МЕТОДИКА РАСЧЕТА ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Й. КОЧИШ и Ф. ЧАКИ

Политехнический университет, Будапешт, Кафедра автоматизации

(Поступило 23 Марта 1964 г.)

Введение

В настоящее время литература по расчету импульсных систем весьма широкая. По этой теме сейчас уже опубликовано несколько сот статей и книг. К сожалению в этой области еще не сложились единые методы расчета и единая терминология. Различия имеются между русскими, английскими, французскими, немецкими и др. публикациями. Настоящая статья ставит цель облегчить ориентировку в области литературы по импульсным системам и дать, по возможности, общее обозрение различных расчетных методов. В статье представлены различные преобразования: дискретное преобразование Лапласа, z-преобразование, ζ-преобразование и E-преобразование; сравнение различных преобразований; таблицы основных теорем различных преобразований и, наконец, таблица возможности перехода с одного расчетного метода на другой.

Понятие импульсной системы

Импульсными системами регулирования (Sampled Data Control Systems, Abtastsysteme, Systèmes Échantillonnés) называются замкнутые или разомкнутые системы, в которых входной сигнал действует на дробь τ периода T под влиянием импульсного устройства; таким образом на вход системы влияет входной сигнал только в течение промежутка времени τ. Расчеты могут производиться при постоянном значении τ [7], [8] и при предельном переходе $\tau \to 0$ [1], [3].

Решетчатые функции

Расчеты непрерывных систем можно выполнить легче при помощи обычного преобразования Лапласа. Однако, в дискретных системах находятся и непрерывные, и решетчатые функции.

Пусть задана некоторая непрерывная функция $f(t)$. Для того, чтобы получить решетчатую функцию, областью существования которой являются только дискретные моменты времени $O, T, 2T, \ldots$; целесообразным оказывается введение, в качестве новой безразмерной независимой переменной, $\bar{t}=t/T$. Так $f(t)=f(T\bar{t})$. Если ординаты непрерывной функции существуют только в дискретные моменты времени $t=nT$ (n 0, 1, 2,. . .;), то получается решетчатая функция из непрерывной функции. Итак, решетчатой функцией, возникшей из функции $f(t)$, является:

$$f(t)\Big|_{t=nT}=f(T\bar{t})\Big|_{\bar{t}=\frac{nT}{T}}=f(nT)=f[n]. \tag{1}$$

Дискретное преобразование Лапласа [1], [9]

(кратко: D-преобразование; метод Цыпкина)

Дискретное преобразование Лапласа является функциональным преобразованием решетчатых функций $f[n]$ и определяется соотношением

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-qn}\cdot f[n]. \tag{2}$$

Здесь $q=\sigma+j\omega$ — комплексное число, называемое параметром преобразования. По аналогии с обычным преобразованием Лапласа функцию $f[n]$ назовем оригиналом, а функцию $F^*(q)$ — изображением его. Соответствие между оригиналом и изображением решетчатых функций можно записать условно в виде

$$F^*(q)=D\{f[n]\}. \tag{3}$$

Соотношение (2) определяет бесконечный ряд. Для того, чтобы ряд (2) сходился, нужно найти абсциссу сходимости: $\mathrm{Re}q=\sigma_c<\infty$. Тогда ряд (2) будет сходиться при всех значениях q, удовлетворяющих условие $\mathrm{Re}q=\sigma<\sigma_c$.

Дискретное преобразование Лапласа позволяет решать разностные уравнения, сохраняя при этом те же удобства, которые имеют обычное преобразование Лапласа при решении дифференциальных уравнений. Объяснения определения разностных уравнений, описывающих процессы в импульсных системах регулирования, подробно описываются в литературе по теме [1], [9].

Сущность решения разностных уравнений состоит в следующем. Применяя дискретное преобразование Лапласа к линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами на основании теорем линейности, сдвига или изображения разностей, получим алгебраическое уравнение относительно изображения, которое содержит в себе уже все граничные условия.

Следующий этап состоит в нахождении оригинала по полученному изображению. В простейших случаях это можно сделать на основе имеющихся уже соответствий между оригиналами и изображениями. Когда такая возможность отсутствует, следует воспользоваться результатами общего метода определения оригинала по изображению, идея которого состоит в следующем.

Пусть задано следующее разностное уравнение, k-го порядка:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n+1] + \ldots + a_k y[n+k] = f[n] \tag{4}$$

с граничными условиями

$$y[0] = y_0;\ y[1] = y_1;\ \ldots;\ y[k-1] = y_{k-1}. \tag{5}$$

Подвергнем уравнение (4) дискретному преобразованию Лапласа на основе теоремы сдвига:

$$\begin{aligned}(\sigma_0 + a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \ldots + a_k e^{kq})\, Y^*(q) = F^*(q) + \\ + (a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \ldots + a_k e^{kq})\, y_0 + \\ + (a_2 e^{2q} + \ldots + a_k e^{kq})\, y_1 + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + a_k e^{kq} y_{k-1}.\end{aligned}$$

Здесь

$$D\{y[n]\} = Y^*(q) \quad \text{и} \quad D\{f[n]\} = F^*(q). \tag{6}$$

Введем обозначение:

$$a_0 + a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \ldots + a_k e^{kq} = G^*(q). \tag{7}$$

Тогда изображение $Y^*(q)$ можно представить в виде

$$Y^*(q) = \frac{F^*(q)}{G^*(q)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i e^{iq}}{G^*(q)} = \frac{F^*(q)}{G^*(q)} + \frac{E^*(q)}{G^*(q)}, \tag{8}$$

где

$$E^*(q) = A_1 e^q + A_2 e^{2q} + \ldots + A_k e^{kq}$$

и

$$\begin{aligned}A_1 &= a_1 y_0 + a_2 y_1 + \ldots + a_{k-1} y_{k-2} + a_k y_{k-1}\\ A_2 &= a_2 y_0 + a_3 y_1 + \ldots + a_{k-1} y_{k-3} + a_k y_{k-2}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_k &= a_k y_0.\end{aligned}$$

Дальнейшая задача состоит в определении оригинала (решетчатой функции) по найденному изображению. Общая формула имеет вид:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(q)\, e^{qn}\, dq. \tag{9}$$

Вычисление соотношения (9) в такой форме трудно, поэтому введем формулы разложения.

Предположим, что изображение $Y^*(q)$ может быть приведено к форме

$$Y^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)}, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} G^*(q) &= a_0 + a_1 e^q + \ldots + a_k e^{kq} \\ H^*(q) &= b_0 + b_1 e^q + \ldots + b'_k e^{k'q} \end{aligned} \tag{11}$$

— многочлены по e^q, причем степень k' не превышает степены k:$k' \leq k$.

Пусть в самом общем случае будут полюсы $Y^*(q)$:q_1; q_2;...; q_s. (они одновременно являются корнями уравнения $G^*(q) = 0$).

Положим, что имеются кратные полюсы

q_1 кратности r_1

q_2 кратности r_2

. . . .

q_s кратности r_s

тогда

$$y[n] = \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\mu=0}^{r_\nu - 1} c_{\mu\nu} \frac{n^{(\mu)}}{\mu!} e^{q_\nu (n-\mu)}, \tag{12}$$

где

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{(r_\nu - \mu - 1)!} \frac{d^{r_\nu - \mu - 1}}{de^{q(r_\nu - \mu - 1)}} \left\{ \frac{H^*(q)}{e^q G^*(q)} (e^q - e^{q_\nu})^{r_\nu} \right\}_{q = q_\nu}. \tag{13}$$

А если $Y^*(q)$ имеет только простые корни q_ν, отличные от нуля (т. е. $s = k$; $r = 1$; $\mu = 0$), тогда из (13):

$$c_{0\nu} = \frac{H^*(q_\nu)}{e^{q_\nu} \dot{G}^*(q_\nu)}; \quad \text{здесь:} \quad \dot{G}(q_\nu) = \frac{d}{de^q} \{G^*(q)\}_{q = q_\nu} \tag{14}$$

и из (12):

$$y[n] = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{H^*(q_\nu)}{e^{q_\nu} \dot{G}^*(q_\nu)} e^{\nu n}. \tag{15}$$

ζ-преобразование (метод Tschauner) [2]

Изображение $F(\zeta)$ определяется тоже бесконечным степенным рядом:

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] (1 + \zeta)^{-n} = \mathfrak{Z} \{f[n]\}, \tag{16}$$

где $f[n]$ решетчатая функция, ζ-комплексный параметр преобразования.

Метод вычисления выходного сигнала подобен описанному выше дискретному преобразованию Лапласа. Действительны и теоремы, только следует брать e^q на $1 + \zeta$.

z-преобразование (метод Ragazzini, Zadeh) [3], [4], [5], [6]

Математическое описание этого метода отличается от предыдущих.

Пусть будет функция: $f(t)$ квантируемая непрерывная функция.

Пусть задан бесконечный ряд единичных импульсов:

$$i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{17}$$

где $\delta(t)$ — функция единичного импульса, так называемая дельта-функция Дирака; T-период квантования.

С помощью этого ряда импульсов можно представить квантированную функцию в виде:

$$f^*(t) = f(t) \cdot i^*(t). \tag{18}$$

Подвергнем уравнение (18) обычному преобразованию Лапласа:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \mathscr{L}\{f(t)\, i^*(t)\} = F(s) * I^*(s) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\, I^*(s-p)\, dp. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь мы пользовались теоремой свертки. На основании уравнения (17):

$$I^*(s) = \mathscr{L}\{i^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}. \tag{20}$$

Из уравнений (17), (20):

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}}\, dp, \tag{21}$$

где изображение $F(p)$ обозначает преобразование Лапласа непрерывной функции $f(t)$.

Уравнение (21) можно вычислить при помощи теоремы о вычетах. Если полюсы простые:

$$F^*(s)=\sum_{m=1}^{P}\frac{F_z(p_m)}{F'_p(p_m)}\cdot\frac{1}{1-e^{-(s-p_m)T}}. \tag{22}$$

Здесь P обозначает число полюсов $F(p)$.

Если

$$F(p)=\frac{F_z(p)}{F_p(p)} \quad \text{и} \quad F'_p(p)=\frac{dF_p(p)}{dp} \tag{23}$$

и p_m обозначает m-ый простой полюс функции $F(p)$, (т. е. обозначает m-ый простой корень уравнения $F(p)=0$).

Если подставить в соотношение (22) $z=e^{sT}$; получается z-преобразование квантированной функции $f^*(t)$:

$$F(z)=F^*(z)=F^*(s)\Big|_{z=e^{sT}}. \tag{24}$$

z-преобразование можно представить также в следующем виде:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,z^{-n}. \tag{25}$$

Расчет в дальнейшем подобен расчетам D-преобразования. Таким же образом после определения z-преобразования выходного сигнала обратным преобразованием определяются ординаты выходного сигнала в моменты квантования.

Здесь общая формула обратного преобразования:

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}F(z)\,z^{n-1}\,dz, \tag{26}$$

где кривая Γ окружает все полюсы функции $F(z)$.

Если система устойчива, полюсы размещаются внутри круга с единичным радиусом.

Обратное преобразование можно осуществить при помощи таблиц, включающих в себе изображения. Кроме того, обратное преобразование можно выполнить с помощью разложения функции $F(z)$ по степеням z^{-n} (ряд Лорана):

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}=f(0T)\,z^{-0}+f(1T)\,z^{-1}+f(2T)\,z^{-2}+\ldots. \tag{27}$$

В этом случае коэффициенты членов z^{-n} дают ординаты квантированной функции $f^*(t)$, в дискретные моменты времени $t = nT$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Е-преобразование или Z-преобразование (метод Kaufmann и Naslin) [7], [8]

Это преобразование по принципу расчетного метода подобно предыдущему, т. е. Z-преобразованию. Между ними имеются следующие различия.

Преобразование Лапласа квантированной функции здесь представлено в виде

$$F^*(s) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT}. \tag{28}$$

Итак, здесь квантированная функция будет:

$$f^*(t) = f(t)\, U^*(t), \tag{29}$$

где

$$U^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1 (t - nT) \tag{30}$$

и

$$\delta_1(t) = \begin{matrix} 0 & \text{если} & t < 0 \\ 1 & \text{,,} & 0 < t < \tau \\ 0 & \text{,,} & \tau < t. \end{matrix} \tag{31}$$

Предполагается, что период квантования $T \gg \tau$ (τ обозначает ширину импульсов), и поэтому в течении времени τ ординату непрерывной функции $f(t)$ можно принимать постоянной, во время влияния n-го импульса которая равна постоянной ординате $f(nT)$.

Изображение E-, или Z-преобразования имеет теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} F(E) &= F(Z)\Big|_{E=Z} = F^*(s)\Big|_{E=e^{-sT}} = \\ &= \tau \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, E^n = \tau \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, Z^n. \end{aligned} \tag{32}$$

Различия имеются и между E- и Z-преобразованиями, но они состоят только в том, что по методу Naslin (E-преобразование) E обозначает оператор перемещения, определяемый уравнением

$$E \cdot f(t) = f\,(t - T), \tag{33}$$

а в методе Kaufmann (Z-преобразование) Z обозначает комплексную переменную. Все-таки конечные результаты обоих преобразований (Z и E) одинаковые.

Таблица различных изображений некоторых функций

В этой таблице включены изображения основных функций. В таблице представлены и изображения, полученные по обычному преобразованию Лапласа. Целью таблицы является представление и сравнение различных расчетных методов

Квантируемая функция времени	Изображение по обычному преобразованию Лапласа	Изображение по Цыпкину D-преобразование	Изображение по Ragazzini z-преобразование	Изображение по Tschauner ζ-преобразование	Изображение по Naslin и по Kaufmann E- и Z-преобразование
$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$	$D\{f[n]\}=F_z^*(q)$	$F_R(z)$	$\mathfrak{Z}\{f^*(t)\}=F_T(\zeta)$	$E\{f^*(t)\}=F_N(E)$
$\delta(t)$	1	1	1	1	1
$\delta(t-nT)$	e^{-nTs}	e^{-qn}	z^{-n}	$(1+\zeta)^{-n}$	E^n
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}'\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\frac{e^q}{e^q-1}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1+\zeta}{\zeta}$	$\frac{1}{1-E}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{e^q}{e^q-1}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1+\zeta}{\zeta}$	$\tau\frac{1}{1-E}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$T\frac{e^q}{(e^q-1)^2}$	$T\frac{z}{(z-1)^2}$	$T\frac{1+\zeta}{\zeta^2}$	$\tau T\frac{E}{(1-E)^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2}{2}\cdot\frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\cdot\frac{(1+\zeta)(2+\zeta)}{\zeta^3}$	$\tau\frac{T^2}{2}\frac{E(E+1)}{(1-E)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{e^q}{e^q-e^{-aT}}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1+\zeta}{1+\zeta-e^{-aT}}$	$\tau\frac{1}{1-E^{-aT}}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-1/T\cdot\ln a}$	$\frac{e^q}{e^q-a}$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1+\zeta}{1+\zeta-a}$	$\tau\frac{1}{1-Ea}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{e^q\sin\omega T}{e^{2q}-2e^q\cos\omega T+1}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\frac{(1+\zeta)\sin\omega T}{\zeta^2+2\zeta(1-\cos\omega T)+2(1-\cos\omega T)}$	$\tau\frac{E\sin\omega T}{E^2-2E\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{(e^q-\cos\omega T)e^q}{e^{2q}-2e^q\cos\omega T+1}$	$\frac{(z-\cos\omega T)z}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\frac{(1+\zeta)(1+\zeta-\cos\omega T)}{\zeta^2+2\zeta(1-\cos\omega T)+2(1-\cos\omega T)}$	$\tau\frac{1-E\cos\omega T}{E^2-2E\cos\omega T+1}$

Таблица основных уравнений по разным преобразованиям

Следующая таблица включает в себе основные уравнения различных преобразований, в частности формулы определения изображения по заданному оригиналу и основные формулы обратного преобразования. В таблице на одном и том же месте находятся формулы преобразований E и Z по причине их точной аналогии в результатах. В таблице различные изображения обозначены со значками, которые указывают на автора, а именно D-преобразование со значком «Z» (Zypkin); z-преобразование со значком «R» (Ragazzini); ζ-преобразование со значком «T» (Tschauner); E-преобразование со значком «N» (Naslin).

	Формула преобразования	Формула обратного преобразования
D-преобразование	$F_Z^*(q)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f[n]\, e^{-qn}$	$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\pi}^{c+j\pi} F_Z^*(q)\, dq$
z-преобразование	$F_R(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}$	$f^*(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F_R(z)\, dz$
ζ-преобразование	$F_T(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f[n]\,(1+\zeta)^{-n}$	$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint F_T(\zeta)\,(1+\zeta)^{n-1} d\zeta$
E-преобразование	$F_N(E)=\tau\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nT)\, E^n$	$f^*(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F_N(E)\, E^{-n-1}\, dE$

Таблица возможности перехода одного расчетного метода к другому

Всегда можно легко перейти от одного расчетного метода к другому простой заменой или простым преобразованием. В следующей таблице даны замены и преобразования, необходимые при перемене.

Изображения по различным методам	$F_z^*(q)$	$F_R(z)$	$F_T(\zeta)$	$F_N(E)$
$F_z^*(q)$	—	$q=\ln z$	$q=\ln(1+\zeta)$	$q=-\ln E$ умножение на τ
$F_R(Z)$	$z=e^q$	—	$z=1+\zeta$	$z=\frac{1}{E}$ умножение на τ
$F_T(\zeta)$	$\zeta=e^q-1$	$\zeta=z-1$	—	$\zeta=\frac{1}{E}-1$ умножение на τ
$F_N(E)$	$E=e^{-q}$ деление на τ	$E=\frac{1}{z}$ деление на τ	$E=\frac{1}{1+\zeta}$ деление на τ	—

Резюме

В статье представлены различные преобразования, применяемые в области теории импульсных систем регулирования: D-преобразование (метод Цыпкина), z-преобразование (метод Ragazzini и Zadeh), Z-преобразование (метод Kaufmann), E-преобразование (метод Naslin), ζ-преобразование (метод Tschauner). В таблице суммированы основные уравнения различных преобразований, в частности формулы определения изображения по заданному оригиналу и основные формулы обратного преобразования. В таблицу включены также изображения основных функций, по различным методам. Наконец, статья показывает, каким образом можно перейти от одного расчетного метода к другому.

Литература

1. *Цыпкин, Я. З.:* Теория импульсных систем. Гос. Издат., Москва, 1958.
2. TSCHAUNER, J.: Einführung in die Theorie der Abtastsysteme. R. Oldenburg, München, 1960.
3. TOU, J. T. Digital and Sampled-Data Control Systems. Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York, 1959.
4. RAGAZZINI, R., FRANKLIN, G. F.: Sampled-Data Control Systems. Mc. Graw-Hill Book Co. Inc., New York, 1958.
5. JURY, E. I.: Sampled-Data Control Systems. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958.
6. RAGAZZINI, J. R., ZADEH, L. A.: The Analysis of Sampled-Data Control Systems. AIEE Trans., Vol. 71. pt. II. pp. 225—34 (1952).
7. KAUFMANN, H.: Dynamische Vorgänge in linearen Systemen der Nachrichten- und Regelungstechnik. R. Oldenbourg, München, 1959.
8. NASLIN, P.: Calcul des regimes transitoires par la methode des transformées en E. Automatisme, 1961. I., II., III., p. 5—9, 62—66, 112—116.
9. *Цыпкин, Я. З.:* Теория линейных импульсных систем. Гос. Издат., Москва, 1963.

János KOCSIS
Prof. Dr. Frigyes CSÁKI
Budapest XI., Egry József u. 18—20.