UNTERSUCHUNGEN AUS DEM KREIS DER POLYNOME MIT EINER UND MEHREREN VERÄNDERLICHEN

Von

T. Faragó

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 10. Dezember, 1963)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. Fenyő

I. Annähernde Bestimmung der auf gegebenen Kurven gelegenen Nullstellen von Polynomen

Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, a_k eine komplexe Zahl, $k = 0, 1, \ldots n$, $a_n \neq 0$, $n \geqq 2$.

Bekanntlich, gibt es ein M, für das $|f(z)| > 0$, wenn $|z| \geqq M$. Ein solches M sei bekannt. Ferner sei $y = y(x)$ eine einwertige, stetige Funktion in dem geschlossenen Intervall $-M \leqq x \leqq M$, wobei die Differenzenquotienten von K begrenzt seien:

$$\left| \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqq K,$$

wenn x_1 und x_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte des gegebenen Intervalls sind. Ein solches K sei bekannt. (Kann $y(x)$ im Intervall $(-M, M)$ differenziert werden, so mag — nach dem Lagrangeschen Mittelwertsatz — die Rolle von K von der oberen Schranke von $|y'(x)|$ übernommen werden.)

Im folgenden soll ein stets konvergentes, elementares Verfahren beschrieben werden, welches bei Erfüllung der obigen Bedingungen in einer endlichen Zahl von Schritten nachzuweisen gestattet, daß $f(z)$ auf dem gegebenen Kurvenabschnitt keinen Nullpunkt hat, bzw. daß nach einer endlichen Zahl von Schritten jeder einzelne der (in endlicher Zahl vorhandenen) Abschnitte, in dem keine Nullfreiheit nachgewiesen wurde, in einen Kreis von beliebig kleinem Radius faßbar ist.

Bekanntlich ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(0)} (z - z_0)^k,$$

wo die Koeffizienten $b_k^{(0)}$ von den Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt sind; sie können z. B. nach der Hornerschen Schema rechnerisch ermittelt werden. Offenbar ist

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| - |z - z_0| \sum_{k=0}^{n-1} |b_k^{(0)}| \, |z - z_0|^k .$$

Es sei $|z - z_0| < R_0$, dann ist

$$|f(z)| > |f(z_0)| - |z - z_0| \sum_{k=0}^{n-1} |b_k^{(0)}| R_0^k, \text{ und demnach}$$

$$|f(z)| > 0, \text{ wenn } |z - z_0| < R_0' = \min \left[R_0, \frac{|f(z_0)|}{\sum_{k=0}^{n-1} |b_k^{(0)}| R_0^k} \right].$$

Es sei $z_0 = x_0 + iy(x_0)$, ferner $z_1 = x_1 + iy(x_1)$, und hierin

$$x_1 = x_0 + \frac{R_0'}{\sqrt{1 + K^2}} .$$

Offenbar ist $|z_1 - z_0| \leqq R_0'$, denn

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + [y(x_1) - y(x_0)]^2} =$$

$$= (x_1 - x_0) \sqrt{1 + \left[\frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} \right]^2} \leqq (x_1 - x_0) \sqrt{1 + K^2} = R_0'.$$

Ergibt sich $f(z_1) \neq 0$, so kann das Verfahren folgendermaßen wiederholt werden:

$$f(z) = f(z_1) + (z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)} (z - z_1)^k,$$

(die Koeffizienten $b_k^{(1)}$ lassen sich nach dem Hornerschen Schema bestimmen.)

Ist $|z - z_1| < R_1$, wird offenbar

$$|f(z)| > 0, \text{ wenn } |z - z_1| < R_1' = \min \left[R_1, \frac{|f(z_1)|}{\sum_{k=0}^{n-1} |b_k^{(1)}| R_1^k} \right].$$

Falls

$$z_2 = x_2 + iy(x_2), \text{ wo } x_2 = x_1 + \frac{R_1'}{\sqrt{1 + K^2}} ,$$

ergibt sich offenbar: $|z_2 - z_1| \leqq R_1'$.

In der Weiterführung des Verfahrens sind folgende Fälle möglich. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten wird das letzte Glied der Folge $x_1, x_2, \ldots x_m$ größer als M, $f(z)$ hat also auf der gegebenen Kurve keinen

Nullpunkt, dessen Abszisse größer wäre als x_0. Wenn dagegen M die obere Schranke der vorstehenden Folge ist, besitzt diese einen Grenzwert, und dieser ist eben die Abszisse eines Nullpunktes, denn jede entgegengesetzte Annahme führt zu einem Widerspruch. Dieser Nullpunkt kann noch obigem Verfahren offenbar mit beliebig großer Genauigkeit bestimmt und mit einem Kreis von beliebig kleinem Radius umgeben werden. Findet sich auf der Kurve wo immer ein Nullpunkt, läßt sich das obige Verfahren von einem Abszissenwert ausgehend durchführen, der in der rechtsseitigen Umgebung der Abszisse des Nullpunktes beliebig gewählt wurde.

Soll die vorstehende Untersuchung an einer abnehmenden Folge von x-Werten vorgenommen werden, so sei — gleichfalls von z_0 ausgehend —

$$z_1' = x_1' + iy(x_1'), \text{ wo } x_1' = x_0 - \frac{R_0'}{\sqrt{1+K^2}} .$$

Hat man die übrigen Werte von x auf ähnliche Weise gewählt, so kann eine der obigen ähnliche Überlegung angestellt werden, je nachdem $-M$ die untere Schranke der so resultierenden Folge $x_1', x_2', \ldots x_m'$ ist oder nicht.

Ist $x_0 \geqq 0$, wird man R_0 zweckmäßig folgendermaßen wählen: $R_0 = M - x_0$, allgemein $R_m = M - x_m$. Solcherart kann die Untersuchung beim Rechtsfortschreiten in einer der Hälften des Kreises durchgeführt werden, dessen Mittelpunkt im Achsenschnittpunkt liegt und dessen Halbmesser M ist (im weiteren M-Kreis). Ist $-M = x_0 < 0$, dann ist beim Fortschreiten nach rechts die Wahl von $R_0 = -x_0$, allgemein $R_m = -x_m$ u. s. f. zweckmäßig. Nun kann die Untersuchung in der anderen Hälfte des M-Kreises durchgeführt werden, solange die Abszissen nicht bis 0 wachsen. Ähnliche Überlegungen können angestellt werden, wenn die Untersuchung an einer Folge abnehmender Werte von x durchzuführen ist.

Anmerkungen

1. Zur Bestimmung von M finden sich in den Werken [1], [2], [3] des Literaturverzeichnisses mehrere Verfahren. Hat man M nicht auf obige Weise gewählt, können nicht in jedem Fall sämtliche auf der gegebenen Kurve liegenden Nullstellen von $f(z)$ gefunden werden.

2. Ist $y(x)$ ein Polynom, können die K-Werte für die Teilintervalle von $[-M, M]$ auch einzeln, gesondert bestimmt werden, womit sich die Konvergenz des Verfahrens verstärken läßt [4].

3. Nach obigem Verfahren ergibt sich der Nachweis der Nullpunktfreiheit nicht nur für einzelne Kurvenabschnitte, sondern auch für eine gewisse Umgebung der Kurve. Handelt es sich jedoch nur darum, ob und, bejahendenfalls, wo sich auf der Kurve ein Nullpunkt befindet, so interessiert

nur die Untersuchung der in das Innere des M-Kreises fallenden Kurvenabschnitte, d. h. jener Punkte, für welche die Ungleichung

$$x^2 + [y(x)]^2 < M^2$$

besteht.

Die Bestimmung dieser Abschnitte ist jedoch nicht bei jeder Kurve einfach. Ist z. B. $|z_0| \geqq M$, $z_0 = x_0 + iy(x_0)$ und $x_0 \geqq 0$, $y(x_0) = 0$, kann von den allfälligen Schnittpunkten der Kurve $y(x)$ mit dem M-Kreis der rechts von z_0 fallende Schnittpunkt mit der kleinsten Abszisse folgendermaßen annährend bestimmt werden.

Man sucht die Abszisse des näher bei z_0 gelegenen Schnittpunktes der durch z_0 gehenden Geraden mit der Richtungstangente $-K$ einerseits und des M-Kreises andererseits auf, sodann den auf der Kurve liegenden Punkt, dann die Abszisse des näher gelegenen Schnittpunktes der durch den letzteren Kurvenpunkt verlaufenden Geraden mit der Richtungstangente $-K$ einerseits und des M-Kreises andererseits u. s. f. Zwei Fälle sind möglich: die letzte der Geraden mit der Richtungstangente $-K$, die dem solcherart resultierenden Abszissenwert zugehört, schneidet den M-Kreis nicht, d. h. die gegebene Kurve besitzt rechts von x_0 keinen Schnittpunkt mit dem M-Kreis, oder die x-Werte haben einen Grenzwert — wenn sie oben beschränkt sind —, und wenn dieser kleiner ist als M, ist er die Abszisse des gesuchten Schnittpunktes.

Auch die in die übrigen Quadranten fallenden eventuellen Schnittpunkte können auf ähnliche Weise aufgefunden werden.

II. Über Schranken von Polynomen mit zwei Veränderlichen in gegebenem Bereich

Das Polynom mit zwei Veränderlichen sei:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^k, \text{ wo } a_k(x) = \sum_{i=0}^{m_k} a_{k_i} x^i,\ a_{k_i} \text{ reell, } k = 0,1 \ldots m,$$

$$i = 0,1,2, m_k,\ a_m(x) \not\equiv 0,\ m \geq 1, \max m_k = n \geq 1, \sum a^2_{km_k} > 0 \text{ sind.}$$

$f(x, y)$ kann offenbar in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} b_k(y)\, x^k, \text{ wo } b_k(y) = \sum_{i=1}^{n_k} b_{k_i} y^i.$$

Im folgenden sei die erste Form von $f(x, y)$ verwendet.

Der gegebene Bereich sei: T: $0 \leqq a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq c \leqq y \leqq d$. Es sollen die folgenden Bezeichnungen bzw. Benennungen gelten: A (als Index) $=$ $= +$ oder $A = -$, $-A = -$, wenn $A = +$, $-A = +$, wenn $A = -$, $(+) \cdot (+) = +$, $(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = -$, $(-) \cdot (-) = +$.

$\mathrm{Sg}\ (a) = +$, wenn $a > 0$, $\mathrm{Sg}\ (a) = -$, wenn $a < 0$.

Die Funktion $f_A(x, y)$ sei als sich annähernde Funktion von $f(x, y)$ u. zw. wenn $A = +$, dann von oben, wenn $A = -$, dann von unten sich annähernde Funktion bezeichnet, falls im gegebenen Bereich T

$$f_+(x, y) \geqq f(x, y)\,,$$

$$f_-(x, y) \leqq f(x, y)\,.$$

Im folgenden sollen solche sich annähernden Polynome bzw. deren verhältnismäßig »gute« untere und obere Schranken behandelt werden.

Zur Herstellung der sich annähernden Polynome der Polynome mit zwei Veränderlichen sollen die eigenen, auf die Annäherung von Polynomen mit einer Veränderlichen bezüglichen Feststellungen benutzt werden [4]. Einige diesbezügliche Verfahren seien kurz rekapituliert.

Zur Bestimmung der Schranke von Polynomen mit einer Veränderlichen in gegebenem Intervall

Es seien:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{n} a_k x^k,\ a_n \neq 0,\ n \geqq 2,\ 0 \leqq a \leqq x \leqq b\,.$$

1. *Verfahren.* Wenn $a_n > 0$, so berechnet man die nachstehende Größe: $a'_{n-1} = a_n \cdot a + a_{n-1}$, wenn $a_n < 0$, so ergibt sich $a'_{n-1} = a_n \cdot b + a_{n-1}$, wenn $a'_{n-1} \geqq 0$, dann $a'_{n-2} = a'_{n-1} \cdot a + a_{n-2}$, wenn $a'_{n-1} < 0$, dann $a'_{n-2} = a'_{n-1} b +$ $+ a_{n-2}$. Führt man das Verfahren fort, so setzt a'_0 der Funktion $f(x)$ im gegebenen Intervall eine untere Schranke. Bei Bestimmung der oberen Schranke tauschen die Intervallgrenzen ihre Rollen.

2. *Verfahren.* Bekanntlich ist $f(x) = (x - x_0)\, q\,(x) + f(x_0)$, wo $q(x)$ das Polynom $(n - 1)$sten Grades von x ist. Wenn zu $q(x)$ nach dem 1. Verfahren eine untere und eine obere Schranke bestimmt werden soll, wobei an Stelle von x_0 a bzw. b gesetzt wird, so erhält man ein $f(x)$ annäherndes lineares Polynom, dessen äußerster Wert im Rahmen des Bereiches zu $f(x)$ die gewünschte Schranke liefert. Natürlich kann zur Bestimmung der Schranken von $q(x)$ auch dieses zweite Verfahren angewendet werden, oder man bestimmt unter Belassung des sich annähernden linearen Polynoms von $q(x)$ das bereichliche Maximum bzw. Minimum des resultierenden Polynoms zweiten Grades.

3. *Verfahren.* Bekanntlich ist

$$f(x) = (x-a)(x-b)\,q(x) + (x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a),$$

wo $q(x)$ ein Polynom $(n-2)$-ten Grades ist. Sowohl dieses, wie der obige Differenzenquotient ergeben sich leicht aus dem Hornerschen Schema. Zu $q(x)$ stellt man nach dem 1., dem 2. oder auch nach dem 3. Verfahren eine entsprechende Schranke her, und man bestimmt das absolute Maximum bzw. Minimum des gewonnenen annähernden Polynoms zweiten Grades... Natürlich kann man auch auf andere Art, z. B. durch Erhöhung des Exponenten, zu den Schranken von $f(x)$ gelangen.

Den obigen analoge Verfahren für Polynome mit zwei Veränderlichen können folgendermaßen beschrieben werden.

Elementare Verfahren zur Bestimmung der Schranken von Polynomen mit zwei Veränderlichen

1. *Verfahren.* Zum Polynom $f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\,y^k$ z. B. läßt sich eine untere bzw. eine obere Schranke im gegebenen Bereich T auf folgende Art herstellen: Nach einem der vorstehend mitgeteilten Verfahren wird zum Polynom $a_k(x)$ im gegebenen Intervall $0 \leqq a \leqq x \leqq b$ eine untere und eine obere Schranke A_{k-} bzw. A_{k+} bestimmt, während $k = 0, 1, \ldots m$ ist. Anderseits bestimmt man zum Polynom $f_A(x,y) = \sum_{k=0}^{m} A_{kA}\,y^k$ die entsprechende Schranke im gegebenen Intervall $0 \leqq c \leqq y \leqq d$, die auch eine gesuchte Schranke von $f(x,y)$ sein wird.

2. *Verfahren.* Dieses bestimmt Schranken zu einem Teilbereich von T. Dieser Teilbereich sei T': $0 \leqq a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq c(x) \leqq y \leqq d(x)$, wobei $c(x)$ und $d(x)$ Polynome von x sind, und $c \leqq c(x)$, $d(x) \leqq d$. Die untere Schranke von $f(x,y)$ im Teilbereich T' erhält man wie folgt:

Man bestimmt die untere Schranke von $a_m(x)$ in $[a, b]$; sie sei A_{m-}. Wenn $A_{m-} \geqq 0$, so stelle man die Funktion $a'_{m-1}(x) = A_{m-} \cdot c(x) + a_{m-1}(x)$ her. Ist $A_{m-} < 0$, dann sei $a'_{m-1}\,d(x) + a_{m-1}(x)$. Man bestimmt nun zum Polynom $a'_{m-1}(x)$ im $[a, b]$ eine untere Schranke, und diese sei A_{m-1-}. Ist $A_{m-1-} \geqq 0$, wird die Untersuchung mit dem Polynom $a'_{m-2}(x) = A_{m-1-}c(x) + a_{m-2}(x)$ bzw. wenn $A_{m-1-} < 0$, mit dem Polynom $a'_{m-2}(x) = A_{m-1-}d(x) + a_{m-2}(x)$ fortgesetzt, und auch hier eine untere Schranke bestimmt... u. s. f. Bei Fortsetzung des Verfahrens wird das Polynom $a'_0(x)$ zu einem unteren Schrankenpolynom und dessen untere Schranke zu einer unteren Schranke von $f(x,y)$. Die Gewinnung der oberen Schranke erfolgt analog, nur tauschen $c(x)$ und $d(x)$ die Rollen. Mit $c(x) \equiv c$ und $d(x) \equiv d$ gelangt man zum 1. Verfahren.

3. *Verfahren. Schrankenbestimmung mittels linearer Näherungspolynome.*

Bekanntlich ist

$$f(x, y) = (y - y_0)\, q\,(x, y) + (x - x_0)\, r(x) + f(x_0, y_0),$$

wo das Polynom mit zwei Veränderlichen $q(x, y)$ in y $(m - 1)$sten Grades, $r(x)$ gleichfalls ein Polynom ist, und $q(x, y)$ sowie $r(x)$ sich durch Anwendung des Hornerschen Schemas für Polynome mit zwei Veränderlichen leicht ergeben. Bestimmt man die Näherungspolynome von $q(x, y)$ und auch $r(x)$, oder gar ihre Näherungspolynome nullten Grades, d. h. ihre Schranken, so läßt sich mit deren Hilfe ein Näherungspolynom von $f(x, y)$ erzeugen:

$$f_A(x, y) = (y - y_0)\, q_{A_1}(x, y) + (x - x_0)\, r_{A_2}(x) + f(x_0, y_0). \tag{1}$$

Hier bedeutet sowohl A_1 wie A_2 entweder ein $+$ oder ein $-$ Zeichen. Ihre leicht einzusehende Bestimmung geschieht wie folgt:

$$A_1\, Sg(y - y_0) = A, \quad A_2\, Sg(x - x_0) = A\,. \tag{2}$$

Es sei (x_0, y_0) ein Punkt von T. Drei Fälle sind möglich: 1. Der Punkt fällt ins Innere des Bereiches, 2. er fällt auf eine der Grenzlinien, ist aber keine Spitze, 3. der Punkt ist eine der Spitzen von T, d. h. einer der Punkte (a, c); (a, d); (b, c) oder (b, d). Im 1. Fall teilen die Geraden mit den Gleichungen $x = x_0$ und $y = y_0$ den Bereich T in vier Teilbereiche, und obwohl die Näherungspolynome zu $q(x, y)$ und $r(x)$ auch für das ganze Gebiet T bestimmt werden können stellt $f_A(x, y)$ doch nur hinsichtlich jenes Teilbereiches ein Näherungspolynom dar, der durch die Vorzeichen von $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ markiert wird. Auf diese Weise erhält man zu den vier Teilgebieten im allgemeinen vier verschiedene Näherungspolynome. Wenn die Näherungspolynome zu $q(x, y)$ bzw. $r(x)$ in dem eben untersuchten Teilbereich zu bestimmen sind, erhält man selbstverständlich eine bessere Annäherung, anderseits müssen gegenüber dem weiter oben skizzierten Verfahren sowohl für $q(x, y)$ wie für $r(x)$ je vier Näherungspolynome statt der früheren je zwei berechnet werden.

Im 2. Fall wird T von einer der Geraden $y = y_0$ oder $x = x_0$ in zwei Teilbereiche geteilt, die Näherungspolynome zu $f(x, y)$ müssen also für jeden der Teilbereiche gesondert bestimmt werden.

Im 3. Fall bezieht sich das Näherungspolynom auf den ganzen Bereich. Man bestimme die entsprechenden Schranken sowohl von $q(x, y)$ wie von $r(x)$ (ihre Näherungspolynome nullten Grades) für den ganzen Bereich T; sie seien Q_{A_1} bzw. R_{A_2}. Ist (x_0, y_0) eine der Spitzen, so nähert sich im ganzen Bereich das lineare Polynom

$$f_A(x, y) = (y - y_0)\, Q_{A_1} + (x - x_0)\, R_{A_2} + f(x_0, y_0)\,. \tag{3}$$

Bezüglich A_1 und A_2 s. unter (2).

Bestimmt man im Bereich T die Extremwerte von $f_A(x, y)$ (falls $A = +$ das absolute Maximum, falls $A = -$, das absolute Minimum), hat man eine obere bzw. untere Schranke von $f(x, y)$ im Bereich T erhalten. Ist (x_0, y_0) keine Spitze, müssen die Schranken für jeden der Teilbereiche gesondert bestimmt werden, und die Schranke von $f(x, y)$ ergibt sich aus dem Vergleich dieser Schranken.

Zur Bestimmung von Qa_1 ist die Anwendung des 1. Verfahrens selbstverständlich nicht erforderlich, sie kann direkt nach dem 3. Verfahren erfolgen.

4. *Verfahren. Schrankenbestimmung mittels Näherungspolynome zweiten Grades.*

Ist $f(x, y)$ entweder in x oder in y oder in beiden zweiten Grades, so kann es in folgenden Formen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (y - y_0)\, q_1(x, y) + (x - x_0)(x - x_1)\, r_1(x) + \\ &\quad + (x - x_0)\, B + f(x_0, y_0), \quad B = \text{konst.} \\ f(x, y) &= (y - y_0)(y - y_1)\, q_2(x, y) + (y - y_0)\, q_3(x) + \\ &\quad + (x - x_0)\, r_2(x) + f(x_0, y_0), \\ f(x, y) &= (y - y_0)(y - y_1)\, q_2(x, y) + (y - y_0)\, q_3(x) + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)\, r_1(x) + (x - x_0)\, B + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Selbstverständlich sind auch mehrere andere Formen möglich, die obigen ergeben sich aus dem Hornerschen Schema leicht. Die Koordinaten der Spitzen von T seien z. B. x_0 und x_1, ferner y_0 und y_1 und es seien z. B. $x_0 = a$, $x_1 = b$, $y_0 = c$, $y_1 = d$. In diesem Fall erhält man unter Berücksichtigung der obigen Konstruktionen für $f(x, y)$ die folgenden drei Näherungspolynome zweiten Grades:

$$f_A(x, y) = (y - c)\, Q_{1,A} + (x - a)(x - b)\, R_{1,-A} + (x - a)\, B + f(a, c), \tag{4}$$

$$f_A(x, y) = (y - c)(y - d)\, Q_{2-A} + (y - c)\, Q_{3,A} + (x - a)\, R_{2,A} + f(a, c), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f_A(x, y) &= (y - c)(y - d)\, Q_{2-A} + (y - c)\, Q_{3,A} + \\ &\quad + (x - a)(x - b)\, R_{1,-A} + (x - a)\, B + f(a, c), \end{aligned} \tag{6}$$

wo die Schranken der entsprechenden Polynome $q(x, y)$ bzw. $r(x)$ für den Bereich T nach den Verfahren 1,3 oder nach dem vorliegenden Verfahren zu bestimmen sind. Ob untere oder obere Schranken zu wählen sind, kann auf der Grundlage von (2) entschieden werden.

Entsprechende Schranken für $f(x, y)$ können die Extremwerte von (4), (5) und (6) in T liefern.

Selbstverständlich ergeben sich den Ausdrücken (4), (5) und (6) ähnliche Näherungspolynome, wenn sie statt nach (a, c) nach einer anderen Spitze aufgeschrieben werden.

Geht man nicht von einem Spitzenpunkt aus, gilt das zum 3. Verfahren Gesagte.

Durchläuft die Kurve des Polynoms $y_0(x)$ den Bereich T, und beachtet man, daß

$$f(x, y) = [y - y_0(x)] \cdot q(x, y) + r(x),$$

wo sowohl $q(x, y)$ wie $r(x)$ gleichfalls Polynome sind, kann zu $f(x; y)$ das folgende Näherungspolynom aufgeschrieben werden:

$$f_A(x, y) = [y - y_0(x)] \cdot q_{A_1}(x, y) + r_A(x)\,, \tag{7}$$

wo $$A_1\, Sg[y - y_0(x)] = A\,.$$

Mit seiner Hilfe lassen sich für beide der durch die Kurve getrennten Teilbereiche entsprechende Schranken bestimmen.

Bemerkung zu diesen Verfahren. Fällt der gegebene Bereich in den zweiten Quadranten, d. h. gilt für die Koordinaten sämtlicher Punkte des Bereichs $x \leqq 0$, $y \geqq 0$, führt die Untersuchung der Schranke von $f_1(x, y) = f(-x, y)$ zum Ziel im entsprechenden 1. Quadranten. Ähnlich können mit Hilfe der Polynome $f_2(x, y) = f(-x, -y)$ bzw. $f_3(x, y) = f(x, -y)$ Untersuchungen in Bereichen, die in die übrigen Quadranten fallen, auf solche im ersten Quadranten zurückgeführt werden.

III. Untersuchung des Vorzeichens von Polynomen mit zwei Veränderlichen in einem gegebenen Bereich

Die Nullinie des Polynoms $f(x, y)$ sei die durch die Gleichung $y = y(x)$ beschriebene Gerade bezeichnet, bei der $f[x, y(x)] \equiv 0$ ist. Seinem Wesen nach besteht das darzustellende Verfahren in folgendem: Es sei angenommen, daß in einem Punkt des Bereiches $f[x_0, y_0) \neq 0$ ist. In diesem Falle erzeugt man in T ein lineares oder ein Näherungspolynom zweiten Grades, das sich $f(x, y)$, sofern $f(x_0, y_0) > 0$ ist, von unten, sofern $f(x_0, y_0) < 0$ ist, von oben nähert. Kurz gesagt: A wird so gewählt, daß

$$\mathrm{A} \cdot Sg[f(x_0, y_0)] = - \tag{8}$$

wird.

Offenbar wird — wenn (8) erfüllt ist —, für sämtliche Punkte von T, für die die Ungleichung $f_-(x, y) > 0$, gilt, $f(x, y) > 0$. Analog: in sämtlichen Punkten von T, die die Ungleichung $f_+(x, y) < 0$ erfüllen, ist $f(x, y) < 0$.

Die obenangezeigten Teilbereiche von T werden durch die Nullinien der Näherungspolynome bestimmt. Die Untersuchung wird nun von einem Punkt aus fortgeführt, der in dem noch nicht untersuchten Teil von T liegt.

Näher ausgeführt, spielt sich die Vorzeichenuntersuchung wie folgt ab.

Vorzeichenuntersuchung mittels linearer Näherungspolynome

Zur Vorzeichenuntersuchung benutzt man das unter 3. gewonnene lineare Näherungspolynom

$$f_A(x, y) = (y - y_0)\, Q_{A_1} + (x - x_0)\, R_{A_2} + f(x_0, y_0)\,, \tag{3}$$

wobei A auf Grund von (8), A_1 und A_2 auf Grund von (2) zu bestimmen sind. Der Punkt (x_0, y_0) soll als einer der Spitzenpunkte von T betrachtet werden.

Wie zu sehen war, bezieht sich das Näherungspolynom in diesem Fall auf den ganzen Bereich T, es ist demnach auch zur Vorzeichenuntersuchung für den ganzen Bereich T geeignet. Die Gleichung der Nullinie von $f_A(x, y)$ lautet

$$(y - y_0)\, Q_{A_1} + (x - x_0)\, R_{A_2} + f(x_0, y_0) = 0.$$

Hieraus sei die explizite Gleichung der Nullinie (wenn $Q_{A_1} \neq 0$ ist) $y = y_0(x)$.

Zwei Fälle sind hier möglich: Entweder schneidet der Verlauf von $y_0(x)$ keinen der geraden Abschnitte der Grenzen des Bereiches T, in diesem Falle ist das Vorzeichen von $f(x, y)$ im ganzen Bereich T dem Vorzeichen von $f(x_0, y_0)$ gleich, oder die Nullinie des Näherungspolynoms schneidet die Grenzlinien von T und teilt den Bereich damit in zwei Teilbereiche, offenbar stimmt in jenem Teilbereich, in dem der Punkt (x_0, y_0) liegt, das Vorzeichen von $f(x, y)$ mit jenem von $f(x_0, y_0)$ überein, und die Untersuchung ist bloß im anderen Teilbereich weiterzuführen. Als Ausgangspunkt hierzu kann der Schnittpunkt der obigen Nullinien mit einer der Grenzlinien von T dienen. Ist dieser Punkt eine der Spitzen von T, stimmt der weitere Vorgang mit dem obigen überein. Ist er keine Spitze, so wird T, wie zu sehen war, von der durch den Schnittpunkt verlaufenden, zu den benachbarten Grenzlinien parallelen Geraden in zwei Teilbereiche geteilt, und die Vorzeichenuntersuchung ist für beide Teilbereiche durchzuführen, wobei man zwei neue Nullinien erhält. (Zweckmäßig wird man die Schritte der Untersuchung graphisch festhalten, in T die Nullinien der annähernden Polynome einzeichnen und in die bereits untersuchten Teilbereiche das dazugehörige Vorzeichen eintragen.)

Setzt man die Untersuchung längs der in Rede stehenden Grenzlinie weiter fort, ergeben sich wieder zwei mögliche Fälle. Entweder schneidet die nach einer endlichen Zahl von Schritten sich ergebende Nullinie des

Näherungspolynoms die obige Grenzlinie nicht (zumindest nicht innerhalb von T); in diesem Fall besitzt $f(x, y)$ auf dieser Grenzlinie keine Nullstelle. Häufen sich dagegen die Schnittpunkte mit den Nullinien in einem Punkt des abgrenzenden Geradenabschnitts, ist dieser Punkt die Nullstelle von $f(x, y)$, denn jede entgegengesetzte Annahme führt zu Wiedersprüchen. In diesem Falle wählt man in beliebiger Umgebung der Nullstelle einen auf der Grenzlinie liegenden Punkt, von dem aus die Untersuchung weitergeführt wird. Da $f(x, y)$ auf dem gegebenen Grenzabschnitt eine endliche Zahl von Nullstellen besitzen kann (es sei denn, daß der betreffende Abschnitt gerade die Nullinie von $f(x, y)$ wäre, was jedoch der Ausgangsannahme widerspräche), so können die auf dem fraglichen Grenzabschnitt liegenden Nullstellen (richtiger: nullverdächtigen Stellen) mit beliebig kurzen Abschnitten umgeben werden.

Wurde die obige Untersuchung an allen Grenzlinien von T vorgenommen und bleiben noch Teilbereiche von T nicht untersucht, kann die Untersuchung z. B. von einem der Schnittpunkte der den nichtuntersuchten Teilbereich abgrenzenden Nullinien ausgehen. Wie gezeigt, sind diesfalls vier Teilbereiche zu berücksichtigen, und falls sich in jedem ein noch nicht untersuchter Teil findet, ist für jeden derselben das entsprechende Näherungspolynom, bzw. sind seine Nullinien zu bestimmen. Die Vorzeichenuntersuchung ist dann ähnlich dem Gesagten fortzusetzen. Selbstverständlich können die Vorzeichen auch abweichend von dem beschriebenen Verfahren untersucht werden. Wählt man z. B. als Ausgang den Mittelpunkt von T und bestimmt man für jeden der vier Teilbereiche die Nullinien, kann die Untersuchung im nächsten Schritt vom Mittelpunkt eines dieser Teilbereiche aus weitergeführt werden.

Aus den dargelegten Untersuchungen erhellt nach einer endlichen Zahl von Schritten, daß $f(x, y)$ im gegebenen Bereich keine Nullinie aufweist, daß also ihr Vorzeichen in jedem Punkt mit jenem des Ausgangspunktes übereinstimmt; zumindest aber läßt sich eine beliebige Verkleinerung des noch nicht untersuchten Teiles des Bereiches T erreichen. Findet sich in der Nähe der nichtuntersuchten Teile ein Zeichenwechsel, enthält der betreffende Teilbereich mindestens eine Nullinie von $f(x, y)$. Findet dagegen kein Zeichenwechsel statt, führen weitere Schritte auf diesem Gebiet zum Erfolg.

Die Konvergenz des obigen Verfahrens läßt sich steigern, indem man z. B. das lineare Näherungspolynom auf der Grundlage von (7) im zweiten Schritt in folgender Form aufschreibt:

$$f_A(x, y) = [y - y_0(x)]Q_{A_1} + (x - x_1)R_{A_2} + f[x_1 y_0(x_1)],$$

wobei $y_0(x)$ die Nullinie des vorherigen Näherungspolynoms ist. Zu A, Q_{A_1} und R_{A_2} siehe die vorangegangene Bemerkung.

Vorzeichenuntersuchung mit Hilfe von Näherungspolynomen zweiten Grades

Werden die entsprechenden Bedingungen, und so selbstverständlich auch (8) erfüllt, liefern (4), (5) und (6) die Näherungspolynome zweiten Grades. Besonders vorteilhaft ist die Vorzeichenuntersuchung mit Näherungspolynomen 2. Grades, wenn $f(x, y)$ in zwei benachbarten Spitzen von T die gleichen Vorzeichen hat. Die Nullinien der Näherungspolynome sind Kegelschnitte, so daß sie sich der allfälligen Nullinie von $f(x, y)$ rascher und besser annähern. Dem Wesen nach geht die Untersuchung ebenso vor sich wie mit linearen Funktionen. Beide Verfahren können auch gemischt werden, indem etwa, wenn es die Struktur von $f(x, y)$ zuläßt, der erste Schritt in allen vier Spitzen mit Näherungspolynomen 2. Grades unternommen wird, und die weiteren Schritte in den restlichen Teilbereichen mit linearen Polynomen folgen.

Verwendet man (4) als Näherungspolynom, kann die Konvergenz auf der Grundlage von (7) auch hier gesteigert werden.

Ist das Vorzeichen des Polynoms $f(x, y)$ nicht im I. Quadranten zu untersuchen, sind die an Abschn. II. geknüpften Bemerkungen richtungweisend.

Bemerkung zur Vorzeichenuntersuchung. Die Vorzeichenuntersuchung vereinfacht sich, wenn man in ihr die Derivate von $f(x, y)$ bzw. deren Schranken verwendet.

Nach dem Mittelwertsatz von Lagrange erhält man nämlich

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f(x,y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) =$$
$$= (y - y_0) f'_y(x, \eta) + (x - x_0) f'_x(\xi, y_0) ,$$

wo $\eta = y_0 + \vartheta_1 (y - y_0)$, $\xi = x_0 + \vartheta_2 (x - x_0)$, $0 < \vartheta_1 < 1$, $Q < \vartheta_2 < 1$.

Wenn also (x_0, y_0) ein Punkt von T ist, hat man folgendes Polynom:

$$f_A(x,y) = (y - y_0) f'_{yA_1}(x,y) + (x - x_0) f'_{xA_2}(x,y) + f(x_0, y_0) ,$$

wo A, A_1 und A_2 auf der Grundlage von (8) bzw. (2) zu bestimmen sind. Bestimmt man weiters die Näherungspolynome nullten Grades, d. h. die Schranken der einzelnen Derivate im Bereich T, ergibt sich das lineare Näherungspolynom

$$f_A(x, y) = (y - y_0)\, F'_{yA_1} + (x - x_0)\, F'_{xA_2} + f(x_0, y_0) .$$

Dies hat den Vorteil, mit der Bestimmung der vier Schranken die Untersuchung von jedem beliebigen Punkt aus beginnen zu können. Auch ist es nicht erforderlich, zu jedem Ausgangspunkt die Polynome $q(x, y)$ und $r(x)$ zu bestimmen.

IV. Polynome mit n Veränderlichen

Was über die Schranken bzw. über das Vorzeichen der Polynome mit zwei Veränderlichen gesagt wurde, kann auf Polynome mit n Veränderlichen leicht übertragen werden. Nach obigem können die Polynome mit n Variablen wie folgt definiert werden:

Es seien $x_1, x_2, \dots x_n$, n unabhängige reelle Variable, das Polynom hierzu:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \sum_{k=0} a_k^{(n-1)} x_n^k ,$$

wo $a_k^{(n-1)}$ nicht von x_n abhängig ist,

$$a_k^{(n-1)} = \sum_{k=0} a_k^{(n-2)} x_{n-1}^k ,$$

wo $a_k^{(n-2)}$ nicht von x_n und x_{n-1} abhängt u. s. f. Es sei T: $0 \leqq a_k \leqq x_k \leqq b_k$, $k = 1, 2, \dots n$, und $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0})$ ein Punkt von T. Das Polynom läßt sich wie folgt aufschreiben:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k0})\, q_k(x_1, x_2, \dots x_k) + f(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0}) .$$

Die Näherungspolynome sind:

$$f_A(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k0})\, q_{kA_k}(x_1, x_2, \dots x_k) + f(x_{10}, \dots x_{n0}) .$$

A_k ist wie folgt zu wählen:

$$A_{KA}\, Sg(x_k - x_{k0}) = A.$$

Die Bestimmung von q_{kA_k} kann nach dem in Abschn. II. Gesagten erfolgen. A ist so zu wählen, daß sich

$$A \cdot Sg[f(P_0)] = -$$

ergibt (Abschn. III). Jede Bereichsschranken- bzw. Vorzeichenuntersuchung läßt sich auch hier auf die Untersuchung im ersten $1/2^n$ Raumteil zurückführen.

Zusammenfassung

Die Ausführungen im I. Teil gelten ihrem Wesen nach der Bestimmung der Halbmesser von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der gegebenen Kurve liegen, wobei sich im Inneren der Kreise kein Nullpunkt des Polynoms befindet.

Die Mittelpunkte laufen die Kurve entlang, ausgenommen eine höchstens endliche Zahl von Bogenstücken, die sich in Kreise von beliebig kleinem Halbmesser fassen lassen.

Der II. Teil behandelt die Erzeugung von Flächen, die eine durch die Gleichung $z = f(x, y)$ beschriebene Fläche — geometrisch gesprochen — von unten bzw. von oben approximieren und so einfach konstruiert sind, daß ihre im Bereich liegenden Extremwerte auf elementarem Weg bestimmbar sind. Diese Extremwerte liefern die gesuchten Schranken.

Im III. Teil bestimmt der Verfasser anhand der im II. Teil beschriebenen Näherungspolynome in der Umgebung jenes Bereichspunktes, in dem $f(x, y) \neq 0$ ist, einen solchen Teil des gegebenen Bereichs, in dem $f(x, y)$ zeichenbeständig bleibt. Das Verfahren wird in einem am Umfang des obigen Teilbereiches gewählten Punkt wiederholt. Die Untersuchung kann fortgesetzt werden, solange die allfälligen Nullinien von $f(x, y)$ nicht von Teilbereichen beliebig kleiner Fläche umgrenzt sind.

Teil IV. erörtert ganz kurz die Anwendbarkeit der Ausführungen unter II. und III. auf Polynome mit n Veränderlichen.

Literatur

1. MARDEN, M.: The geometry of the zeros of a polynomial in a komplexvariable. New York. 1949.
2. GONCALVES, I. V.: Recherches modernes sur limites des racines des polynomes. Lisboa. 1958.
3. SPECHT, W.: Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Stuttgart. 1958.
4. FARAGÓ, T.: Ein elementares Verfahren zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. Budapest. Periodica Polytechnica 1963.

Dr. Tibor FARAGÓ, Budapest XI. Sztoczek u. 2—4, Ungarn.