen Berechnung Gegenstand dieser Arbeit sein soll.

Bild 1 zeigt die Kenngrößen, die von dem Restrauschen beeinflusst werden.

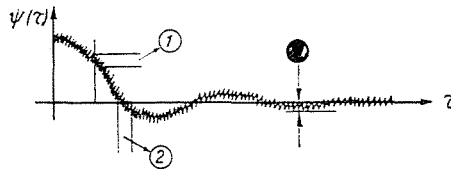


Bild. 1. Einfluß des Restrauschens

Warum wird der Effektivwert des Restrauschens berechnet?

Das Restrauschen hinter dem Integrationsfilter bestimmt:

1. den Fehler bei der Messung der Amplitude der Korrelationsfunktion- $\psi$ -Auswertung,
2. den Fehler bei der Messung des Nulldurchganges der Korrelationsfunktion- $\tau$ -Auswertung,
3. die untere Grenze des Signal/Rausch-Verhältnisses bei der Entdeckung von Signalen im Rauschen.

## 2. Untersuchung des Korrelators

Das Prinzipschaltbild eines Korrelators zeigt Bild 2. Die zu korrelierenden Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  werden auf die Multiplikator-Eingänge gegeben, wobei  $y(t)$  wählbar zeitverzögert wird. Das Ausgangssignal des Multiplikators  $z(t, \tau)$  wird nach Passieren des Integrationsfilters dem Anzeigeinstrument zugeführt. Zur Berechnung des Restrauschens  $u(t)$  hinter dem filter muß man zunächst das Rauschen hinter dem Multiplikator  $z(t)$  berechnen. Dabei wird der Multiplikator als Signalwandler aufgefaßt, wie er für diskrete Signale ja hinreichend bekannt ist. Weniger geläufig ist die Berechnung des Produktes zweier beliebig korrelierter, stationärer Rauschvorgänge. Das Ausgangssignal des Multiplikators  $z(t)$  enthält einen Gleichanteil, nämlich die Korrelationsfunktion  $\psi_{yx}(\tau)$  und einen reinen Schwankungsanteil mit dem Effektivwert  $\sigma_z$ . Das Ausgangssignal des Multiplikators  $z(t)$  wird beschrieben durch seine Autokorrelationsfunktion (AKF)  $\psi_z(\nu, \tau)$  oder das Leistungsspektrum  $S_{zz}(f, \tau)$ . Von dem Restrauschen  $u(t)$  am Filterausgang interessiert nur der Effektiv-

wert (Streuung)  $\sigma_u$ . Das Spektrum oder die AKF von  $u(t)$  wird nicht benötigt, da das Integrationsfilter ohnehin nur den schmalen Bereich von  $f = 0$  bis  $f = f_0$  (obere Grenzfrequenz des Filters) durchlassen soll.

Nachdem die interessierenden Kenngrößen zur Beschreibung der Signale nach Passieren der einzelnen Übertragungsabschnitte festgelegt sind, soll nun Bild 3 die Vorschrift zur Bestimmung dieser Kenngrößen angeben. Zur Analyse

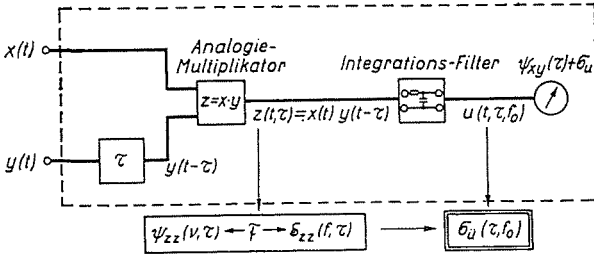


Bild. 2. Blockschaltbild des Korrelators mit gewählten Bezeichnungen

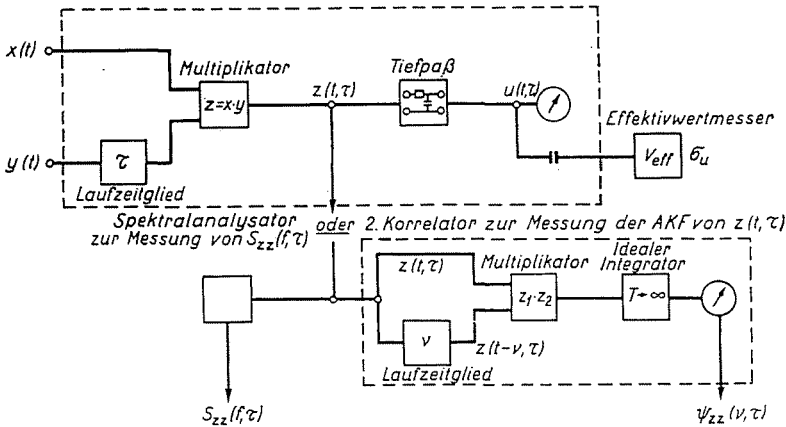


Bild. 3. Prinzipschaltung zur Analyse des Korrelators

des Multiplikator-Rauschens  $z(t)$  wird mithin ein 2. Korrelator benötigt, mit dem die AKF  $\psi_{zz}(v)$  des Multiplikator-Rauschens  $z(t)$  bestimmt wird. Dabei ist zu beachten, daß die AKF  $\psi_{zz}(v)$  eine Funktion der Verzögerungszeit  $v$  des 2. Korrelators ist, während die Verzögerungszeit  $\tau$  auf der Eingangsseite des 1. Korrelators nur als Parameter in  $\psi_{zz}$  auftritt. Natürlich sollen der 2. Korrelator und der Spektrograf als fehlerfrei angenommen werden, d. h. alle beteiligten Elemente sollen die geforderten idealen Eigenschaften besitzen. Statt des 2. Korrelators könnte man auch mit einem Spektral-Analysator

das Leistungsspektrum  $S_{zz}(f)$  messen. Auch hier tritt als Parameter die Zeitverzögerung auf der Eingangsseite des Multiplikators auf. Beide Kenngrößen, das Leistungsspektrum und die AKF, sind in ihrem Informationsgehalt als Fouriertransformierte gleichwertig.

### 3. Berechnung der AKF des Produktes zweier beliebig korrelierter statistischer Breitbandsignale

Entsprechend der Definition der AKF wird der zeitliche Mittelwert des Produktes von dem um  $\nu$  verzögerten und dem unverzögerten Multiplikator-Rauschen  $z(t)$  gebildet.

$$\psi_{zz}(\nu, \tau) = \overline{z(t, \tau) z(t - \nu, \tau)} \quad (1)$$

Da  $z(t)$  selber ein Produkt ist, ergibt sich die AKF  $\psi_{zz}(\nu, \tau)$  als Mittelwert eines viergliedrigen Produktes

$$\psi_{zz}(\nu, \tau) = \overline{x(t) y(t - \tau) x(t - \nu) y(t - \tau - \nu)}. \quad (2)$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist das Moment 4. Ordnung eines vierdimensionalen statistischen Prozesses zu berechnen. Unter der Voraussetzung eines stationären und ergodischen Prozesses kann man sich der Methoden für statistische Schwankungsgrößen bedienen, d. h. es ist der Erwartungswert des Produktes von 4 Schwankungsgrößen zu berechnen.

$$\psi_{zz}(\nu, \tau) = E(X_1 X_2 Y_1 Y_2) = m_4 \quad (3)$$

Dazu muß die 4-dimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichte herangezogen werden.

$$m_4 = \iiint\int x_1 x_2 y_1 y_2 p(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \quad (4)$$

Unter der Voraussetzung einer Gauß-Verteilungsdichte — diese Annahme ist für elektronisches Rauschen zulässig — für die einzelnen Variablen erhält man die AKF  $\psi_{zz}(\nu)$  des Multiplikator-Rauschens  $z(t)$ .

$$\psi_{zz}(\nu, \tau) = \underbrace{\psi_{xy}^2(\tau)}_{\bar{z}^2} + \underbrace{\psi_{xy}(\nu + \tau) \psi_{yx}(\tau - \nu) + \psi_{xx}(\nu) \psi_{yy}(\nu)}_{\tilde{\psi}_{zz}(\nu, \tau)} \quad (5)$$

Diese Gleichung wurde für den Sonderfall des reinen Quadriergliedes (= quadratischer Zweiweg-Gleichrichter), d. h.  $x = y$  und  $\tau = 0$ , erstmalig

von RICE [6] (siehe auch SCHLITT [19]), die Ableitung für den Multiplikator von LANING und BATTIN [11] sowie Middleton [12] angegeben.

Das  $\nu$ -freie Glied in Gl. (5) ergibt einen Dirac-Impuls bei  $f = 0$  im Leistungsspektrum. Dieser Gleichanteil  $z^2$  ist das eigentlich erstrebte Ergebnis. Es ist nämlich  $z = \psi_{xy}(\tau)$ . Der Wechselanteil  $\psi_{zz}$  tritt dagegen als Störung auf, der durch die Integration beseitigt werden soll. Anders ausgedrückt: Der Multiplikator als Signalwandler liefert an seinem Ausgang ein Signal, das im allgemeinsten Fall aus einem Gleichanteil, nämlich der Kreuzkorrelationsfunktion  $\psi_{xy}(\tau)$  und einem reinen Schwankungsanteil  $\psi_{zz}(\nu)$  besteht, wobei auch der Schwankungsanteil zum Teil von der Kreuzkorrelation abhängt, wie der Term  $\psi_{xy}(\nu + \tau) \cdot \psi_{yz}(\tau - \nu)$  zeigt. Zum anderen Teil besteht der Schwankungsanteil aus einem von der Kreuzkorrelation unabhängigen Term  $\psi_{xx}(\nu) \cdot \psi_{yy}(\nu)$ . Das ist auch zu erwarten, da der Multiplikationssatz der Statistik für unabhängige Variable, die Zerlegung der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte in das Produkt der einzelnen Verteilungsdichten erlaubt. Bei statistischer Unabhängigkeit  $\tau \gg \tau_0$  ( $\tau_0 =$  Korrelationsdauer) verschwinden dann die Terme, die die Kreuzkorrelation enthalten. (Vergl. hierzu Bild 6). Aus Gl. (5) erhält man mittels Fouriertransformation oder Faltungsoperation das Leistungsspektrum

$$\tilde{S}_{zz}(f, \tau) = F \{ \psi_{zz}(\nu, \tau) \} = \sigma_{xx}(f, \tau) * \sigma_{yy}(f, \tau) + S_{xx}(f) * S_{yy}(f). \quad (5a)$$

Der Durchgang des Ausgangssignals  $z(t, \tau)$  des Multiplikators durch das Integrationsfilter soll nun als nächstes behandelt werden.

#### 4. Übertragung von statistischen Breitbandsignalen über lineare, zeitinvariante Systeme

Ganz analog zu der Behandlung diskreter Signale beim Durchgang durch lineare, zeitinvariante Systeme werden die statistischen Breitbandsignale behandelt. Da zur Beschreibung statistischer Signale die Mittelwerte 2. Ordnung, also Kenngrößen im Leistungsmaßstab, benutzt werden, müssen die benutzten Kenngrößen des Übertragungsgliedes von der gleichen Ordnung sein.

Im Spektralbereich wird daher das Quadrat vom Betrag des Übertragungsfaktors benutzt. Man erhält dann am Ausgang eines linearen Filters

$$S_{22}(f) = |H(jf)|^2 S_{11}(f), \quad (6)$$

wenn  $S_{11}(f)$  das Leistungsspektrum und  $\psi_{11}(\tau)$  die AKF des Eingangssignals sind. Dieser Beziehung entspricht im Zeitbereich nachstehende Faltungs-

operation

$$\psi_{22}(\tau) = \psi_{hh}(\tau)^* \psi_{11}(\tau) = F \{ S_{22}(f) \} \quad (7)$$

$$\psi_{22}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{hh}(\vartheta) \psi_{11}(\tau - \vartheta) d\vartheta \quad (8)$$

wo

$$\psi_{hh}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(jf)|^2 e^{j\omega\vartheta} df. \quad (9)$$

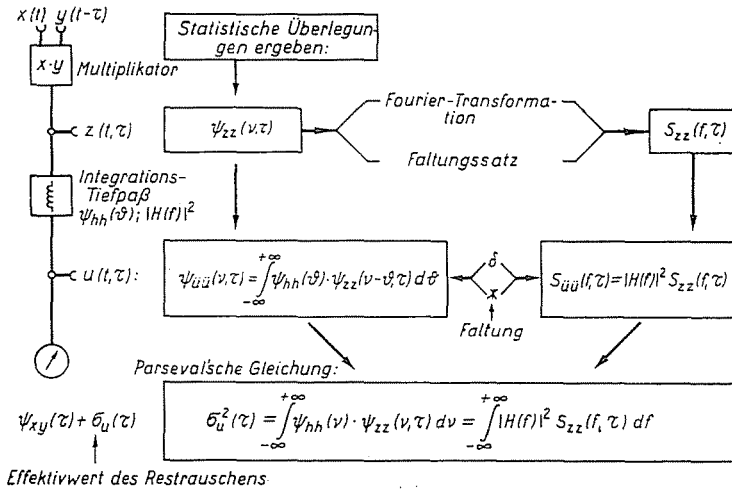


Bild. 4. Berechnung des Signaldurchlaufs im Korrelator

$\psi_{hh}(\vartheta)$  kann auch als AKF des Ausgangssignals aufgefaßt werden, wenn man das Leistungsspektrum des Eingangssignals im Übertragungsbereich als konstant annimmt.

Aus Gl. (8) erhält man sofort die Ausgangsleistung, indem man  $\tau = 0$  setzt. Dann geht das Faltungsintegral über in eine modifizierte Form der Parsevalschen Gleichung

$$\sigma_2^2 = \psi_{22}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{hh}(\tau) \psi_{11}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Außerdem gilt

$$\sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{22}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(jf)|^2 S_{11}(f) df. \quad (11)$$

Diese Überlegungen werden nun auf den Durchgang des Multiplikator-Rauschens  $z(t)$  durch das lineare Integrationsfilter angewandt.

Bild 4 zeigt das gesamte Übertragungssystem. Endziel der Überlegungen dieses Abschnittes ist die Berechnung des Effektivwertes des Restrauschens

$u(t)$  hinter dem Integrationsfilter. Unter der Voraussetzung, daß die AKF der Eingangssignale des Multiplikators bekannt sind, ergaben die vorangegangenen Überlegungen die AKF  $\tilde{\psi}_{zz}(v)$  des Multiplikator-Rauschens Gl. (5) bzw. das Leistungsspektrum  $\tilde{W}_{zz}(f)$  Gl. (5a). Mit Gl. (6) und (8) erhält man die AKF  $\psi_{uu}$  und das Leistungsspektrum  $\tilde{W}_{uu}$  des Restrauschens, woraus sich dann die Leistung des Restrauschens  $\sigma_u^2$  ergibt.

### 5. Mittelwertbildung

Die Mittelwertbildung erfolgt im allgemeinen mit passiven Netzwerken, bestehend aus  $R, L, C$ . Ein idealer Integrator besitzt eine Stoßreaktion  $h(\mu)$  und Übertragungsfaktor  $H(j\omega)$  nach Bild 5a. Ein solcher Integrator ist praktisch nicht realisierbar. Wie KÜPFMÜLLER (13) zeigt, erfüllt ein Tiefpaß die Aufgabe der Mittelwertbildung näherungsweise, und zwar bildet ein Tiefpaß mit der Grenzfrequenz  $f_0$  den Mittelwert über die Zeit  $T = \frac{1}{2f_0}$ , d. h. die Integrationsdauer entspricht der Einschwingzeit beim Einschalten einer Gleichspannung (Sprungfunktion). Die einfachste und daher auch am meisten benutzte Ausführungsform eines tatsächlichen Integrators ist der RC-Tiefpaß (Bild 5d).

#### *Im Zeitbereich idealer Kurzzeitintegrator*

Für die mathematische Behandlung der Fehlerberechnung des Korrelators sind nun idealisierende Annahmen für den tatsächlichen, fehlerbehafteten Integrator nützlich. Die meisten bekannten Arbeiten über den Korrelatorsfehler benutzen die zeitliche Darstellung für die Berechnung des Übertragungsproblems [Gl. (8) und Gl. (10)] und führen als Idealisierung den »Idealen Kurzzeit-Integrator« nach Bild 5b ein. Für diesen Integrator berechnen sich die Übertragungskenngrößen 2. Ordnung wie folgt.

Es sei vorgegeben die Stoßreaktion

$$h(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 < t < T \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (12)$$

Der Betrag des zugehörigen Übertragungsfaktors lautet

$$|H(j\omega)| = \text{si} \frac{\omega T}{2} \quad (13)$$

und der Leistungs-Übertragungsfaktor  $|H(j\omega)|^2$

$$|H(j\omega)|^2 = \text{si}^2 \frac{\omega T}{2}. \tag{14}$$

Die zu  $|H(j\omega)|^2$  gehörige Fourier-Transformierte  $\psi_{hh}(\vartheta)$  (zugleich die AKF der Stoßreaktion) ergibt sich zu

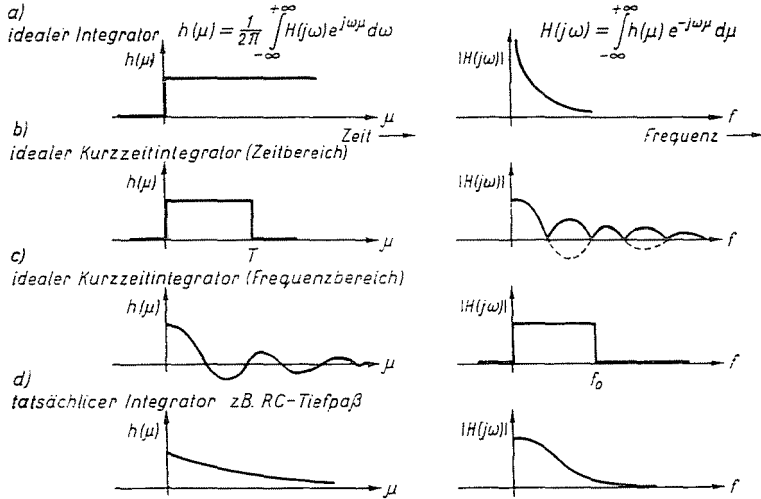


Bild 5. Übersicht über die Integrationsfilter-Typen

$$\psi_{hh}(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{T^2} (T - |\vartheta|) & -T \leq \vartheta \leq +T \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \tag{15}$$

Damit erhält man für die Leistung des Ausgangssignals  $u(t)$  am Integrationsfilter mit Gl. (10) die bekannte Formel

$$\sigma_{ii}^2 = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^{+T} (T - \nu) \hat{\psi}_{zz}(\nu, \tau) d\nu. \tag{16}$$

Diese Fundamental-Formel wurde erstmals auf anderem Wege von DAVENPORT [7] abgeleitet und wird weiter von BENDAT [10], BLASSEL [17], SCHWEIZER [15], [16], BALCHEN und BLANDHOL [14] u. a. benutzt. Mit der Realisierung derartiger Kurzzeit-Mittelwertbildner befaßt sich die Arbeit von LANGER [18]. SCHWEIZER [15] benutzte zur Vereinfachung der Rechnung



für denselben, im Zeitbereich idealen Kurzzeit-Integrator erstmalig die spektrale Betrachtungsweise [Gl. (11)] zur Berechnung des Restrauschens  $\sigma_u^2$  in Verbindung mit Gl. (14).

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} s i^2 \frac{\omega T}{2} \tilde{S}_{zz}(f, \tau) df \quad (17)$$

### Im Frequenzbereich idealer Kurzzeit-Integrator

Nun liegt der Gedanke nahe, einen weiteren idealen Kurzzeit-Integrator zu definieren, der — wie von LANGE [2] bereits erwähnt — im Frequenzbereich ideal ist (Bild 5c). Tatsächlich füllt man damit die noch bestehende Lücke zwischen dem idealen und dem tatsächlichen Integrator sehr nutzbringend aus. Die meisten Filter werden ja mit dem Ziel konstanter Übertragungsfaktor und scharfe Flanke entworfen. Mit der Rechteckform für  $|H(j\omega)|$  geht Gl. (11) sofort über in die einfachere Form

$$\sigma_u^2 = \int_{-f_0}^{+f_0} \tilde{S}_{zz}(f, \tau) df = \int_0^{f_0} \tilde{W}_{zz}(f, \tau) df, \quad (18)$$

d. h. das Filter läßt nur den schmalen Bereich von 0 bis  $f_0$  durch. Für alle weiteren Rechnungen soll nun angenommen werden, daß die obere Grenzfrequenz  $f_0$  des Integrationstiefpasses klein gegen die Bandbreite  $\Delta f$  der beteiligten Rauschsignale ist. Dann kann man in guter Näherung im Frequenzbereich  $0 < f < f_0$  mit

$$\tilde{W}_{zz}(f, \tau) \approx \tilde{W}_{zz}(0, T) = \text{konst.} \quad (19)$$

rechnen. Es wird also nur das Differenzfrequenz-Teilspektrum, und zwar der bei  $f=0$  gelegene Anteil über das Integrationsfilter übertragen. Für  $\sigma_u^2$  gilt dann

$$\sigma_u^2 \approx \tilde{W}_{zz}(0, \tau/f_0). \quad (20)$$

### Tatsächlicher Integrator

Als letztes soll nun als tatsächlicher Integrator der RC-Tiefpaß betrachtet werden. Im Leerlauf ist  $|H(jf)|^2$

$$|H(jf)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} jf_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \text{Grenzfrequenz}, \quad (21)$$

Gl. (21) und (19) eingesetzt in Gl. (11) ergibt

$$\sigma_u^2 = \widetilde{W}_{zz}(0, \tau) f_0 \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Streng genommen gilt bei hohen Frequenzen — es wird bis  $f \rightarrow \infty$  integriert — die Näherung Gl. (19) nicht mehr. Es ist jedoch bereits für  $f > 3 f_0$   $|H(jf)|^2 < 10^{-1}$  so, daß der dadurch verursachte Fehler vernachlässigt werden kann. Es bleibt das bemerkenswerte Ergebnis, daß das hinter dem einfachen *RC*-Tiefpaß vorhandene Restrauschen nur einen 1,25fachen Effektivwert gegenüber einem Tiefpaß mit rechteckförmiger Durchlaßkurve bei gleicher nomineller Grenzfrequenz besitzt. Das *RC*-Glied ist mithin ein brauchbarer Integrator.

## 6. Anwendungsbeispiel

Nach diesen allgemeinen Berechnungsangaben soll nun als Anwendungsfall die Messung einer AKF besprochen werden.

Auf die Multiplikator-Eingänge werden zwei gleiche, von einer Quelle stammende Rechteck-Rauschspektren  $x(t) = y(t)$  gegeben. Das statistische Breitbandsignal mit Rechteckspektrum ist eine in der Nachrichtentechnik vorteilhafte Idealisierung, auf die die meisten Übertragungsprobleme in guter Näherung zurückgeführt werden können

$$\widetilde{W}_{xx}(f) = \begin{cases} W_0 & 0 < f < f_2; \text{ d. h. } f_2 = \Delta f \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (23)$$

und

$$\psi_{xx}(\tau) = W_0 \Delta f \operatorname{si} \Delta \omega \tau = \sigma_x^2 \operatorname{si} \Delta \omega \tau. \quad (24)$$

Diese Eingangssignale ergeben am Multiplikator-Ausgang den Wechselanteil  $\tilde{z}(t)$  (Multiplikator-Rauschen) nach Gl. (5) mit der AKF

$$\tilde{\psi}_{zz}(\nu, \tau) = \sigma_x^4 \left[ \operatorname{si} \Delta \omega (\nu + \tau) \operatorname{si} \Delta \omega (\nu - \tau) + \operatorname{si}^2 \Delta \omega \nu \right] \quad (25)$$

dem Leistungsspektrum

$$\widetilde{W}_{zz}(f, \tau) = \sigma_x^4 \frac{1}{\Delta f} \left( 1 - \frac{f}{2\Delta f} \right) \left[ 1 + \operatorname{si} 2 \Delta \omega \tau \left( 1 - \frac{f}{2\Delta f} \right) \right] \quad (26)$$

und dem Effektivwert

$$\sigma_z(\tau) = \sigma_x^2 \sqrt{1 + \operatorname{si}^2 \Delta \omega \tau}. \quad (27)$$

Diese Formeln sind in den beiden folgenden Bildern graphisch dargestellt. Bild 6a zeigt die AKF Gl. (25) und Bild 6b das Leistungsspektrum Gl. (26) von  $z(t)$ . Angegeben sind jeweils die beiden Grenzkurven für  $\tau = 0$  und  $\tau \gg \tau_0$  (wo  $\tau_0 =$  Korrelationsdauer). Außerdem ist gestrichelt die AKF und das Spektrum des Eingangssignals  $x(t)$  eingezeichnet. Zu dem weißen Dreieck (Bild 6b) für unkorrelierte Eingangssignale kommt noch der schräge schraffierte Spektralanteil bei voller Korrelation hinzu. Das Ausgangssignal (Multiplikator-Rauschen) erstreckt sich bis zur doppelten Bandbreite des

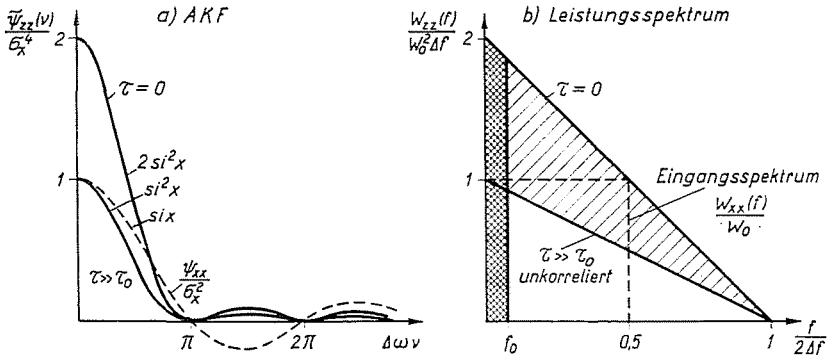


Bild. 6. Autokorrelationsfunktion  $\frac{\bar{\psi}_{zz}(\nu)}{\sigma_x^4}$  und Leistungsspektrum  $\frac{\bar{W}_{zz}(f)}{\bar{W}_0^2 \Delta f}$  des Rauschens  $x_z(t, \tau)$  am Multiplikator-Ausgang (ohne Gleichanteil  $z(t, \tau) = \psi_{xy}(\tau)$ ).

Eingangssignals. Die größere Bandbreite kommt durch die bei der Multiplikation entstehenden Summen- und Differenz-Frequenzen zustande, so daß als höchste Frequenz in  $\bar{W}_{zz} : f = 2 \Delta f$  auftritt. Aus dem Leistungsspektrum des Multiplikator-Rauschens wird von dem im Frequenzbereich idealen Kurzzeit-Integrator (Bild 5c) nur der kreuzweis schraffierte Anteil (Bild 6b) durchgelassen.

Um auch die Abhängigkeit des Multiplikator-Rauschens von  $\tau$ , d. h. von der Korrelation, zu zeigen, wurde das berechnete normierte Leistungsspektrum

$$\frac{\bar{W}_{zz} \left( \frac{f}{2\Delta f}, 2\Delta\omega\tau \right)}{\bar{W}_0^2 \Delta f}$$

dreidimensional dargestellt (Bild 7).

Bild 8 zeigt den Effektivwert  $\sigma_z$  des Multiplikator-Rauschens  $\tilde{z}(t)$  als Funktion von  $\Delta\omega\tau$ . Man sieht, daß der Effektivwert für  $\beta > \frac{1}{2\Delta f} = \tau_0$  nahezu unabhängig von  $\tau$  ist.

Die Leistung des Restrauschens hinter dem Integrator nach Bild 5c mit der Grenzfrequenz  $f_0$  ergibt sich nach Gl. (18) (genaue Lösung)

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^4 \frac{f_0}{\Delta f} \left(1 - \frac{f_0}{4\Delta f}\right) \left[1 + \operatorname{si} 2 \Delta \omega \tau \left(1 - \frac{f_0}{4\Delta f}\right) \operatorname{si} \frac{\omega_0 \tau}{2}\right]. \quad (28)$$

Mit der Näherung Gl. (19) geht Gl. (28) über in

$$\sigma_u = \sigma_x^2 \sqrt{\frac{f_0}{\Delta f}} \sqrt{1 + \operatorname{si} 2 \Delta \omega \tau}. \quad (29)$$

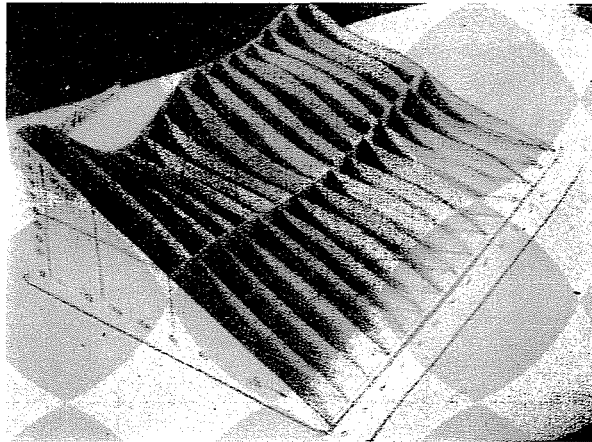


Bild. 7. Dreidimensionale Darstellung des Leistungsspektrums  $\frac{\tilde{W}_{zz}(f, \tau)}{W_0^2 \Delta f}$  des Rauschens  $\tilde{z}(f, \tau)$  am Multiplikator-Ausgang

Den Verlauf  $\sigma_u(\tau)$  Gl. (28) für verschiedene Verhältnisse  $f_0/\Delta f$  zeigt Bild 9.  $\sigma_u$  hängt im wesentlichen von dem Faktor  $\sqrt{\frac{f_0}{\Delta f}}$  ab. Die Kurven haben für Frequenzverhältnisse  $\frac{f_0}{\Delta f} < 10^{-1}$  bereits alle die gleiche Form. Die Näherungsbeziehung Gl. (29) ist also fast immer brauchbar. Alle Kurven streben asymptotisch dem Wert  $\sqrt{f_0/\Delta f}$  zu, der etwa ab  $\Delta \omega \tau \geq \pi$  erreicht wird.

Damit ist am Integrator-Ausgang als Nutzsignal (Gleichspannung oder -strom, je nach Geräteausführung) die Autokorrelationsfunktion  $z = \psi_{xx}(\tau)$  (Gl. 24) vorhanden, der sich noch das Restrauschen mit dem Effektivwert  $\sigma_u$  Gl. (29) überlagert. Für die Amplitudenauswertung kann man dann den relativen Fehler als das Verhältnis von Störsignal Nutzsignal angeben.

$$a = \frac{\sigma_u}{\psi_{xx}} \frac{\sqrt{\frac{f_0}{\Delta f}} (1 + \operatorname{si} 2 \Delta \omega \tau)}{\operatorname{si} \Delta \omega \tau}. \quad (30)$$

Bild 10 zeigt den normierten relativen Fehler  $\frac{\alpha(\Delta\omega\tau)}{\sqrt{f_0/\Delta f}}$ . In der Umgebung des Nulldurchganges ( $\Delta\omega\tau \approx \pi$ ) kann in guter Näherung gesetzt werden

$$\alpha(\Delta\omega\tau) \approx \sqrt{\frac{f_0}{\Delta f} \frac{1}{\sin \Delta\omega\tau}} \quad (31)$$

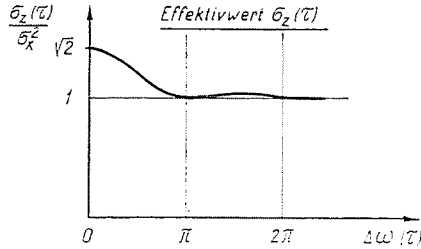


Bild 8. Effektivwert  $\frac{\sigma_z(\tau)}{\sigma_x^2}$  des Rauschens  $\tilde{z}(t, \tau)$  am Multiplikator-Ausgang

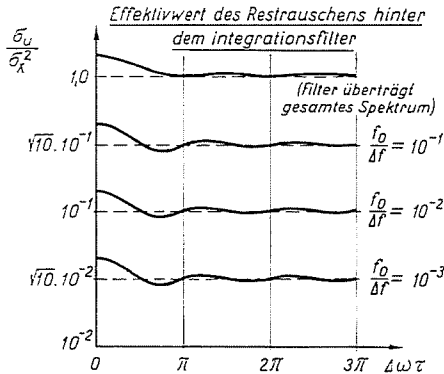


Bild 9. Effektivwert des Restrauschens  $\frac{\sigma_u\left(\tau, \frac{f_0}{\Delta f}\right)}{\sigma_x^2}$  am Ausgang des Integrationsfilters für verschiedene Verhältnisse von Eingangsbandbreite  $\Delta f$  zu Grenzfrequenz  $f_0$  des Integrations-tiefpasses

Bei einem Rauschspektrum mit  $\Delta f = 10$  kHz und einem idealen Tiefpaß mit  $f_0 = 10$  Hz kann man  $\psi_{xx}(0)$  mit einer Genauigkeit von 4,5% messen. Wenn  $\alpha \rightarrow 1$  geht, verschwindet das Nutzsinal im Restrauschen. Mit Gl. (31) kann man ferner angeben, wie genau der Nulldurchgang —  $\tau$ -Auswertung — gemessen werden kann. In diesem Zahlenbeispiel ist die Messung des Nulldurchganges auf  $\pm 3,2\%$  genau möglich.

Obige Überlegungen sind besonders bei der Benutzung der Kreuzkorrelation zur Entdeckung von Signalen im Rauschen von Bedeutung, wird doch durch das Restrauschen die Grenze für die Leistungsfähigkeit der Methode bestimmt.

Nachstehend sollen noch kurz die Beziehungen angegeben werden, wenn man Randpaß-Rauschen auf die Multiplikator-Eingänge gibt. Es sei  $x(t) = y(t)$  und

$$W_{xx}(f) = \begin{cases} W_0 & f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta f &= f_2 - f_1 \\ f_m &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\psi_{xx}(\tau) = W_0 \Delta f \cos \omega_m \tau \operatorname{si} \frac{\Delta \omega \tau}{2} \quad (33)$$

Dann gehen die Gleichungen (25), (26), (27), (29) und (30) über in

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{zz}(\nu, \tau) - \sigma_x^4 & \left[ \cos \omega_m(\tau + \nu) \operatorname{si} \frac{\Delta \omega}{2} (\tau + \nu) \cos \omega_m(\tau - \nu) \right. \\ & \left. \times \operatorname{si} \frac{\Delta \omega}{2} (\tau - \nu) + \cos^2 \omega_m \nu \operatorname{si}^2 \frac{\Delta \omega}{2} \nu \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\tilde{W}_{zz}(f, \tau) = \begin{cases} W_0^2 \Delta f \left(1 - \frac{f}{\Delta f}\right) \left[1 + \cos 2 \omega_m \tau \operatorname{si} \Delta \omega \tau \left(1 - \frac{f}{\Delta f}\right)\right] & 0 \leq f \leq \Delta f \\ \frac{1}{2} W_0^2 \Delta f \left(\frac{f - 2f_m}{\Delta f} + 1\right) \times \\ \quad \times \left[1 + \operatorname{si} \Delta \omega \tau \left(\frac{f + 2f_m}{\Delta f} + 1\right)\right] & 2f_m - \Delta f \leq f \leq 2f_m \\ \frac{1}{2} W_0^2 \Delta f \left(1 - \frac{f - 2f_m}{\Delta f}\right) \left[1 + \operatorname{si} \Delta \omega \tau \times \right. \\ \quad \left. \times \left(1 - \frac{f - 2f_m}{\Delta f}\right)\right] & 2f_m \leq f \leq 2f_m + \Delta f \end{cases} \quad (35)$$

$$\sigma_z(\tau) = \sigma_x^2 \sqrt{1 + \cos \omega_m \tau \operatorname{si} \frac{\Delta \omega}{2} \tau} \quad (36)$$

$$\sigma_u(\tau) = \sigma_x^2 \sqrt{\frac{f_0}{\Delta f}} \sqrt{1 + \cos 2 \omega_m \tau \operatorname{si} \Delta \omega \tau} \quad (37)$$

$$\alpha - \frac{\sigma_u}{\psi_{xx}} = \sqrt{\frac{f_0}{\Delta f}} \frac{\sqrt{1 + \cos 2 \omega_m \tau \operatorname{si} \Delta \omega \tau}}{\cos \omega_m \tau \operatorname{si} \frac{\Delta \omega}{2} \tau} \quad (38)$$

Es tritt also in allen Beziehungen noch die Bandmittenfrequenz  $f_m$  auf. Die Formeln werden dadurch komplizierter, doch wird es für Überschlagerrechnungen genügen, jeweils mit der Hüllkurve  $\sin x$  zu rechnen und den Faktor  $\cos x = 1$  zu setzen.

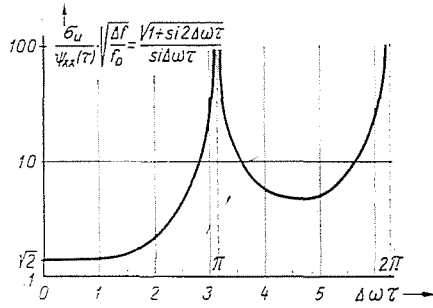


Bild. 10. Normierter relativer Fehler  $\frac{\sigma_{11}}{\psi_{zz}(\tau)} \cdot \sqrt{\frac{\Delta f}{f_0}}$  bei der Messung der Korrelationsfunktion

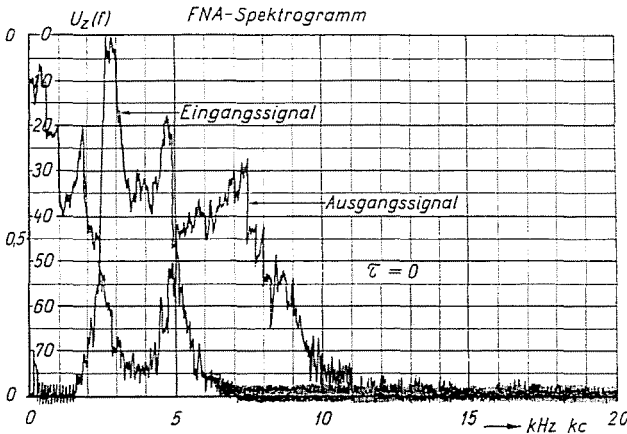


Bild. 11. Gemessenes Spektrum des Rauschens  $z(t, \tau)$  am Ausgang des Multiplikators, wenn auf die Eingänge ein Rauschen mit näherungsweise rechteckförmigem Spektrum gegeben wird

Bild 11 zeigt das gemessene Produktspektrum  $W_{zz}(f)$ , wenn die Eingangssignale des Multiplikators näherungsweise ein Rechteckspektrum mit den Nennwerten:  $f_1 = 2,4$  kHz,  $f_2 = 4,8$  kHz und  $\tau = 0$  besitzen. Zum Vergleich wurde das gemessene Spektrum  $W_{zz}(f)$  des Eingangssignals mit in das Diagramm eingetragen.

### 7. Fehler bei der Spektral-Analyse

Ein Gerät zur Messung des Leistungsspektrums ist entsprechend der mathematischen Definition nach dem Prinzipschaltbild (Bild 12) aufgebaut. Es zeigt sich, daß auch die beim Korrelator benutzten Baugruppen Multiplikator (hier vereinfacht zu einem Quadrierglied) und Integrator vorhanden sind. Nur ist anstelle der Laufzeitkette ein durchstimmbarer Bandpaß kleiner Bandbreite vorhanden. Man kann daher sofort auf die in den vergangenen Abschnitten gewonnenen Ergebnisse zurückgreifen. Dann ergibt sich für die Messung des Auto-Leistungsspektrums folgendes. Dem abstimmbaren Bandpaß soll ein rechteckförmiger Übertragungsfaktor zugeordnet werden.

$$|H(jf)|^2 = \begin{cases} 1 & f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} f_m = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) \\ \Delta f = f_2 - f_1 \end{array} \right\} \quad (39)$$

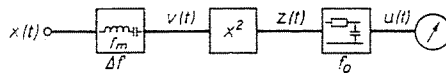


Bild. 12.

Dann erhält man hinter dem Bandpaß für das Signal  $v(t)$ , wenn  $x(t)$  das Eingangssignal sei

$$W_{v_o}(f) = \begin{cases} W_{xx}(f) \approx W_{xx_m}(f_m) & f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (40)$$

Gl. 40 enthält die für kleine Bandbreiten  $\Delta f$  wohl zulässige Annahme, daß  $W_{xx}(f)$  innerhalb des Durchlaßbereiches konstant ist ( $W_{xx_m}(f_m)$ ) und das arithmetische Mittel darstellt. Für das Bandpaß-Rauschen  $v(t)$  mit Rechteckspektrum nach Gl. (40) kann man sofort die AKF angeben [Gl. (33)].

$$\psi_{v_o}(\tau) = W_{xx_m}(f_m) \Delta f \cos \omega_m \tau \operatorname{sinc} \frac{\Delta \omega}{2} \tau. \quad (41)$$

Das Quadrierglied liefert nach Gl. (5) ( $\tau = 0$ ) das Ausgangssignal  $z(t)$  mit

$$\psi_{zz}(v) = \psi_{v_v}^2(0) + 2 \psi_{v_v}^2(v). \quad (42)$$

Setzt man Gl. (41) ein, so erhält man für  $\psi_{zz}(v)$

$$\psi_{zz}(v) = [W_{xx_m}(f_m) \Delta f]^2 + 2[W_{xx_m}(f_m) \Delta f]^2 \cos^2 \omega_m v \operatorname{sinc}^2 \frac{\Delta \omega}{2} v. \quad (43)$$



Das interessierende Ergebnis ist somit

$$\overline{z(t)} = \overline{u(t)} = \psi_{rr}(0) = W_{xx_m}(f_m) \Delta f. \quad (44)$$

Der angezeigte Gleichstrom ist mithin näherungsweise (Gl. 40) proportional dem Betrag des Leistungsspektrums bei  $f = f_m$ .

Nach Passieren des Integriergliedes verbleibt noch ein Restrauschen  $\sigma_u$  nach Gl. (37)

$$\sigma_u = \sigma_u^0 \sqrt{\frac{2f_0}{\Delta f}} = W_{xx_m}(f_m) \Delta f \sqrt{\frac{2f_0}{\Delta f}}. \quad (45)$$

Schließlich erhält man für den relativen Fehler nach Gl. (38)

$$a = \frac{\sigma_u}{\psi_{rr}(0)} = \sqrt{\frac{2f_0}{\Delta f}}. \quad (46)$$

Damit liegt die notwendige Bandbreite  $f_0$  des Integriergliedes fest, wenn man die Bandbreite  $\Delta f$  des Abtastfilters vorgibt und einen maximalen Fehler zuläßt. Es zeigt sich, daß bei den erwünschten kleinen Filter-Bandbreiten  $\Delta f$  sehr niedrige Grenzfrequenzen für das Integrierglied erforderlich werden, selbst wenn man eine stärkere Schwankung der Anzeige gestattet. Bei  $\Delta f = 20$  Hz (200 Hz) und  $a = 10\%$  muß dann  $f_0 = 0,1$  Hz (1 Hz) sein. Das ist physikalisch sofort einzusehen, da auch der Gleichstrom nach Gl. (44) proportional  $\Delta f$  ist, d. h. um eine kleinere Wechselstromleistung  $\sigma_u$  zu erhalten, muß die Grenzfrequenz  $f_0$  des Tiefpasses erheblich kleiner gewählt werden. Da im Gegensatz dazu bei der Korrelationsanalyse auf den Multiplikator-Eingang zumeist breitbandige Rauschvorgänge gegeben werden, bestehen dort derartige Forderungen nach extrem niedriger Grenzfrequenz  $f_0$  nicht. Über die mathematische Behandlung der prinzipiellen Ausführungsformen (Sieb- und Suchtonverfahren) der Frequenzselektion berichtet KÜPFMÜLLER [13]. Besonders unangenehm machen sich die kleinen Bandbreiten bei der kontinuierlichen Durchstimmung bemerkbar.

### 8. Schlußbetrachtung

Seit der grundlegenden Arbeit von DAVENPORT [7] gehen verschiedene neuere Veröffentlichungen [(14), (15), (16)] von dieser Arbeit aus. Es fehlt jedoch bisher eine Verbindung zwischen den für spezielle Zwecke immer wieder neu aufgestellten Fehlertheorien. Die Überlegungen konzentrieren sich dabei auf die beiden hauptsächlichen Baugruppen: Multiplikator und Integrator, auf die sich Korrelator wie auch Spektralanalysator zurückführen lassen. In der vorliegenden Arbeit wird der Multiplikator als Signalwandler aufgefaßt, und zwar als Sechspol mit 2 Eingängen und 1 Ausgang. Das Ver-

ständnis wird erleichtert, wenn man zur Analyse im Gedankenexperiment einen zweiten, fehlerfreien Korrelator benutzt, wie es übrigens auch bei praktischen Versuchen geschehen ist (Bild 11). Als Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte wird für die Eingangssignale des Multiplikators die Gauß-Verteilungsdichte zugrunde gelegt, was für elektronisches Rauschen im allgemeinen zutrifft. Für die Poisson-Verteilung hat PESCHEL [20] eine Fehlerabschätzung angegeben. Der Integrator bietet mehr Spielraum für Behandlungsvarianten, die sich nach Bild 5 in vier Hauptgruppen einordnen lassen.

Im Vordergrund der zitierten Arbeiten steht die zeitliche Betrachtungsweise mit dem im Zeitbereich idealen oder auch fehlerbehafteten, getasteten Kurzzeit-Integrator. Es erschien daher wünschenswert, die Verbindung zur Berechnung im Spektralbereich herzustellen und näher auf den sich dabei ergebenden, im Frequenzbereich idealen Kurzzeitintegrator (idealer Tiefpaß) einzugehen, zumal die spektrale Denkweise vielfach doch anschaulicher ist. Den Signaldurchlauf durch die Kettenschaltung: Multiplikator + Integrator einschließlich des Rechnungsganges zeigt Bild 4. Anhand des verallgemeinerten Faltungssatzes für statistische Signale (Momente 2. Ordnung) läßt sich die Davenportformel leicht verständlich deuten.

Die allgemeinen Ergebnisse werden auf Eingangssignale mit rechteckförmigem Leistungsspektrum angewandt, und zwar als Tiefpaß- und Bandpaß-Rauschen. Beide Signaltypen sind bei der Informationsübertragung sehr nützliche Idealisierungen, die bisher ungenügend untersucht waren. Auf die Verteilungsdichte des Restrauschens wird nicht eingegangen. Wie Lampard [21] und auch schon Davenport [7] gezeigt haben, kann man in guter Näherung für kleinere Werte von  $f_0/\Delta f$  die Gauß-Verteilung annehmen, was man nach dem zentralen Grenzwertsatz bereits vermuten konnte. Damit ist es sofort möglich, aus den angegebenen Effektivwerten auf die Amplitudenverteilung zu schließen.

Welches Meßverfahren (Korrelator oder Spektrograf) man zur Analyse von statistischen Signalen benutzt, hängt von der jeweiligen Gesamtsituation (erwarteter Signaltyp und weitere Auswertung) ab. Die Messung des Spektrums ist im allgemeinen Fall zeitlich aufwendiger, die Korrelationsfunktion weniger anschaulich.

Damit soll die vorliegende Arbeit dem Ausbau der Netzwerktheorie für regellose Vorgänge dienen.

### Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Fehler bei der Messung von statistischen Breitbandsignalen, der durch unvollkommene Integration entsteht. Die Kombination: Analogie-Multiplikator und Integrator wird als Übertragungssystem aufgefaßt und der Signaldurchlauf berechnet. Die zeitliche und spektrale Betrachtungsweise zeigt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Arbeiten zur Fehlertheorie.

Anhand ihrer Systemkenngrößen (Stoßreaktion und Frequenzgang) werden für die Integratoren vier Haupttypen angegeben, in die sich die praktisch interessierenden Fälle einordnen lassen. Dabei erweist sich der im Frequenzbereich ideale Kurzzeitintegrator (idealer Tiefpaß) als nützliche Idealisierung für die Berechnung des Restrauschens. Die theoretischen Überlegungen werden angewandt auf Rauschsignale mit rechteckförmigem Leistungsspektrum. Auf diese Signalfornung lassen sich viele Probleme der Übertragungstechnik zurückführen. Es wird das Restrauschen (absoluter Fehler) und der relative Fehler bei der Messung der Autokorrelationsfunktion (Amplituden- und  $\tau$ -Auswertung) berechnet. Ferner kann damit auch sofort der Fehler bei der Messung des Leistungsspektrums angegeben werden.

### Literatur

1. CHARKEWITSCH, A. A.: Signalübertragung durch moduliertes Rauschen. Elektroschwa- (russ.) 1957 (Nov.), S. 42—46.
2. LANGE, F. H.: Korrelationselektronik. Verlag Technik, Berlin, 1962 (2. Auflage).
3. LANGE, F. H. u. MÜLLER, W. T.: Informationsübertragung durch Breitbandsignale. Wiss. Zeitschr. d. Univ. Rostock, 1961, Sonderheft.
4. HORTON, B. M.: Noise-Modulated Distance Measuring Systems. Proceedings IRE S. 821—828 (1959).
5. LANGE, F. H.: Entwicklungstendenzen der modernen Ortungstechnik. II, Korrelationsmeßverfahren der Luftfahrtnavigation. Nachrichtentechnik S. 250—254 (1961).
6. RICE, S. O.: Mathematical Analysis of Random Noise. Bell System Techn. Journ. 1944, S. 282—332, und 1945, S. 46—156.
7. DAVENPORT, W. B.: Statistical Errors in Measurements on Random Time Functions. Journ. Applied Physics 377—388 (1952).
8. DAVENPORT, W. B. und ROOT, W. L.: Random Signals and Noise. McGraw-Hill Book Comp., New York, 1958.
9. SOLODOWNIKOW und USKOW: Statistische Systemanalyse. Moskau, 1961.
10. BENDAT, J. S.: Principles and Applications of Random Noise Theory. John Wiley & Sons, New York, 1958.
11. LANING, J. H. and BATTIN, R. H.: Random Processes in Automatic Control. McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
12. MIDDLETON, D.: Introduction to Statistical Communication Theory. McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
13. KÜPFMÜLLER, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1952.
14. BALCHEN, J. G. und BLANDHOL, E.: On the Experimental Determination of Statistical Properties of Signals and Disturbances in Automatic Control Systems. IFAC Moskau, 1960.
15. SCHWEIZER, G.: Die Messung von Frequenzgängen mit Hilfe der Kreuzkorrelationsbeziehung. A. E. Ü. (Okt.) H. 10, 437—443 (1961).
16. SCHWEIZER, G.: Untersuchung der auftretenden Fehler bei der Auswertung von statistischen Signalen. E. A. Ü. 1962, H. 5, S. 235—244.
17. BLASSEL, P.: Erreur due à une durée d'intégration finie dans la détermination des fonctions d'autocorrélation. Annales des Télécommunication, 406—416, 1953 (Dez.).
18. LANGER, H. J.: Stetige Mittelwertbildung mit Hilfe von passiven Netzwerken. Frequenz H. 1., S. 15—24 (1962).
19. SCHLITT, H.: Systemtheorie für regellose Vorgänge. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
20. PESCHEL, M.: Abschätzung des durch die endliche Mittelungszeit bedingten Fehlers der Korrelationsfunktion eines Poissonschen Sekundärprozesses. Zmsr H. 11, S. 468—470 (1961).
21. LAMPARD, D. G.: The Probability Distribution for the Filtered Output of a Multiplier Whose Inputs are Correlated, Stationary, Gaussian Time-Series. IRE Transactions- Inform. Theory 4—11 (1956, März.).

Prof. Dr. F. H. LANGE und Dipl.-Ing. Wolfgang MÜLLER, Universität Rostock.