

# OSZILLOGRAPHISCHE AUFNAHME UND HARMONISCHE ANALYSE VON DREIPHASEN-VEKTOREN

Von

I. RÁCZ

Technische Universität, Budapest. Lehrstuhl für Elektrische Maschinen

(Eingegangen am 1. Juni 1964)

## 1. Einleitung

Zum Studium der transienten Vorgänge, der asymmetrischen oder der nichtsinusoidalen stationären Betriebszustände von Dreiphasenmaschinen bildet die Anwendung der Parkschen Vektoren eine der zweckmäßigsten Methoden. Diese Vektoren ermöglichen es, mit weniger Gleichungen zu arbeiten, sie stimmen mit den Richtungen der in der Maschine befindlichen physikalischen Größen überein, und schließlich sind die Vektordiagramme bzw. Bahnen anschaulicher als die mit den Momentanwerten der Phasengrößen hergestellten Zeichnungen. Aus den Vektordiagrammen lassen sich auch die Momentanwerte aller drei Phasengrößen sehr einfach ermitteln.

Die Vektoren können mit einem Kathodenstrahloszillographen sichtbar gemacht und photographiert werden. In den meisten Fällen können diese Aufnahmen einfacher ausgewertet werden als die mit dem Schleifenzoszillographen aufgenommenen Zeitfunktionen. Der vorliegende Artikel behandelt die Möglichkeiten des Oszillographierens dreiphasiger Spannungs- und Stromvektoren und einige Auswertungsmethoden. So kann z. B. das Stromvektordiagramm oder die Auslaufkurve der Asynchronmaschinen aufgenommen werden. Bei nichtsinusoidalem stationärem Betriebszustand lassen sich die Amplituden der einzelnen Oberwellen unschwer rechnerisch ermitteln und schätzen. Zunächst sollen die wichtigsten Zusammenhänge der Vektoren zusammengefaßt werden, während abschließend an einem Beispiel demonstriert werden soll, wie gut sich die vektorielle Methode für das Studium des Betriebes von Asynchron- oder Synchronmaschinen eignet, die zwecks Frequenzregelung durch Stromrichter gespeist werden.

An dieser Stelle danke ich meinen gewesenen Hörern L. Füri, I. Schmidt und L. Szentesi, die sich im Studentenkreis mit dem Oszillographieren von Vektoren befaßt haben. Die mitgeteilten Aufnahmen habe ich ihren Diplomarbeiten entnommen.

## 2. Die Grundeigenschaften der Dreiphasen-Vektoren

2.1. *Definition.* Der Vektor  $\mathbf{u}$  der Spannungen kann aus den Momentanwerten  $u_a, u_b, u_c$  der Phasenspannungen aus der Formel

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3} (u_a + \mathbf{a}u_b + \mathbf{a}^2 u_c) \quad (2.1)$$

ermittelt werden (Abb. 1), in der

$$\mathbf{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}^2 = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.2)$$

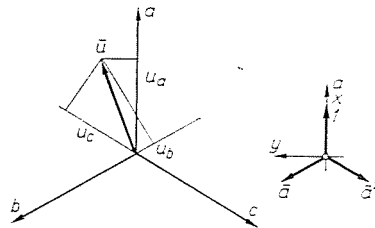


Abb. 1

die in Richtungen der Phasenachsen  $b$  und  $c$  zeigende Einheitsvektoren bezeichnen. Die reelle Achse der komplexen Zahlenebene fällt mit der Phasenachse  $a$  zusammen.

Da  $\mathbf{u}$  ein Ebenenvektor ist, enthält er zwei Daten. Zur eindeutigen Bestimmung der drei Phasenspannungen bedarf es im allgemein noch einer Angabe, der Nullkomponente der Spannungen:

$$u_0 = \frac{1}{3} (u_a + u_b + u_c). \quad (2.3)$$

Der Vektor und die Nullkomponente von Strömen und Flußverkettungen können ähnlich definiert werden. In der überwiegenden Zahl der praktisch vorkommenden Fälle sind die Nullkomponenten gleich Null.

Für die so definierten Vektoren sind in der Literatur verschiedene Bezeichnungen gebräuchlich, wie Parkscher Vektor, resultierender, darstellender, räumlicher Vektor, Momentanwert der symmetrischen Komponenten usw. Im folgenden wird er Dreiphasen-Vektor oder einfach Vektor genannt.

2.2. *Momentanwert der Phasengrößen.* Die Einführung von  $\mathbf{u}$  und  $u_0$  statt der Größen  $u_a, u_b, u_c$  kann als Koordinatentransformation aufgefaßt

werden. Die Angabe von  $\mathbf{u}$  und  $u_0$  bestimmt die Phasengrößen  $u_a, u_b, u_c$  eindeutig. Sie errechnen sich zu

$$\begin{aligned} u_a &= \operatorname{Re}\{\mathbf{u}\} + u_0, \\ u_b &= \operatorname{Re}\{\mathbf{a}^2 \mathbf{u}\} + u_0, \\ u_c &= \operatorname{Re}\{\mathbf{a} \mathbf{u}\} + u_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

was aus den obigen Zusammenhängen einfach bewiesen werden kann.

Hier ist  $\operatorname{Re}\{\mathbf{u}\} = u_x$  der Realteil des Vektors  $\mathbf{u}$ , also die Projektion des Vektors auf die Realachse  $x$ , d. h. auf die Achse  $a$ . Ähnlich sind die Ausdrücke  $\operatorname{Re}\{\mathbf{a}^2 \mathbf{u}\}$  und  $\operatorname{Re}\{\mathbf{a} \mathbf{u}\}$  die Projektionen des Vektors  $\mathbf{u}$  auf die Achsen  $b$  und  $c$ . Wenn  $u_0 = 0$ , sind die Momentanwerte in den einzelnen Phasen gleich den Projektionen des Vektors auf die betreffenden Phasenachsen.

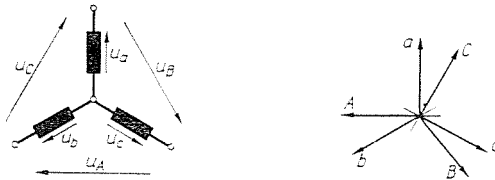


Abb. 2

2.3. Zusammenhang der verketteten Phasengrößen. Abb. 2 zeigt eine Sternschaltung. Der Zusammenhang zwischen Phasen- und verketteten Spannungen schreibt sich zu

$$\begin{aligned} u_A &= u_b - u_c, \\ u_B &= u_c - u_a, \\ u_C &= u_a - u_b. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Um den Vektor  $\mathbf{u}_A$  der verketteten Spannungen  $u_A, u_B, u_C$  gemäß (2.1) zu erhalten, hat man die obigen Gleichungen mit 1,  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}^2$  und nach Summierung mit  $2/3$  zu multiplizieren. Da  $\mathbf{a}^3 = 1$ , läßt sich das Ergebnis auch in der Form

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{a}^2 \frac{2}{3} (u_a + \mathbf{a} u_b + \mathbf{a}^2 u_c) - \mathbf{a} \frac{2}{3} (u_a + \mathbf{a} u_b + \mathbf{a}^2 u_c),$$

also

$$\mathbf{u}_A = (\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}) \mathbf{u} = -j \sqrt{3} \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

aufschreiben.

Der Vektor  $\mathbf{u}_A$  der verketteten Spannungen kann also sehr einfach aus dem Vektor  $\mathbf{u}$  der Phasenspannungen bestimmt werden. In der Praxis erübrigt sich auch dies, weil die Projektionen des Vektors  $\mathbf{u}$  sofort auch die Momentan-

werte der verketteten Spannungen angeben. So ist beispielsweise der Momentanwert

$$u_A = \operatorname{Re} \{ \mathbf{u}_A \} = \operatorname{Re} \{ -j \sqrt{3} \mathbf{u} \} = \sqrt{3} \operatorname{Im} \{ \mathbf{u} \} = \sqrt{3} u_y \quad (2.7)$$

auf die Achse  $A$ , wenn eine Maßstabänderung um  $\sqrt{3}$  vorgenommen wird. Ähnlich erhält man  $u_B$  und  $u_C$  aus den Projektionen auf die Achsen  $B$  und  $C$ .

Bei Dreieckschaltungen (Abb. 3) sind der Formeln (2.5) ähnliche Zusammenhänge zwischen den Phasenströmen  $i_a, i_b$  und  $i_c$  und Linienströmen  $i_A, i_B$  und  $i_C$ , z. B.  $i_A = i_b - i_c$  gültig. Aus diesem Grunde kann der Vektor  $i_l$

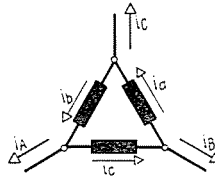


Abb. 3

der Linienströme entsprechend der Gleichung (2.6) mit dem Vektor  $\mathbf{i}$  der Phasenströme in der Form

$$\mathbf{i}_l = -j \sqrt{3} \mathbf{i} \quad (2.8)$$

ausgedrückt werden.

Die Momentanwerte der Linienströme sind mit einer  $\sqrt{3}$ -fachen Maßstabänderung gleich den Projektionen des Phasenstromvektors  $\mathbf{i}$  auf die Achsen  $A, B$  und  $C$ .

2.4. *Momentanwerte der Leistung und des Drehmomentes.* Die Summe der augenblicklichen Leistungen der drei Phasen ist

$$p = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c.$$

Es läßt sich einfach nachweisen, daß die Leistungssumme mit Hilfe der Vektoren in der Form

$$p = \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} + 3 u_0 i_0 \quad (2.9)$$

ausgedrückt werden kann. Hier ist  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}$  ein Skalarprodukt, das sich in komplexer Form zu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \operatorname{Re} \{ \hat{\mathbf{u}} \mathbf{i} \} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{u} \hat{\mathbf{i}} \} \quad (2.10)$$

errechnet.

Der Zirkumflex bezeichnet hierbei die Konjugierte der komplexen Vektoren. Die Gl. (2.10) leuchtet einfach ein, wenn die Vektoren in ihren exponentiellen Formen aufgeschrieben werden:

$$\mathbf{u} = U e^{i\varphi_u} \quad \text{und} \quad \mathbf{i} = I e^{j\varphi_i}.$$

Bei symmetrisch aufgebauten Dreiphasenmaschinen errechnet sich der Augenblickswert des Drehmomentes zu

$$m = \frac{3}{2} p \psi \times \mathbf{i}, \quad (2.11)$$

wo  $p$  die Zahl der Polpaare,  $\psi$  bzw.  $\mathbf{i}$  die Vektoren der Flußverkettungen und Ströme in den Ständerwicklungen bedeuten. Das Vektorprodukt schreibt sich in der Form

$$\begin{aligned} \psi \times \mathbf{i} &= \operatorname{Im} \{ \hat{\psi} \mathbf{i} \} = \operatorname{Im} \{ -\psi \hat{\mathbf{i}} \} = \\ &= \operatorname{Re} \{ -j \hat{\psi} \mathbf{i} \} = \operatorname{Re} \{ j \psi \hat{\mathbf{i}} \}. \end{aligned}$$

Zur Ableitung der Formel (2.11) wird auf die Literatur verwiesen [1—5]. Diese Formel des Drehmomentes setzt mit guter Annäherung voraus, daß die durch die Nuten und Wicklungen verursachten Oberwellen der Felder und Durchflutungen am Umfang vernachlässigt werden können. Die bezeichneten Werke enthalten Angaben darüber, wie die Spannungs- und Flußgleichungen in Vektorform aufgeschrieben werden können.

Bemerkt sei noch, daß diese Vektoren in symmetrisch aufgebauten Dreiphasenmaschinen mit deren physikalischen Größen in engem Zusammenhang stehen. So erzeugen z. B. die in einer Dreiphasenwicklung fließenden Ströme  $i_a$ ,  $i_b$  und  $i_c$  am Umfang sinusförmig verteilte Durchflutungen. Die Richtung des Stromvektors zeigt den Ort der größten resultierenden Durchflutung, und seine Größe ist der Amplitude der Durchflutungswelle proportional.

Es muß betont werden, daß bisher für die Zeitfunktionen der Momentanwerte keine einschränkende Bedingungen aufgestellt wurden, daß also die abgeleitete Zusammenhänge allgemeingültig sind. So z. B. sind die Zusammenhänge für die verketteten Größen auch für den Fall der Gleichstromspeisung anwendbar.

In der Mehrzahl der praktischen Fälle treten keine Nullkomponenten auf, so daß die obigen Formeln noch einfacher werden. Im folgenden sollen nur jene Fälle behandelt werden, in denen

$$u_0 = 0, \quad i_0 = 0. \quad (2.12)$$

2.5. *Effektivwert.* In Dreiphasensystemen darf auch vom augenblicklichen Effektivwert gesprochen werden. Der Effektivwert der drei Phasenströme  $i_a$ ,  $i_b$  und  $i_c$  wird so definiert, daß die Verlustleistung an drei gleichgroßen Widerständen  $R$  unverändert zu sein hat, daß also

$$3 i_{\text{eff}}^2 R = (i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) R. \quad (2.13)$$

Mit der Vektorform (2.9) der Leistung und der vektoriellen Spannungsgleichung  $\mathbf{u} = \mathbf{i}R$  wird

$$3 i_{\text{eff}}^2 R = \frac{3}{2} \mathbf{i} R \cdot \mathbf{i} = \frac{3}{2} R \operatorname{Re} \{ \mathbf{i} \hat{\mathbf{i}} \} = \frac{3}{2} R |\mathbf{i}|^2,$$

d. h.

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} i^2, \quad \text{bzw.} \quad i_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{i}|. \quad (2.14)$$

Bei periodischen Zeitfunktionen darf von dem auf die Periodendauer  $T$  bezogenen mittleren Effektivwert  $I_{\text{eff}}$  gesprochen werden, wobei statt mit der Identität der augenblicklichen Verlustleistungen mit der während der Zeit  $T$  in Verlust gehenden Energie gearbeitet werden muß. Entsprechend errechnet sich der Effektivwert aus der Beziehung

$$I_{\text{eff}}^2 T = \frac{1}{2} \int_0^T |\mathbf{i}|^2 dt = \int_0^T i_{\text{eff}}^2 dt. \quad (2.15)$$

Wenn auch die Nullkomponente auftritt, läßt sich nachweisen, daß

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{i}|^2 + i_0^2. \quad (2.16)$$

*2.6. Normaler Dreiphasenbetrieb.* In diesem sind die Phasenspannungen und Ströme sinusförmig und bilden je ein mitläufiges System. Die Momentanwerte der drei Phasenströme können in der Form

$$\begin{aligned} i_a &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ i_b &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 - 2\pi/3), \\ i_c &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + 2\pi/3) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Nach kurzer Rechnung hat man im Sinne der Definition gemäß (2.1) für den Stromvektor

$$\mathbf{i} = I_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega_1 t} = \mathbf{I}_1 e^{j\omega_1 t}. \quad (2.17)$$

Dieses Ergebnis stimmt unter den in der Theorie der Wechselströme allgemein gebräuchlichen Zeitvektoren (Zeigern) mit dem Zeiger des Phasenstromes  $i_a$

$$\mathbf{i} = \hat{I}_{a1} e^{j\omega_1 t} = i_{a1} \quad (2.18)$$

überein.

Der Endpunkt des Vektors beschreibt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  einen Kreis, was der Tatsache entspricht, daß ein mitläufiges Stromsystem eine in der Reihenfolge  $a, b, c$  rotierende Durchflutung erzeugt. Die Formel (2.17) hätte unter Anwendung der Projektionsregel auch ohne Berechnung erhalten werden können.

2.7. *Stationärer sinusoidaler gegenläufiger Betriebszustand.* Wenn die Phasenströme ein gegenläufiges System bilden, wenn also

$$\begin{aligned}i_a &= I_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2), \\i_b &= I_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2 + 2\pi/3), \\i_c &= I_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2 - 2\pi/3),\end{aligned}$$

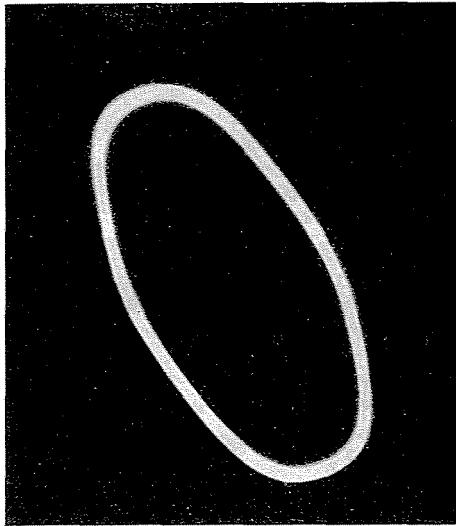


Abb. 4

dann ist der Stromvektor im Sinne von (2.1)

$$\mathbf{i} = I_2 e^{-j\varphi_2} e^{-j\omega_1 t}. \quad (2.19)$$

Er dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  im negativen Sinne, was der Tatsache entspricht, daß ein gegenläufiges Stromsystem eine in der Reihenfolge  $a, c, b$  rotierende Durchflutung erzeugt. Der Zeitvektor des Phasenstromes  $i_a$  ist

$$i_{a2} = \dot{I}_{a2} e^{j\omega_1 t} = I_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega_1 t},$$

weshalb der Vektor  $\mathbf{i}$  die Konjugierte des letzteren

$$\mathbf{i} = \hat{i}_{a2}. \quad (2.20)$$

ist.

2.8. *Stationärer asymmetrischer sinusoidaler Betrieb.* Die Ströme dürfen als Superposition eines mitläufigen und eines gegenläufigen Systems aufgefaßt werden. Da die Definitionsformel (2.1) des Vektors linear ist, dürfen auch die Vektoren superponiert werden:

$$\mathbf{i} = i_{a1} + i_{a2} = I_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega_1 t} + I_2 e^{-j\varphi_2} e^{-j\omega_1 t}. \quad (2.21)$$

Die Resultierende der zwei in entgegengesetzter Richtung rotierenden Vektoren beschreibt eine Ellipse (Abb. 4), die Länge der Hauptachse ist  $I_1 + I_2$ , die der Nebenachse  $|I_1 - I_2|$ .

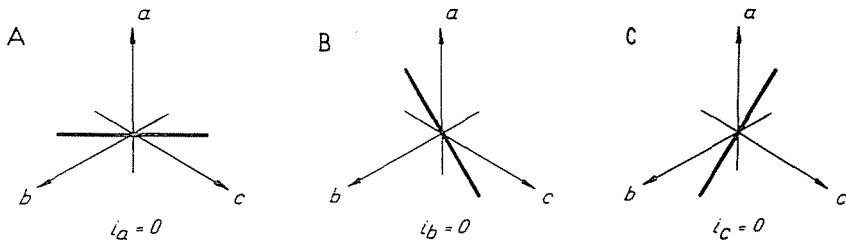


Abb. 5a, b, c

Wird eine Phase eines Asynchronmotors ausgeschaltet, werden die mitläufigen und gegenläufigen Komponenten gleich groß sein. In diesem Fall schrumpft die Ellipse zu einer geraden Strecke zusammen, was der Tatsache entspricht, daß in der ausgeschalteten Phase kein Strom fließen kann, so daß die Projektion des Vektors auf die betreffende Achse Null sein muß. Die in Abb. 5 ersichtlichen Stromvektor-Aufnahmen wurden bei Ausschaltung der Phase  $a$  bzw.  $b$ , bzw.  $c$  gemacht.

### 3. Die oszillographische Aufnahme der Vektoren

Der Endpunkt der Vektoren läßt sich auf dem Schirm eines Kathodenstrahl-Oszillographen sichtbar machen. Da die Ablenkplatten in aufeinander senkrechten Richtungen wirken, müssen an die Ablenkplattenpaare Spannungen gelegt werden, die den zwei rechtwinkligen Koordinaten des zu oszillographierenden Vektors proportional sind. Zu diesen Zweck wird die Formel (2.1) des Vektors in einen realen und einen imaginären Teil zerlegt. Mit (2.2) wird



$$u_x = \operatorname{Re} \{ \mathbf{u} \} = \frac{2}{3} u_a - \frac{1}{3} (u_b + u_c), \quad (3.1)$$

$$u_y = \operatorname{Im} \{ \mathbf{u} \} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_b - u_c).$$

Wenn keine Nullkomponente auftritt, wenn also

$$u_0 = 0, \quad u_a + u_b + u_c = 0,$$

dann vereinfachen sich die Beziehungen (3.1) zu

$$\begin{aligned} u_x &= u_a = - (u_b + u_c), \\ u_y &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u_b - u_c). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zum Oszillographieren der Vektoren müssen die den Beziehungen (3.1) oder (3.2) entsprechenden Spannungen erzeugt werden. Zur Aufnahme von Stromvektoren können die proportionalen Spannungen mit Nebenschlußwiderständen erzeugt werden, während man beim Messen der Flußvektoren mit spannungintegrierenden Schaltungen zum Ziel kommt.

Für gewöhnlich genügen die in den Oszillographen eingebauten Verstärker. Entsprechen ihr Frequenzbereich oder ihre Linearität nicht, wird man Sonderverstärker (z. B. Gleichstromverstärker) benutzen oder die Spannungen unmittelbar an die Ablenkplatten legen, sofern auf entsprechendem Potentialniveau befindliche Spannungen  $u_x, u_y$  von 50–100 V verfügbar sind. Bei Benützung von Verstärkern sollen die Spannungen  $u_x$  und  $u_y$  normalerweise eine gemeinsame Klemme haben. Die Erdung der Verstärker und des Oszillographen sollen in der Regel an diese Klemme angeschlossen sein. Bei Handhabung des Oszillographen ist darauf zu achten, daß sein Körper nicht geerdet ist. Bei der Untersuchung von Hochspannungsmaschinen müssen Strom- und Spannungswandler verwendet werden. Ist dies wegen der Messung von Gleichstromkomponenten nicht möglich, ist besonders große Umsicht geboten. Ferner ist dafür zu sorgen, daß weder durch den Körper des Oszillographen noch durch die Meßleitungen auf kapazitivem, induktivem oder anderem Wege störende Spannungen auftreten. Bei unmittelbarem Anschluß an die Ablenkplatten müssen normalerweise erdsymmetrische Eingangsspannungen erzeugt werden.

3.1. *Oszillographieren von Spannungsvektoren.* Spannungsvektoren können nach der Schaltung gemäß Abb. 6 sehr einfach gemessen werden. Hier sind

$A$ ,  $B$  und  $C$  die drei Phasenklemmen der zu untersuchenden Maschine, während  $S$  ihr Sternpunkt ist. Diesem kommt allerdings bei der Messung keine Rolle zu. Diese Schaltung ist auch bei Maschinen in Dreieckschaltung anwendbar. Der Mittelpunkt  $0$  der zwei gleich großen Widerstände ist an die gemeinsame Erdung der Verstärker bzw. Oszillographen anzuschließen, während an die

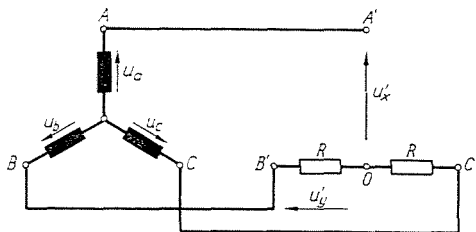


Abb. 6

Eingangsklemmen der Vertikal- und Horizontalverstärker die Spannungen  $u'_x$  und  $u'_y$  gelegt werden. Anhand der Abb. 6 kann einfach

$$u'_y = \frac{1}{2} (u_b - u_c), \quad (3.3)$$

$$u'_x = u'_y - u_b + u_a = u_a - \frac{1}{2} (u_b + u_c)$$

geschrieben werden. Mit dieser Formel hat man aus (3.1)

$$u'_x = \frac{3}{2} u_x, \quad (3.4)$$

$$u'_y = \frac{\sqrt{3}}{2} u_y,$$

d. h. die Eingangsspannungen sind tatsächlich den Koordinaten des Spannungsvektors proportional, allerdings mit einem  $\sqrt{3}$ -fachen Maßstabfaktorenunterschied. Dieser läßt sich durch Einstellen der Verstärkungsfaktoren oder mit Hilfspotentiometern ausgleichen. Die Zusammenhänge (3.4) sind auch dann gültig, wenn die Phasenspannungen der Sternschaltung auch Nullkomponenten enthalten.

Es ist zu beachten, daß auf die Spannung  $u'_x$  keine große Belastung gelangen darf, weil andernfalls auch  $u_x$  eine Spannung  $u'_y$  erzeugt. Liegt zwischen den Klemmen OA Belastungswiderstand  $R_b$ , nimmt die Formel für  $u'_y$  die Form

$$u'_y = \frac{\sqrt{3}}{2} u_y + \frac{3}{2} \frac{R}{R + 2 R_b} u_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( u_y + \sqrt{3} \frac{R}{R + 2 R_b} u_x \right) \quad (3.5)$$

an. Ist z. B.  $R_b = 1$  Mohm und  $R = 10$  kohm, dann ist der Koeffizient von  $u_x$  in der Klammer gleich 0,0086, der Fehler ist also kleiner als 1%, was bei Messungen mit dem Oszillographen zulässig ist. Diese Frage ist wichtig, wenn z. B. der abklingende Spannungsvektor einer ausgeschalteten Asynchronmaschine aufzunehmen ist, da hierbei die Widerstände  $R$  den Leerlaufzustand verfälschen. Bei Maschinen von 5 kW, 380 V hat dieser Fehler noch keine Bedeutung, bei Motoren kleinerer Leistung ist jedoch hierauf zu achten.

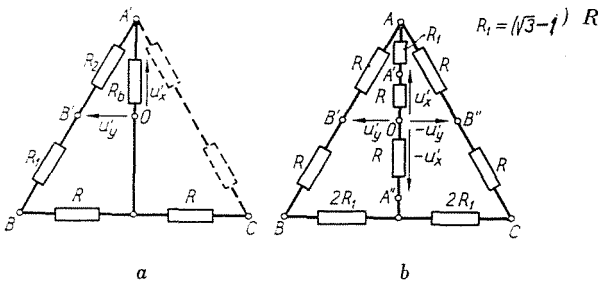


Abb. 7a, b

Die an die Klemmen  $OB$  (an  $u'_y$ ) gelegte Belastung stört weniger. Nötigenfalls kann die Symmetrie durch Zuschaltung einer gleich großen Belastung an die Klemmen  $OC$  wieder hergestellt werden.

Die störende Wirkung der Belastung in Richtung  $x$  kann durch die Schaltung gemäß Abb. 7a ausgeschaltet werden, sofern die Größe der Widerstände der Bedingung

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R/2}{R_b + R/2} = \frac{R}{2 R_b + R}$$

entspricht.

Abb. 7b zeigt eine Schaltung, die die Erzeugung erdsymmetrischer Koordinatenspannungen ermöglicht, so daß ohne Verstärker oszillographiert werden kann. Die in die Abbildung eingesetzten Widerstandswerte sind anwendbar, wenn die Koeffizienten  $cm/V$  der Ablenkplattenpaare einander gleich sind. Ist dies nicht der Fall, müssen andere Widerstände gewählt werden. Mit solchen Umänderungen läßt sich auch die Störung durch die Belastungen neutralisieren. Ohne auf die Bestimmung der Widerstandswerte einzugehen, sei hier nur darauf hingewiesen, daß man für die Ableitung zweckmäßig das Superpositionsprinzip anwenden wird, weil die Schaltung an die senkrechte Achse  $a$  symmetrisch ist, d. h. im ersten Fall soll nur die  $x$ -Komponente, im zweiten nur die  $y$ -Komponente der Speisespannung wirksam sein.

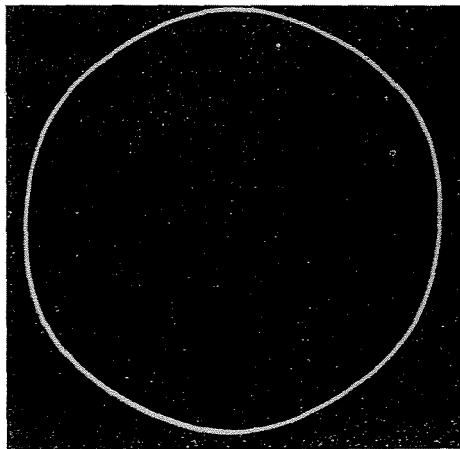


Abb. 8

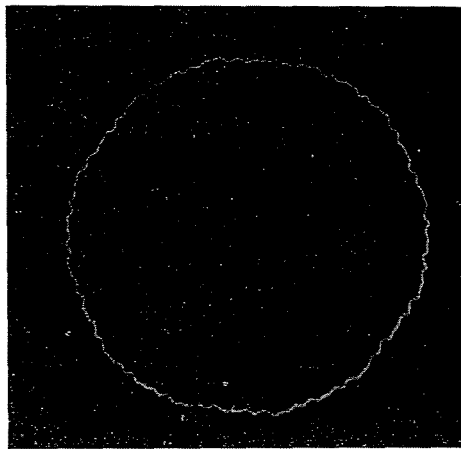


Abb. 9a

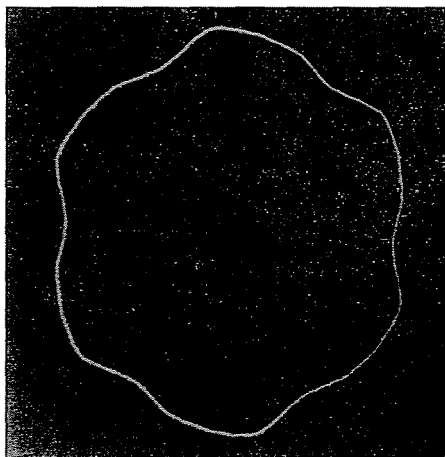


Abb. 9b

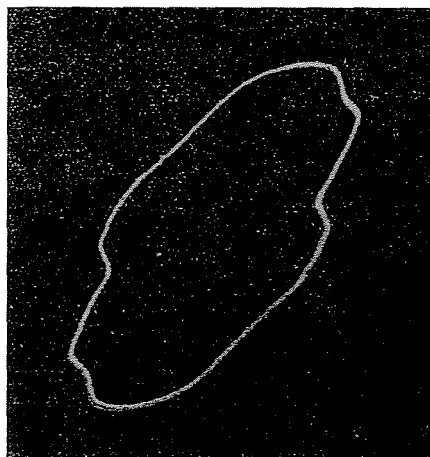


Abb. 9c

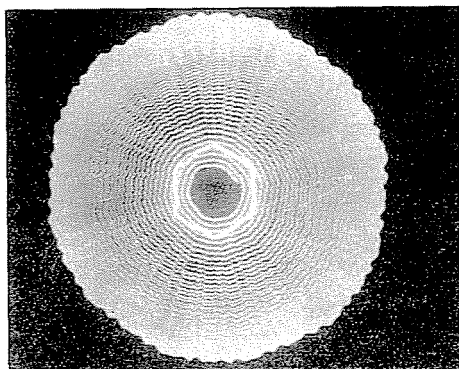


Abb. 10a

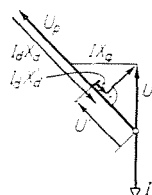


Abb. 10b

In folgenden sollen einige Spannungsvektoraufnahmen besprochen werden. Abb. 8 zeigt die Spannung eines symmetrischen Dreiphasennetzes, Abb. 9 die eines Synchrongenerators. Bild *a*) wurde jeweils im Leerlauf, Bild *b*) mit symmetrischer dreiphasiger Belastung und Bild *c*) mit einphasiger Belastung aufgenommen.

Bei der Aufnahme von Abb. 10a war von einem Synchrongenerator die dreiphasige Ohmsche Belastung abgeschaltet. Die innere starkgezeichnete Kurve zeigt die stationäre Spannung vor der Abschaltung. Der Strahl hat dieselbe Bahn mehrmals durchgelaufen. Im stationären Betrieb nach der Abschaltung wird die Klemmenspannung mit der Polspannung gleich, dem

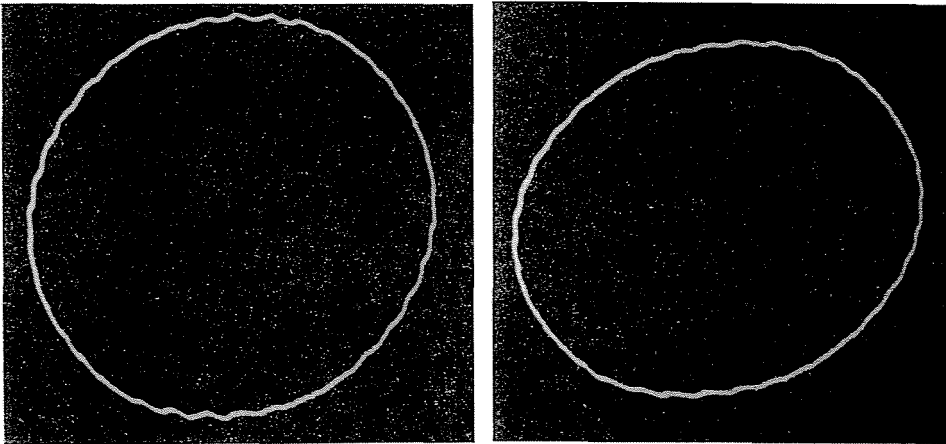


Abb. 11a, b

entspricht die äußere starkgezeichnete Linie. Die transienten Vorgänge können aus dem Vektordiagramm des vorigen Belastungszustandes erklärt werden (Abb. 10b). Die transiente Spannung  $U'$  wurde konstruiert. Bei der Ausschaltung springt zunächst der Klemmenspannungsvektor  $u(t)$  vom stationären Wert  $U$  auf  $U'$ , sodann nähert er sich der Polspannung  $U_p$  mit der transienten Leerlauf-Zeitkonstante  $T'_{d0}$ . Aus der Aufnahme kann diese Zeitkonstante einfach ausgewertet werden.

In Abb. 11. ist die Ständerspannung eines Drehstromasynchronmotors in einphasigem Betrieb dargestellt, der als Phasenumformer betrachtet werden kann (Ferraris-Arno). Bild *a*) wurde im Leerlauf, Bild *b*) mit einer Belastung aufgenommen.

3.2. *Aufnahme von Stromvektoren.* Zum Oszillographieren eines Stromvektors müssen an die Eingangsklemmen der Verstärker bzw. an die Ablenkplattenpaare Spannungen gelegt werden, die den zwei rechtwinkligen Koordinaten des Stromvektors proportional sind. Die Bestimmung der Koordinaten erfolgt sinngemäß anhand der Gleichungen (3.1) oder (3.2).

Wenn an das Klemmenbrett der Maschine nur drei Wicklungsenden ausgeführt sind, müssen Stromwandler angewendet werden. Sind sechs Klemmen ausgeführt, kann man auch ohne Stromwandler messen, doch können sie miteinander auch in diesem Fall nicht umgangen werden. Wenn in Strömen auch Nullkomponenten auftreten, sind drei Stromwandler erforderlich. In der Mehrzahl der praktischen Fälle ist aber  $i_0 = 0$ , wobei zwei Stromwandler genügen. Im folgenden wird nur von solchen Fällen die Rede sein.

Wenn mit Stromwandlern gearbeitet wird, müssen die Sekundärströme (z. B.  $i_b$  und  $i_c$ ) über zwei gleich große Widerstände  $R$  geleitet werden (Abb. 12). Hierbei sind die der Abbildung entsprechenden Polaritäten zu beachten. Da die Summe der drei Ströme gleich Null ist, hat die Spannung zwischen den Klemmen

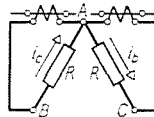


Abb. 12

$C$  und  $B$  die Größe  $i_a R$ . Das zwischen den Klemmen  $A, B, C$  entstehende dreiphasige Spannungssystem wird also dem Stromsystem proportional sein, der Vorgang ist somit der gleiche wie beim Oszillographieren von Spannungsvektoren. Werden keine erdsymmetrische Koordinatenspannungen benötigt, kann die einfachere Schaltung (Abb. 7a) in Frage kommen, andernfalls wird man die der Abb. 7b entsprechende Schaltung benutzt. Hierbei ist es möglich, die Messung ohne Verstärker durchzuführen, wenn die Stromwandler genügend große Sekundärspannungen abgeben können. Leider haben selbst die Stromwandler mit einem Sekundärstrom von 1 A meist keine genügend große Spannung. Um auf Verstärker verzichten zu können, braucht man Spezial-Hilfstromwandler mit kleinem Sekundärstrom.

In den der Abb. 12. entsprechenden Schaltungen vertauschen sich manchmal die Phasen- und die verketteten Größen, doch stört dies nicht, weil aus Punkt 2.3 bekannt ist, daß dies nur eine Drehung um  $90^\circ$  und eine  $\sqrt{3}$ -fache Maßstabveränderung bedeutet.

Es ist unzweckmäßig, Stromwandler anzuwenden, wenn es z. B. beim Oszillographieren von transienten Vorgängen auch auf die genaue Messung der Gleichstromkomponenten ankommt, oder wenn die Frequenz klein ist. Hat die Maschine sechs ausgeführte Wicklungsenden, ist der Vorgang folgender. Die Messung der in Dreieck geschalteten Maschinen kann auf Abb. 12 zurückgeführt werden (Abb. 13): Man schließt zwei gleiche Widerstände  $R$  mit zwei Wicklungen der Maschine so in Reihe, daß ein gemeinsamer Punkt  $A$  entstehe. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Übergangswiderstände der Anschlüsse im Punkt  $A$  keine Störung verursachen. Die Widerstände  $R$  spielen die Rolle

von Nebenschlußwiderständen. Ihre Größen sind dadurch bestimmt, daß sie einerseits die zu messenden Vorgänge nicht verändern dürfen, andererseits ihre Spannung viel größer sein muß als die durch die Übergangswiderstände, durch induktive Gegenwirkungen usw. verursachten Störspannungen. Bei Messung der Maschinen von 380 V Spannung, kann die Spannung der Nebenschlußwiderstände 1 V betragen.

Wenn die Maschine Sternschaltung hat, kann die der Abb. 14 entsprechende Schaltung in den geöffneten Sternpunkt eingefügt werden. Die Widerstände  $r$  sind viel größer als die Nebenschlußwiderstände  $R$ . Wenn die in jenen

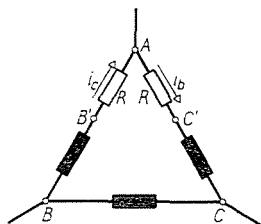


Abb. 13

fließenden Ströme gegenüber den in diesen fließenden vernachlässigt werden können, gilt auf Grund der Abbildung

$$u'_y = \frac{R}{2} (i_b - i_c),$$

$$u'_x = -\frac{R}{2} (i_b + i_c).$$

Mit den der Gl. (3.2) entsprechende Koordinaten  $i_x$  und  $i_y$  des Stromvektors hat man

$$u'_x = \frac{R}{2} i_x,$$

$$u'_y = \frac{R}{2} i_y \sqrt{3}, \quad (3.6)$$

die Spannungen  $u'_x$  und  $u'_y$  sind also den rechtwinkligen Koordinaten des Stromvektors proportional. Diese sind an die Verstärkereingänge zu legen. Nötigenfalls kann der  $\sqrt{3}$ -fache Maßstabunterschied dadurch ausgeschaltet werden, daß man den Widerstand  $r$  auf der linken Seite als Potentiometer ausbildet.

In Abb. 15 ist eine Abänderung der Abb. 14 angegeben, die es gestattet, die die Koordinaten bildende Zusammenstellung auf mehrere Strommeß-

bereiche umzuschalten. Die Klemmen  $A, B, C$  werden an den geöffneten Sternpunkt der Maschine gelegt, die Verbindungen  $KB$  und  $KC$  mit einem Umschalter verändert. Diese Zusammenstellung eignet sich auch zur Verwendung mit Stromwandlern, wobei die Sekundärströme  $i_b$  bzw.  $i_c$  durch die Klemmen  $BA$  bzw.  $CA$  geführt werden müssen.

Beim Messen von Stromvektoren muß darauf geachtet werden, daß die Nebenschlußwiderstände keine Frequenzabhängigkeit bzw. Induktivität haben. Nebenschlußwiderstände für große Nennstromwerte können schon bei einer Frequenz von 50 Hz wesentliche Fehler verursachen.

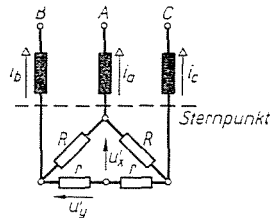


Abb. 14

3.3. *Zeitmarken. Die Fixierung der Phasenlage.* Steuert man die Intensität des Kathodenstrahles durch geeignete Impulse, ist es möglich auf die Bahn des Vektorendpunktes Zeitmarken anzubringen. Auf diese Weise erhält

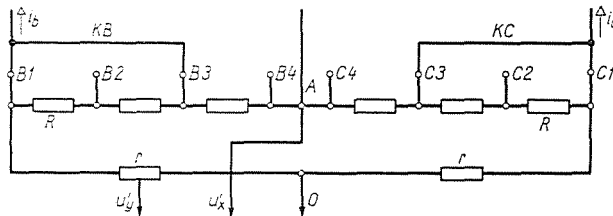


Abb. 15

man die Vektoren in Funktion der Zeit. Ist z. B. bei der Aufnahme eines periodischen Zustandes von 50 Hz die Impulsfrequenz 20 kHz, ergibt sich während einer Umdrehung des Vektors eine aus 400 Punkten bestehende Serie.

Abb. 16 zeigt den Stoßkurzschlußstrom eines Synchrongenerators kleiner Leistung. Die Entfernung der Zeitmarken ist  $1/3$  ms.

Abb. 17 zeigt den Strom eines Asynchronmotors im stationären Zustand von 50 Hz. Die Impulsfrequenz ist 4500 Hz.

Mit Hilfe der Zeitmarkierung kann die Phasenlage rein sinusförmiger symmetrischer Dreiphasengrößen bestimmt werden. In solchen Fällen be-



schreibt der Endpunkt des Vektors mit konstanter Winkelgeschwindigkeit einen Kreis. Läßt man den Strahl je Periode nur einmal ganz kurz aufleuchten, sieht man vom Kreis nur einen Punkt. Der aus der Null-lage in diesen Punkt zeigende Vektor gibt die Phasenlage an. Auf diese Weise werden Stromvektordiagramme aufgenommen.

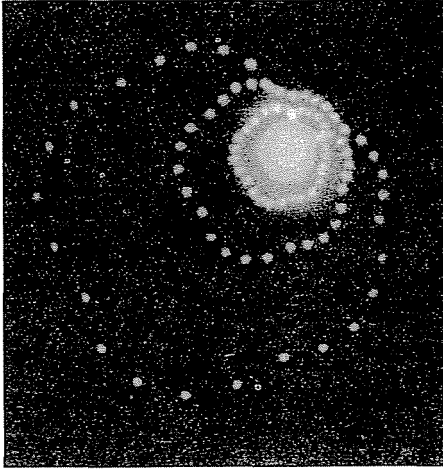


Abb. 16

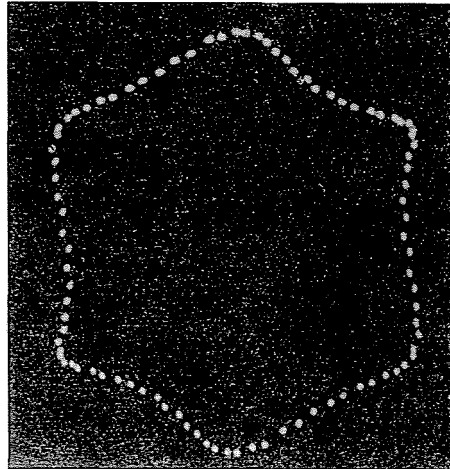


Abb. 17

3.4. Aufnahme des Stromvektordiagramms von Asynchronmotoren. In Abb. 18 ist z. B. das gewöhnliche Stromvektordiagramm eines Doppelkäfigmotors dargestellt. Im Stillstand nimmt der Motor den symmetrischen dreiphasigen

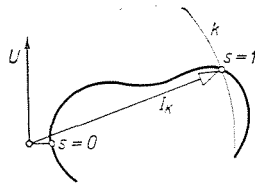


Abb. 18

Kurzschlußstrom auf, auf dem Schirm des Oszillographen ist der Kreis  $k$  sichtbar. Wird die Intensität des Strahles von der Phasenspannung  $a$  oder von der verketteten Spannung  $bc$  so gesteuert, daß er nur im Augenblick des Nullüberganges der Spannungen in eine Richtung aufleuchten kann, wird auf dem Schirm nur der Punkt  $P$  sichtbar sein.

Die Zündimpulse müssen kurz sein. Betragen sie z. B.  $1/1000$  der Periodendauer, wird die Länge des Punktes das  $2\pi/1000$ -fache, also ungefähr  $0,6\%$  des Kreishalbmessers erreichen. Eine solche, von  $u_{bc}$  gesteuerte Zündtransformator-Schaltung wird in Abb. 19<sub>a</sub> gezeigt. Die Sekundärspannung wird impuls-

mäßig sein (Abb. 19b), wenn die Magnetisierungskennlinie des Eisenkernes viereckig ist und die Primärwicklung an sich nur eine kleine Spannungsfläche aus jener der Speisespannung aufnehmen kann. Nötigenfalls können die Impulse mit differenzierenden  $R - C$  Stromkreisen stärker zugespitzt werden. Der

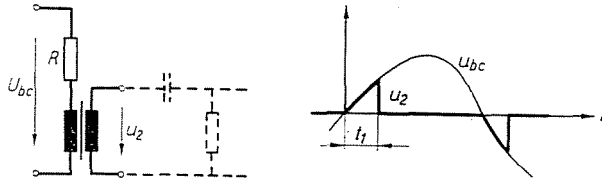


Abb. 19a, b

Impuls ist gegenüber dem Nullübergang der Spannung um die Zeit  $t_1$  verzögert (Abb. 19b). Dies muß beim Phasenwinkel des Stromes berücksichtigt werden, doch läßt sich dieser Fehler beseitigen, wenn auch der Spannungsvektor mit demselben Zündapparat aufgenommen wird. Mit Hilfe von Transistoren- oder Elektronenröhrenschaltungen erhält man genauere Zündimpulse.

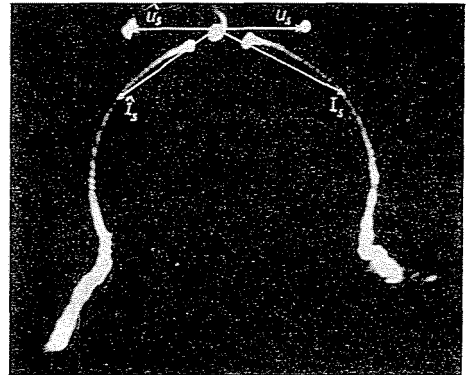
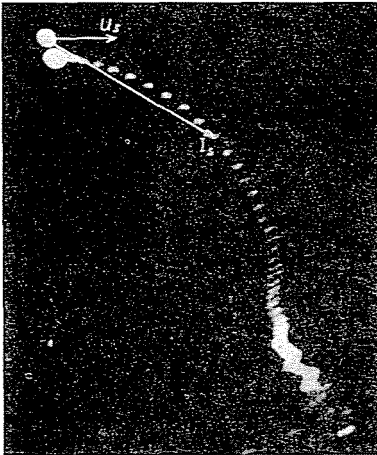


Abb. 20a, b

Das Stromvektordiagramm von Asynchronmotoren kann mit dieser Schaltung aufgenommen werden. Wenn der Motor so langsam hochläuft, daß sich bei den mittleren Drehzahlen stationäre Zustände ausbilden können, erhält man die zwischen den Punkte  $s = 1$  und  $s \approx 0$  gelegene Strecke des Stromvektordiagramms. Zweckmäßig wird man eine Auflaufzeit von mindestens  $0,5 - 1,0$  s wählen, was sich entweder durch die Vergrößerung des Trägheitsmomentes oder durch verminderte Spannung während des Anlaufes erreichen läßt.

Die Aufnahme des Stromvektordiagrammes eines Doppelpfahnmotors geht aus Abb. 20 hervor. Die Störungen in der Umgebung des Punktes  $s = 1$

(Bild *a*) sind durch die Schaltvorgänge verursacht, die auf zweierlei Weise ausgeschaltet werden können. 1. Nach dem Einschalten des Motors wird der Läufer 1–2 s lang im Stillstand gehalten. Unterdessen klingen die Schaltvorgänge des Hauptflusses ab. Nach Öffnen des Verschlusses des Fotoapparates läßt man sodann den Läufer anlaufen. 2. Der Motor wird reversiert. Da hierbei die Drehzahl während den Schaltvorgängen groß ist, sind die transienten Zeitkonstanten klein, der stationäre Zustand tritt nach 1–2 Perioden ein. So ist die untere Hälfte des Bildes 20*b* aufgenommen. Zur Reversierung wurden zwei Phasen ausgetauscht, die Vektoren spiegeln sich mithin um die Achse der dritten Phase, es entstehen also z. B. ihre Konjugierten.

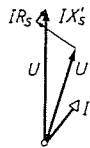


Abb. 21a

3.5. *Auslaufversuch beim Abschalten eines Asynchronmotors.* Der Motor läuft annähernd im Leerlauf, dann wird die Ständerwicklung in allen drei Phasen ausgeschaltet. Im Läufer entsteht ein exponentiell abklingender freier Gleichstrom, dessen Feld in der Ständerwicklung eine Spannung induziert. Die Frequenz dieser Spannung ist der Drehzahl des Läufers proportional. Dadurch ermöglicht das Oszillographieren der Ständerspannung die Aufnahme der Anfangsstrecke der Auslaufkurve ohne einen Tachometergenerator.

Abb. 21*a* ist das Vektordiagramm der Ständergrößen vor dem Abschalten. Mit Hilfe der Kurzschlußreaktanz  $X'_s$  (der transienten Reaktanz) wurde die transiente Spannung  $U'_s$  aufgezeichnet. Vor dem Abschalten liegt an den Klemmen die Netzspannung der Kreisfrequenz  $\omega_1 = 2\pi f_1$  (äußerer Kreis im Bild *b*). Sofort nach dem Abschalten (nach dem Abklingen der durch die Kapazitäten verursachten Wellenerscheinungen) vermindert sich die in den Ständerwicklungen induzierte Spannung auf den Wert von

$$\frac{\omega}{\omega_1} U'_s.$$

Hier ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Läufers in elektrischen Winkeln. Die Frequenz der induzierten Spannung wird  $\omega$  proportional sein; im weiteren vermindert sich der Betrag der Spannung exponentiell wegen der Abnahme des Flusses, aber auch wegen der Verringerung der Winkelgeschwindigkeit. Aus Bild *b*) ist deutlich erkennbar, daß die im Motor induzierte Spannung mehr Oberwellen enthält als die Netzspannung. Wenn der Strahl von der Netz-

*spannung* nur auf punktmäßige Zündung gesteuert ist, läßt sich gut beobachten, wie sich die Phasenverzögerung  $\alpha$  der nach dem Ausschalten abklingenden Spannung vergrößert (Bild *c*), was durch die niedrigere Frequenz verursacht wird. Die Winkelgeschwindigkeit (in elektrischen Winkeln) bzw. der Schlupf des Läufers kann anhand der Gleichungen

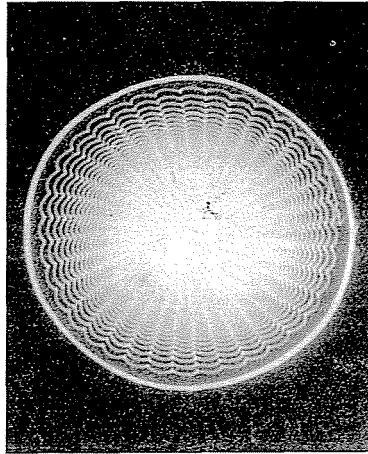


Abb. 21b

$$\omega = \omega_1 - \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{1}{\omega_1} \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.7)$$

berechnet werden. Aus der Messung läßt sich die Leerlaufzeitkonstante des Läufers und die negative Beschleunigung auswerten.

3.6. *Oszillographieren im umlaufenden Koordinatensystem.* In den theoretischen Untersuchungen werden oft umlaufende Koordinatensysteme, wie etwa mit Synchrondrehzahl oder mit der Drehzahl des Läufers umlaufende Systeme benutzt.

Wird der Winkel zwischen der reellen Achse des umlaufenden Systems und der Phasenachse  $\alpha$  des Ständers mit  $x_k$  (Abb. 22), der Spannungsvektor in dem neuen, umlaufenden System etwa mit  $\mathbf{u}'$  bezeichnet, dann gilt

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} e^{-jx_k}. \quad (3.8)$$

Wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_k$  des Koordinatensystem konstant ist, wird

$$x_k = x_{k0} + \omega_k t.$$

Für das Oszillographieren in umlaufenden Systemen gibt es folgende Möglichkeiten:

a) Auf dem Schirm des Oszillographen bildet man den Vektor im stehenden Koordinatensystem ab, worauf man die Photoplatte bzw. den Film mit der Geschwindigkeit des Systems rotieren läßt.

b) Aus Gl. (3.8) errechnen sich die rechtwinkligen Koordinaten des Vektors im umlaufenden System zu

$$u'_x + ju'_y = (u_x + ju_y)(\cos x_k - j \sin x_k),$$

woraus

$$u'_x = u_x \cos x_k + u_y \sin x_k,$$

$$u'_y = -u_x \sin x_k + u_y \cos x_k.$$

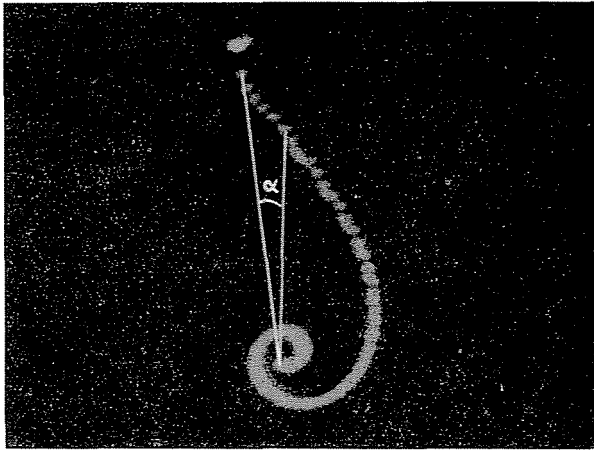


Abb. 21c

Hierzu sind multiplizierende und summierende Schaltungen erforderlich.

c) Ist die Ständerwicklung wie eine Gleichstromankerwicklung mit Stromwender ausgeführt, und verteilen sich die Spannungen sinusförmig,

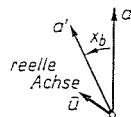


Abb. 22

können die Spannungen  $u'_x$  und  $u'_y$  von zwei zueinander senkrecht umlaufenden Bürstenpaaren abgenommen werden. Bei der Verwirklichung wäre es zweckmäßiger, die Rolle des Ständers und Läufers auszutauschen.

d) Man führt den Spannungen  $u_x$  und  $u_y$  proportionale Ströme dem Umfang einer Widerstandscheibe mit Hilfe zweier senkrechter Bürstenpaare zu. Im Mittelpunkt der Scheibe wird dann der Vektor der Stromdichte dem Vektor

$u$  proportional sein. In der Nähe des Mittelpunktes der Scheibe lassen sich zwei senkrechte Kontaktpaare unterbringen. Läßt man das äußere oder das innere Bürstensystem rotieren, kann man von den inneren Kontaktpaaren Spannungen abnehmen, die den rotierenden Koordinaten proportional sind.

Das Oszillographieren im umlaufenden Koordinatensystem erfordert — wie gezeigt — eine komplizierte Apparatur, bei der auch Störungen kaum beseitigt werden können. Solche Aufnahmen wurden hier bisher nicht gemacht.

#### 4. Oberwellenanalyse der Vektoren

Im stationären Betriebszustand beschreibt der Endpunkt der Vektoren der Ströme  $i(t)$ , der Spannungen  $u(t)$  und der Flußverkettungen  $\varphi(t)$  usw. eine geschlossene Kurve, weil sich diese Größen periodisch ändern. Im folgenden soll untersucht werden, wie die Oberwellen dieser Größen aus den gemessenen oder berechneten Kurven bestimmt werden können. Die untersuchte Größe wird mit  $y$  bezeichnet und statt der Zeit der Winkel  $x$  der Grundwelle als unabhängige Veränderliche eingeführt. Die zu untersuchende Funktion ist also

$$y = y(x),$$

ihre Periode  $2\pi$ , weshalb

$$y(x + 2\pi) = y(x). \quad (4.1)$$

Da von Funktionen physikalischer Größen die Rede ist, dürfen sie in Fourierreichen dargestellt werden, es gilt also

$$y(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn x}, \quad (4.2)$$

wobei sich die Koeffizienten  $Y_n$  aus dem Integral

$$Y_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) e^{-jn x} dx \quad (4.3)$$

errechnen.

Handelt es sich um gemessene Funktionen  $y(x)$ , wird man zweckmäßiger mit einer Summe statt mit dem Integrals arbeiten, doch muß zunächst geprüft werden, unter welchen Bedingungen dies möglich ist.

Es soll hierzu die Periode  $2\pi$  in  $N$  gleichlange Intervalle,  $\Delta x = 2\pi/N$ , geteilt und die Teilungspunkte  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \Delta x$ ,  $\dots$   $x_i = (i-1)\Delta x \dots$  benützt werden. Die Funktionswerte  $y(x_i)$  werden mit  $y_i$  bezeichnet. Es ist zu prüfen, unter welchen Bedingungen die Summe

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i e^{-jkx_i} \quad (4.4)$$

statt des Integrals (4.3) benützt werden kann. Führt man  $\mathbf{y}$  in der Form (4.2) ein, läßt sich  $\mathbf{S}$  in Teilsummen folgender Art zerlegen:

$$\mathbf{S}_{n,k} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_n e^{jn x_i} e^{-jk x_i} = \mathbf{Y}_n \sum_{i=1}^N e^{j \frac{n-k}{N} 2\pi(i-1)}$$

Ist  $\frac{n-k}{N}$  keine ganze Zahl, dann ist  $\mathbf{S}_{n,k} = 0$ , es verbleiben also nur jene Teilsummen, für welche  $\frac{n-k}{N} = m$  eine beliebige ganze Zahl ist. Im letzteren Fall gilt

$$\mathbf{S}_{n,k} = N \mathbf{Y}_n, \text{ wenn } \frac{n-k}{N} = m \quad (4.5)$$

eine ganze Zahl ist.

Aus (4.4) hat man auf diese Weise nach Division durch  $N$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i e^{-jn x_i} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{n+mN} = \dots + \mathbf{Y}_{n-2N} + \mathbf{Y}_{n-N} + \\ &+ \mathbf{Y}_n + \mathbf{Y}_{n+N} + \mathbf{Y}_{n+2N} + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Statt dieser darf die Formel

$$\mathbf{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}_i e^{-jn x_i} \quad (4.7)$$

nur dann verwendet werden, wenn die anderen Glieder der Gl. (4.6) gleich Null sind oder — in der Praxis — wenn die Summe der anderen vernachlässigbar klein ist.

Wenn die Oberwellen mit größerer Ordnungszahl als  $n'$  in  $\mathbf{y}(x)$  vernachlässigt werden können, wenn also

$$\mathbf{Y}_n \approx 0, \text{ bei } |n| > n',$$

dann genügt es, die Zahl der Teilungspunkte auf Grund von (4.5) mit

$$N = 2n' + 1 \quad (4.8)$$

festzusetzen. Hierbei gilt nämlich für die in Frage kommenden Oberwellen  $|n-k|_{\max} = 2n'$ ,  $n-k/N$  kann also nur dann eine ganze Zahl sein, wenn  $n=k$ .

In der praktischen Anwendung der Formel (4.7) ermöglichen die Symmetrien eine Vereinfachung. So können z. B. in symmetrischen Betriebszuständen symmetrisch aufgebauter Maschinen nicht alle Oberwellen mit jeder beliebigen Ordnungszahl  $n$  auftreten, sondern nur jene, die die Ordnungszahl

$$n = 1 + gk, \quad k = \dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots \quad (4.9)$$

haben, worin  $g$  eine gegebene positive ganze Zahl ist. In den meisten Fällen der Dreiphasenmaschinen ist beispielsweise  $g = 6$ , d. h.

$$n = \dots - 11, -5, 1, 7, 13, \dots$$

Die die Bedingung (4.9) befriedigenden Funktionen  $y(x)$  sollen  $g$ -seitig symmetrisch genannt werden, weil ihre Bilder einem regelmäßigen Vieleck mit  $g$  Seiten ähnlich sind. Aus (4.2) und (4.9) folgt nämlich, daß

$$y\left(x + \frac{2\pi}{g}\right) = y(x) \cdot e^{j2\pi/g}, \quad (4.10)$$

das Bild kann also in  $g$  kongruente Bogen aufgeteilt werden, wobei die einzelnen Bogen nach einer Drehung um  $2\pi/g$  zur Deckung kommen. Die Deckung bezieht sich nicht nur auf die Form der Kurve, sondern auch auf deren zeitlichen Verlauf.

Die  $g$ -seitige Symmetrie ermöglicht es, die Summierung im Sinne der Gl. (4.7) mit weniger Gliedern durchzuführen. Hierbei wird man zwecksmäßig

$$N = N_0 g \quad (4.11)$$

Teilungspunkte wählen, d. h.  $N_0$  je Seite. Anhand des Zusammenhangs (4.10) läßt sich beweisen, daß die Amplitude der einzelnen Oberwellen statt aus der Gl. (4.7) anhand der Formel

$$Y_n = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} y_i e^{-jn x_i} \quad (4.12)$$

berechnet werden kann, was eine  $g$ -mal kleinere Zahl der Glieder bedeutet. In solchen Fällen wird man den Wert von  $N_0$  folgendermaßen wählen. Die Gleichung (4.12) ergibt die  $n$ -te Oberwelle nur dann richtig, wenn im Sinne von (4.5) für die Ordnungszahl  $n^*$  der anderen auftretenden oder noch zu berücksichtigenden Oberwellen die Formel

$$\frac{n - n^*}{N} = \frac{1 + gk^* - (1 + gk^*)}{N_0 g} = \frac{k - k^*}{N_0} = \text{keine ganze Zahl} \quad (4.13)$$



gilt. Gute Ergebnisse wird man also erhalten, wenn man den Wert von  $N_0$  um 1 höher wählt, als die größte Differenz der vorkommenden  $k$ -Werte.

Bei Dreiphasenmaschinen brauchen sehr häufig außer der Grundwelle ( $k = 0$ ) nur die  $-5$ . und  $7$ . Oberwelle ( $g = 6$ ,  $k = -1$  und  $k = 1$ ) berücksichtigt zu werden. Hierbei genügt ein  $N_0 = 3$ , und entsprechend kommt man mit drei Punkte auf einer Seite des »Sechseckes« aus, so daß die Gl. (4.12) die Form

$$\mathbf{Y}_n = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{y}_i e^{-jn \frac{2\pi}{18} (i-1)} \quad (4.14)$$

annimmt.

Eine noch einfachere Formel erhält man, wenn man auf ein synchron umlaufendes Koordinatensystem übergeht, d. h. wenn die Vektoren um den Grundwellenwinkel  $x$  zurückgedreht werden:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{y}(x) e^{-jx}. \quad (4.15)$$

Hierbei ergibt sich aus (4.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{y}'_i e^{-j(n-l) \frac{2\pi}{12} (i-1)} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{y}'_i e^{-jk \frac{2\pi}{3} (i-1)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Für die Grundwelle gilt somit

$$n = 1, k = 0; \quad \mathbf{Y}_1 = \frac{1}{3} (\mathbf{y}'_1 + \mathbf{y}'_2 + \mathbf{y}'_3), \quad (4.17a)$$

für die  $-5$ . und  $7$ . Oberwellen hingegen

$$n = -5, k = -1, \quad \mathbf{Y}_{-5} = \frac{1}{3} (\mathbf{y}'_1 + a\mathbf{y}'_2 + a^2\mathbf{y}'_3), \quad (4.17b)$$

$$n = 7, k = 1, \quad \mathbf{Y}_7 = \frac{1}{3} (\mathbf{y}'_1 + a^2\mathbf{y}'_2 + a\mathbf{y}'_3). \quad (4.17c)$$

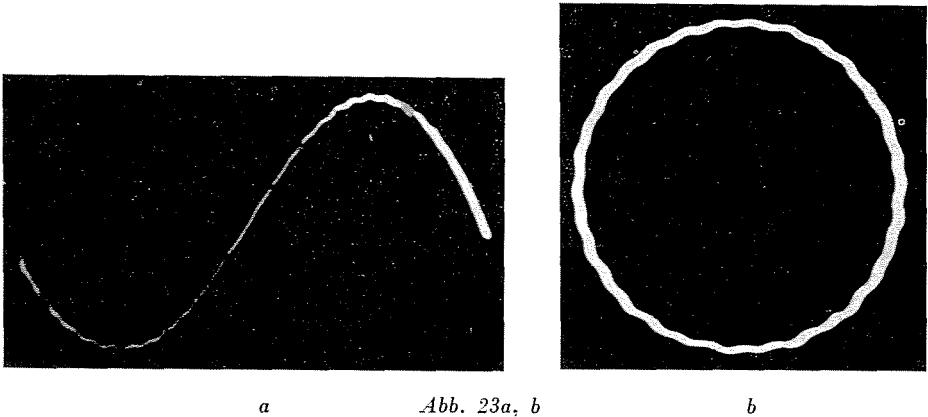
Für die Bestimmung der Amplitude von Oberwellen ergeben sich also ebensolche Formeln wie bei der Zerlegung in symmetrische Komponenten. Dies erklärt sich daraus, daß die Grundwelle im synchron laufenden Koordinatensystem ihre Phase nicht ändert, daß sie also die Rolle der Nullkomponente übernimmt, während die  $-5$ . und  $7$ . Oberwelle nach rechts und links

mit gleicher Winkelgeschwindigkeit umlaufen, ähnlich wie mit- und gegenläufige Komponenten.

Die Gleichungen (4.17) sind nicht nur für  $g = 6$ , sondern für beliebige Werte von  $g$  gültig, wenn nur die den  $k$ -Werten  $-1, 0, 1$  zugehörigen Oberwellen zu berücksichtigen sind. Kommen die Werte  $k = -2, -1, 0, 1, 2$  in Frage, ergeben sich die Formeln für die Zerlegung in fünfphasige symmetrische Komponenten usw.

Bei der Analyse von symmetrischen Dreiphasengrößen hat die obige Methode die folgenden Vorzüge:

a) Selbst für die Auswertung der Oberwellen relativ sehr hoher Ordnungs-



*Abb. 23a, b*

zahl braucht man weit weniger Punkte, also auch eine geringere Berechnungs- bzw. die Konstruktionsarbeit.

b) Nach den gewöhnlichen Rechenmethoden ergeben sich die Amplituden der Oberwellen als kleine Differenzen großer Zahlen. Mit unserer Methode läßt sich die große Grundwelle ganz (oder zumindest zu einem großen Teil) eliminieren, wenn schätzungsweise ein Näherungskreis zum Sechseck bzw. Vieleck gezeichnet wird; im  $g$ -ten Teil des Kreises bezeichnet man mit gleicher Teilung  $N_0$  Punkte und arbeitet nur mit den von diesen Punkten berechneten Abweichungen.

c) Das Diagramm ist anschaulich. Nachdem man einige Zahlenbeispiele ausgearbeitet hat, kann man die Amplituden und Ordnungszahlen der wichtigsten Oberwellen gut abschätzen. Nach den üblichen Methoden läßt sich selbst die Ordnungszahl kaum bestimmen. So zeigt beispielsweise Abb. 23a das Oszillogramm einer der verketteten Spannungen eines Synchrongenerators, das Bild b) die gleiche Spannung mit Vektoraufnahme. Aus Bild b) läßt sich leicht feststellen, daß die 29. und 31. Oberwelle mit einer Amplitude von ungefähr 1% dominiert, welche aus dem Bild a) selbst die Ordnungszahl

der Oberwellen kaum zu bestimmen ist. Die Entwicklung des Gefühles fördert die Abb. 24, die die Form des Sechsecks für unterschiedlich große Oberwellen zeigt.

Ist die Kurvenform aus Berechnungen bekannt, und besteht eine  $g$ -seitige Symmetrie, genügt es, in dem der Bestimmung der Amplituden dienenden

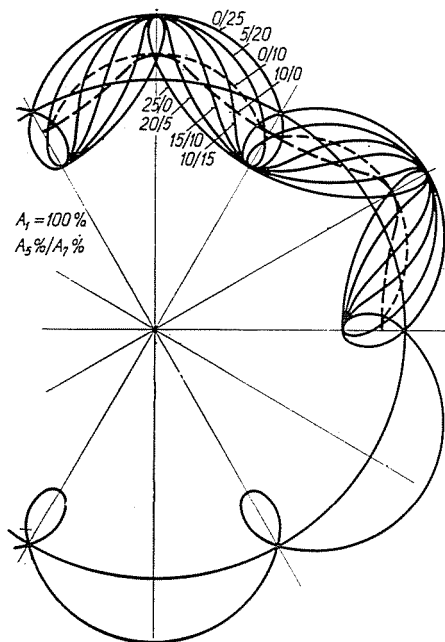


Abb. 24

Integral (4.3) statt über der Periode  $2\pi$  bloß im Bereich von  $2\pi/g$  zu integrieren und das Ergebnis mit  $g$  zu multiplizieren:

$$Y_n = \frac{g}{2\pi} \int_0^{2\pi/g} y(x) e^{-jnx} dx. \quad (4.18)$$

Die Fourierreihe der Vektor-Zeit-Funktionen können genauso benutzt werden wie die skalare Reihen. Im Falle linearer Stromkreise z. B. können die einzelnen Oberwellen gesondert untersucht werden. Die resultierenden Ströme, Flußverkettungen usw. erhält man nach dem Superpositionsprinzip. Aus den bekannten Amplituden läßt sich auch der auf die Periodendauer  $T$  bezogene mittlere Effektivwert einfach berechnen. Im Sinne von (2.15) kann mit (4.3)

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |y|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \dot{y} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jnx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{Y}_m e^{-jmx} dx
 \end{aligned}$$

geschrieben werden. Die einzelnen Glieder des Produktes haben die Form  $e^{j(m-n)x}$ . Wenn  $n \neq m$ , ist ihr Integral gleich Null, weshalb nur die Glieder  $n = m$  zu berücksichtigen sind. Auf Grund von (2.14) hat man somit

$$Y_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Y_n|^2 = \sum Y_{n,\text{eff}}^2, \quad (4.19)$$

die Quadrate der Effektivwerte der einzelnen Oberwellen können also einfach summiert werden.

Im folgenden Abschnitt soll zur Darstellung der vektoriellen Oberwellenanalyse kurz der stationäre Betrieb von Asynchron- und Synchronmotoren behandelt werden, die zwecks Frequenzregelung durch Wechselrichter gespeist werden.

### 5. Durch Wechselrichter gespeiste Dreiphasenmotoren

Seit einer Reihe von Jahren tritt die Anwendung von durch Wechselrichter gespeisten, frequenzgeregelten Dreiphasenmotoren immer mehr in den Vordergrund. Die idealisierte Schaltung der verschiedenen Ausführungen geht aus Abb. 25 hervor. Ihr Arbeitsprinzip beruht darauf, daß der Plus-

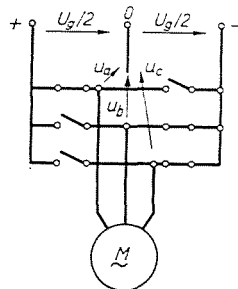


Abb. 25

bzw. Minuspol einer Gleichstromquelle abwechselnd an die Ständerklemmen der Maschine gelegt werden, womit aus dem Gleichstrom eine Dreiphasenspannung hergestellt wird, deren Frequenz dem Schaltungstakt entspricht. Auf die Erzeugung und Glättung der meist veränderlichen Gleichspannung

soll hier nicht eingegangen werden, es wird einfach vorausgesetzt, daß die Gleichspannung  $U_g$  im stationären Betrieb konstant ist. Die Rolle der Schalter können Transistoren, steuerbare Siliziumzellen, Thyratrone oder Quecksilberdampfstromrichter übernehmen. Bisweilen finden sich Ausführungen mit mechanischen Umschaltern oder mit magnetischen Verstärkern vor. Die obigen Elemente und auch die einfachen Dioden, die oft für die Rückführung der Blindströme gebraucht werden, können in erster Näherung als ideale Schalter betrachtet werden.

Vorausgesetzt, daß die Steuerung die eine Klemme der Ständerwicklung für je eine Halbperiode an den positiven bzw. negativen Pol legt, und daß sie zwischen den drei Phasen eine Phasenverschiebung von einer Drittelperiode erzeugt, dann haben die Spannungen  $a, b, c$  auf den Mittelpunkt der Gleich-

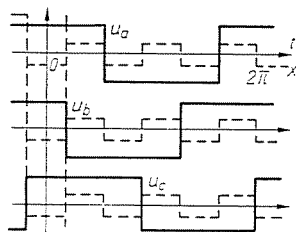


Abb. 26

stromquelle bezogen, die aus Abb. 26 ersichtliche Form. Hier ist  $x = \omega_1 t$  der Winkel der Grundwelle, der Periode  $T$  entspricht also  $2\pi$ . In der Abbildung ist auch die Nullkomponente  $u_0$  der Spannungen gestrichelt eingezeichnet. Da die Spannungen  $1/6$  Teil der Periode konstant sind, ist auch ihr Vektor konstant. Für den Bereich von  $60^\circ - \pi/6 < x < \pi/6$  gilt

$$u_a = U_g/2, u_b = u_c = -U_g/2,$$

d. h. für den Vektor der Klemmenspannungen gemäß (2.1)

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3} \frac{U_g}{2} (1 - \mathbf{a} - \mathbf{a}^2) = \frac{2}{3} U_g = U. \quad (5.1)$$

Da mit Spannungen gearbeitet wurde, die auf einen Nullpunkt bezogen waren, kann der Vektor  $\mathbf{u}$  als die Phasenspannung eines in Stern geschalteten Motors betrachtet werden. Führt man die Berechnung für die folgenden  $1/6$  Perioden durch, was nur einen Vorzeichen- und Phasentausch bedeutet, erhält man stets Vektoren von gleichem Betrag, aber mit jeweils um  $60^\circ$  vergrößertem Winkel. Der Vektor dreht sich mit Sprüngen von  $60^\circ$  statt der gleichmäßigen Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ , die bei sinusförmigen Spannungen

auftritt. Das Oszillogramm des Spannungsvektors ist in Abb. 27 dargestellt. Diese und die folgenden Aufnahmen wurden von einer Asynchronmaschine 250 W gemacht, die durch Transistoren im Schaltbetrieb gespeist wurde.

Der Ständerspannungsvektor läßt sich durch eine Fourierreihe darstellen:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(x) = \sum U_\nu e^{j\nu\omega t} = \sum U_\nu e^{j\nu x}, \quad (5.2)$$

in der, entsprechend der  $g = 6$ -seitigen Symmetrie,

$$\begin{aligned} \nu &= 1 + 6k; & k &= \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ \nu &= \dots & & -11, -5, 1, 7, 13, \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Amplituden können aus dem Integral (4.18) unter Berücksichtigung von (5.1) berechnet werden:

$$U_\nu = \frac{6}{2\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} U e^{-j\nu x} dx = \frac{3}{\pi} U \frac{(-1)^k}{\nu}, \quad (5.4)$$

die Amplitude der Grundwelle schreibt sich mithin zu

$$U_1 = \frac{3}{\pi} U = \frac{2}{\pi} U_g. \quad (5.5)$$

Bei Dreiphasenmaschinen pflegt gewöhnlich als Nennspannung der Effektivwert der verketteten Spannung angegeben zu sein. Er ergibt sich aus Gl. (5.5) zu

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3} U_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} U_g = 0,78 U_g. \quad (5.6)$$

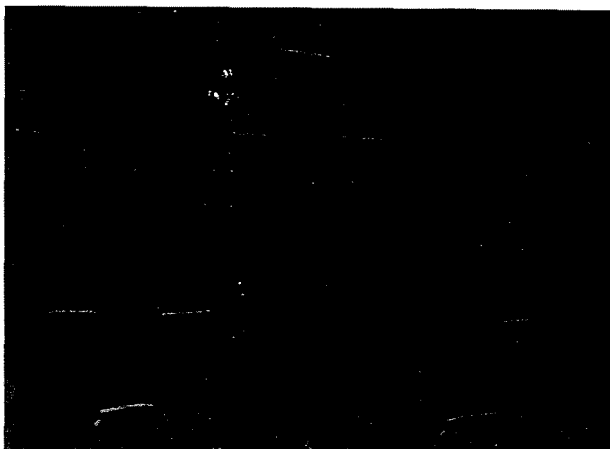
Da der Betrag des Vektors  $\mathbf{u}(t)$  konstant ist, ist der Effektivwert einfach  $U/\sqrt{2}$ . Für die zusätzlichen Wirbelstrom-Eisenverluste im Ständer ist der Spannungsklirrfaktor  $k_u$  kennzeichnend:

$$k_u = \frac{U_{\text{eff}}^2 - U_{1,\text{eff}}^2}{U_{1,\text{eff}}^2} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2}} = \frac{\pi^2 - 9}{9} = 0,0966. \quad (5.7)$$

Zur Untersuchung der Ströme sei zunächst vorausgesetzt, daß die Drehzahl konstant ist, daß also die Gleichungen des Motors linear sind, so daß das Superpositionsprinzip angewendet werden kann. Bei Asynchronmotoren können die Stromoberwellen im stationären Zustand aus der Formel



*a*



*b*



*c*

*Abb. 27a, b, c*

$$\mathbf{I}_v = \frac{\mathbf{U}_v}{\mathbf{Z}(v, \Omega)} \quad (5.8)$$

berechnet werden. Hier ist  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Läufers in elektrischen Winkeln. Da den einzelnen Oberwellen der Spannung symmetrische, sinusförmige Dreiphasenspannungen entsprechen, kann die Impedanz  $\mathbf{Z}(v, \Omega)$  aus der Ersatzschaltung für den normalen Betrieb bestimmt werden (Abb. 28), wobei zu berücksichtigen ist, daß der Schlupf, auf die  $v$ -te Oberwelle bezogen,

$$s_v = \frac{v\omega_1 - \Omega}{v\omega_1} = \frac{v\omega_1 - (1 - s_1)\omega_1}{v\omega_1} = \frac{v - 1 + s_1}{v} \approx 1 - \frac{1}{v} \quad (5.9)$$

ist. Aus der Operatorenimpedanz von Asynchronmotoren [3] läßt sich nach-

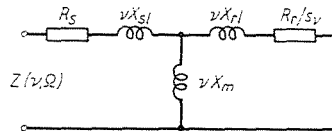


Abb. 28

weisen, daß die Impedanz von Asynchronmotoren mit einfachem Käfigläufer in der Form

$$\mathbf{Z}(v, \Omega) = R_s \frac{1 + pT_{r0} + pT_{s0}(1 + pT'_r) - j\Omega T_{r0}(1 + pT'_s)}{1 + pT_{r0} - j\Omega T_{r0}} \quad (5.10)$$

aufgeschrieben werden kann, worin  $R_s$  den Wirkwiderstand der Ständerwicklung,  $T_{s0}$  und  $T'_s$  bzw.  $T_{r0}$  und  $T'_r$  die Leerlauf- und die transienten Zeitkonstanten des Ständers bzw. Läufers bezeichnen, während  $p = jv\omega_1$ .

Nach Ermittlung der Stromamplituden kann die Fourierreihe des Stromes aufgeschrieben werden. Dieses Verfahren ist ziemlich langwierig.

Nach den Methoden der Untersuchung transients Vorgänge läßt sich beweisen, daß sich der Stromvektor  $\mathbf{i}(t)$  in einer Sechstelperiode auch in der geschlossenen Form

$$\mathbf{i}(t) = \frac{U}{R_s} + \mathbf{A}_1 e^{p_1 t} + \mathbf{A}_2 e^{p_2 t} \quad (5.11)$$

aufschreiben läßt. Hier sind  $p_1$  und  $p_2$  die Wurzeln der charakteristischen Gleichung,  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  die Koeffizienten der freien Ströme.  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  können z. B. aus den folgenden zwei Bedingungen bestimmt werden: a) die Ströme zu Anfang und zu Ende einer Sechstelperiode weichen voneinander nur um einen Phasenwinkel von  $60^\circ$  ab, b) die Stromgrundwelle ist aus dem Kreis-



diagramm des normalen Betriebes bekannt. Die Gl. (5.11) wird man zweckmäßig nur im Bereich der kleineren Drehzahlen benützen, weil sich die Resultierende bei den größeren Drehzahlen als die kleine Differenz großer Zahlen ergibt, weshalb man die einzelnen Glieder bis zu sehr vielen Stellen ausrechnen müßte.

Bei höheren Drehzahlen dürfen in den Impedanzen für die Oberwellen die Wirkwiderstände vernachlässigt werden, d. h. die Näherungsformel benützen, in der  $L$  die Kurzschlußinduktivität (transiente Induktivität) des Motors bezeichnet, die etwa der Summe der primären und sekundären Streuungen gleich ist.

Die Ströme errechnen sich also aus den Gleichungen

$$I_v = \frac{U_v}{jvX} = \frac{3}{\pi} \frac{U_1}{jvX} \frac{(-1)^k}{v^2}, \quad \text{wenn } v \neq 1, \quad (5.12a)$$

und

$$I_1 = \frac{U_1 - U'}{jX}, \quad \text{wenn } v = 1. \quad (5.12b)$$

Die in Abb. 29 angegebene sehr einfache Ersatzschaltung ist mit dieser Nähe-

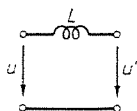


Abb. 29

rung für alle Oberwellen, also auch für den resultierenden Strom und auf die Augenblickswerte bezogen, gültig. Hier ist  $U'$  der Vektor der hinter der transienten Reaktanz befindlichen Spannung, der nur die Grundwelle enthält:

$$\mathbf{u}' = U' e^{j\omega_1 t}. \quad (5.13)$$

$U'$  muß so angenommen werden, daß sich die Grundwelle des Stromes aus (5.12b) richtig ergebe. Damit sind die Wirkwiderstände für die Grundwelle im wesentlichen genau berücksichtigt. Eingehende Untersuchungen haben gezeigt, daß die einfache Formel (5.12) bzw. das Ersatzschaltbild nach Abb. 29 selbst bei Motoren niedriger Leistung bei Grundfrequenzen von mehr als 5–10 Hz benutzt werden können.

Mit dieser Näherung läßt sich die Zeitfunktion des Stromes auch ohne Zerlegung in Oberwellen einfach bestimmen. Die Spannungsgleichung des Ständers schreibt sich mit der Flußverkettung  $\psi$  des Ständers zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} R + \frac{d\psi}{dt}.$$

Da die Wirkwiderstände vernachlässigt werden können, ist  $\psi$  das Integral von  $\mathbf{u}$ . In einem Sechstel der Periode ist  $\mathbf{u}$  konstant, die Integration also sehr einfach. Im Bereich  $-\pi/6 < x < \pi/6$  ist  $\mathbf{u} = U$  und somit

$$\psi = Ut + \mathbf{c} = U \frac{x}{\omega_1} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{3\omega_1} U. \quad (5.14)$$

Die Konstante  $\mathbf{c}$  ist dadurch bestimmt, daß die Kurve von  $\psi$  im stationärem Zustand eine 6-seitige Symmetrie zeigen muß. Da  $\psi(t)$  eine Gerade ist, kann das nur in Form eines regelmäßigen Sechsecks erfüllt werden (Abb. 30).

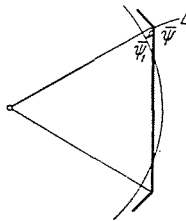


Abb. 30

Der der Spannungsgrundwelle zugehörige Fluß ist

$$\psi_1 = \frac{\mathbf{U}_1}{j\omega_1} e^{j\omega_1 t} = \frac{3}{\pi} \frac{U}{j\omega_1} e^{jx}, \quad (5.15)$$

d. h. er einen Kreis beschreibt. Der Fluß weicht von seiner Grundwelle um

$$\Delta\psi = \psi - \psi_1 = \frac{U}{\omega_1} \left( x - j \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + j \frac{3}{\pi} \right) e^{jx} = \Delta i L \quad (5.16)$$

ab, wobei  $\Delta i$

$$\Delta i = \mathbf{i}(t) - \mathbf{I}_1 e^{j\omega_1 t} = \sum_{v \neq 1} \mathbf{I}_v e^{jv\omega_1 t} = \frac{\Delta\psi}{L}. \quad (5.17)$$

die Abweichung des Stromes von seiner Grundwelle oder mit anderen Worten den zusätzliche Strom bezeichnet. Die Kurvenform von  $\Delta i$  läßt sich einfach auftragen, wenn man  $\Delta\psi$  aus den Abweichungen des Sechsecks und des Kreises konstruiert oder genauer aus der Gl. (5.16) rechnerisch ermittelt. Übersichtlichere Verhältnisse erhält man in einem mit der Synchron-Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  umlaufenden Koordinatensystem, wenn man also sämtliche Vektoren um den Winkel der Spannungsgrundwelle zurückgedreht. Bezeichnet man den Augenblickswert der Vektoren im neuen System mit einem Stern, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{I}_1 e^{j\omega_1 t} + \Delta \mathbf{i} = \mathbf{I}_1 e^{jx} + \Delta \mathbf{i}, \\ \mathbf{i}^* &= \mathbf{i} e^{-jx} = \mathbf{I}_1 + \Delta \mathbf{i}^*, \end{aligned} \quad (5.18)$$

worin

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{i}^* &= \Delta \mathbf{i} e^{-jx} = \frac{\Delta \psi}{L} e^{-jx} = \\ &= \frac{U}{\omega_1 L} \left[ \left( x - j \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) e^{-jx} + j \frac{3}{\pi} \right], \end{aligned}$$

oder in einer etwas geänderten Form

$$\Delta \mathbf{i}^* = \frac{U_1}{jX} \left[ -1 + \left( \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}} + j \frac{\pi}{3} x \right) e^{-jx} \right]. \quad (5.19)$$

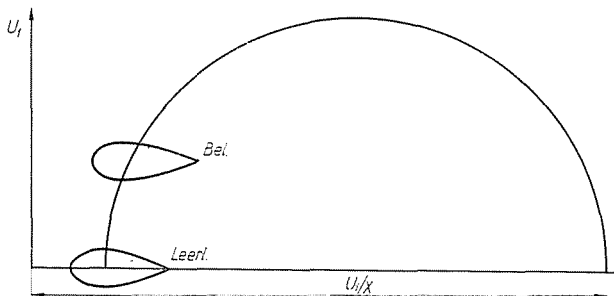


Abb. 31

Hier ist  $U_1/X$  der Höchstwert des der Grundwelle zugehörigen idealen ( $R \approx 0$ ) Kurzschlußstromes. Da bei der Frequenzregelung  $U_1/X$  mit Ausnahme der kleinsten Frequenzen auf konstantem Wert gehalten zu werden pflegt, bleibt der aus Gl. (5.19) ermittelte zusätzliche Strom unverändert, wie hoch auch immer die speisende Frequenz und wie groß auch immer der Schlupf sein mag.

Abb. 31 zeigt das übliche Kreisdiagramm eines Asynchronmotors, welches eigentlich den geometrischen Ort der im synchron umlaufenden Koordinatensystem konstanten Ströme  $\mathbf{I}_1$  für verschiedene Schlupfwerte darstellt. Wird der Ständerwirkwiderstand vernachlässigt, ist derselbe Kreis für die verschiedenen Grundfrequenzen gültig. Addiert man die zusätzlichen Ströme  $\Delta \mathbf{i}^*$  den Strömen  $\mathbf{I}_1$ , erhält man die vollen Ströme, deren Endpunkt einmal in jedem Sechstel der Periode die blattförmige Kurve durchläuft (Abb. 31). Aus ihnen kann man mit einer Drehung von  $e^{jx}$  in ein stehendes Koordinatensystem zurückkehren (Abb. 32). Aus den so gewonnenen Kurven  $\mathbf{i}(t)$  erhält man *a*) die Phasenströme eines in Stern geschalteten Motors oder die verketteten Ströme bei Motoren mit Dreieckschaltung durch Projektion auf die Achsen

$a, b, c$ ;  $b$ ) die Phasenströme eines in Dreieck geschalteten Motors durch Projektion auf die Achsen  $A, B, C$ ;  $c$ ) den Strom der speisenden Gleichstromquelle, weil der letztere in jedem Sechstel der Periode mit einem der Linienströme übereinstimmt.

Abb. 33 zeigt die Stromvektoren eines mit 25 Hz gespeisten Motors im Leerlauf, Abb. 34 hingegen unter Last. Aus der letzteren Aufnahme wurden anhand der im Abschnitt 4. erörterten Summenformeln die Amplituden der 1., -5. und 7. Wellen ermittelt. Die Ergebnisse sind in der hier folgenden Tafel

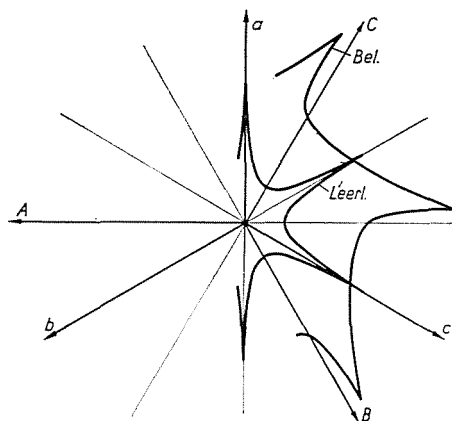


Abb. 32

zusammengefaßt. Ein Sechstel der Periode wurde hierbei in  $a$ )  $N_0 = 20$ ,  $b$ )  $N_0 = 5$  und  $c$ )  $N_0 = 3$  Teile aufgeteilt. In der letzten Rubrik stehen die aus den Oberwellen der Spannung errechneten Ströme.

	Aus dem Oszillogramm			Berechnet				
	$N_0 = 20$	$N_0 = 5$	$N_0 = 3$					
$I_1, A$	0,571	$\underline{-39,5^\circ}$	0,556	$\underline{-38^\circ}$	0,547	$\underline{-36,5^\circ}$	—	
$I_{-5}, A$	0,37	$\underline{66,7^\circ}$	0,35	$\underline{65,3^\circ}$	0,315	$\underline{62^\circ}$	0,342	$\underline{73^\circ}$
$I_7, A$	0,177	$\underline{100,9^\circ}$	0,15	$\underline{104^\circ}$	0,104	$\underline{118,5^\circ}$	0,174	$\underline{105^\circ}$

Der mittlere Effektivwert des Stromes kann aus  $I_1$  und  $\Delta i$  quadratisch summiert werden, weil sie keine Glieder gleicher Frequenz enthalten. Es gilt mithin

$$I_{\text{eff}}^2 = I_{1,\text{eff}}^2 + |\Delta i|_{\text{eff}}^2 \quad (5.20)$$

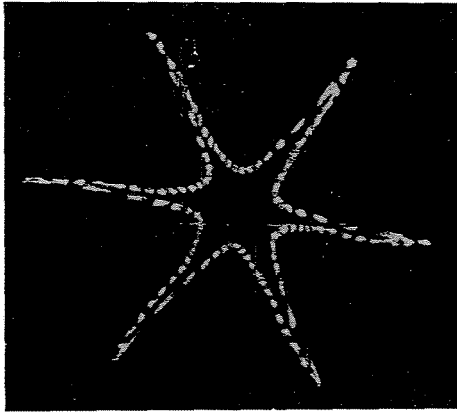


Abb. 33

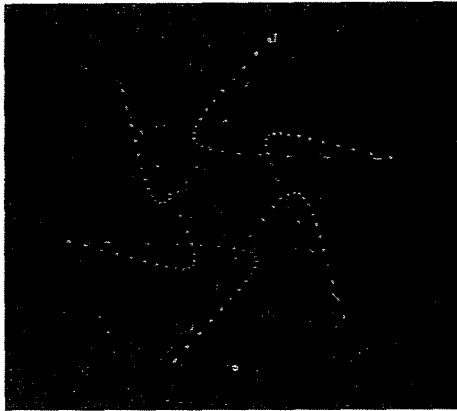


Abb. 34a

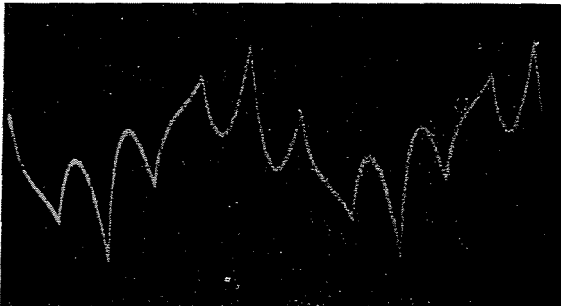


Abb. 34b

Mit (5.19) erhält man aus Gl. (2.15)

$$|\Delta \mathbf{i}|_{\text{eff}} = \frac{U_{1,\text{eff}}}{X} 0,0464. \quad (5.21)$$

Ist z. B. der Kurzschlußstrom  $U_1/X$  des Motors ungefähr dem Fünffachen des Nennstroms gleich, beträgt  $|\Delta \mathbf{i}|_{\text{eff}}$  etwa 25% des Nennstromes. Auf dieser Grund können die zusätzlichen Kupferverluste zu

$$P_z \approx 3 |\Delta \mathbf{i}|_{\text{eff}}^2 (R_1 + R_2'). \quad (5.22)$$

geschätzt werden.

Bei einem beachtlichen Skineffekt im Läufer wird man den Wert von  $R_2'$  zweckmäßig mit dem Sechsfachen der Grundfrequenz ansetzen. Der zusätzliche Verlust, auf den primären Nennkupferverlust bezogen, ist

$$\frac{P_z}{P_{1n}} \approx \frac{3 |\Delta \mathbf{i}|_{\text{eff}}^2 (R_1 + R_2')}{3 I_{n1,\text{eff}}^2 R_1} = \left( \frac{|\Delta \mathbf{i}|_{\text{eff}}}{I_{n1,\text{eff}}} \right)^2 \frac{R_1 + R_2'}{R_1}. \quad (5.23)$$

Orientierungshalber ist

$$\frac{P_z}{P_{1n}} \approx \left( \frac{1}{4} \right)^2 \cdot 3 \approx 0,2 = 20 \%.$$

Zu bemerken ist hier, daß die Pulsierung des Drehmomentes mit Hilfe des zusätzlichen Stromes einfach ermittelt werden kann.

Bei Synchronmotoren kann die Flußabweichung  $\Delta \psi$  ebenso wie im obigen bestimmt werden, die Rolle der Induktivität  $L$  übernehmen jedoch die subtransienten Induktivitäten ( $L_d''$  in Richtung der Achse  $d$ ,  $L_q''$  in Richtung der Achse  $q$ ), weshalb der im synchron umlaufenden Koordinatensystem aufgetragene Vektor  $\Delta \psi$  in die Koordinaten  $d$  und  $q$  zerlegt werden muß.

### Zusammenfassung

Die Anwendung der aus den Augenblickswerten der drei Phasengrößen zusammengesetzten Vektoren erleichtert nicht nur die Untersuchung der transienten Vorgänge, sondern auch die Betrachtung der nicht sinusförmigen Betriebszustände. Die Oberwellenanalyse kann auch in vektorieller Form schnell und übersichtlich durchgeführt werden. Mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen können die Spannungs-, Strom- und Flußvektoren einfach aufgenommen werden, solche Bilder sind anschaulicher als die gewöhnlichen Oszillogramme.

### Literatur

1. PARK, R. M.: Two-reaction Theory of Synchronous Machines. Trans. AIEE. part I, vol. 48, 1929.
2. Казовский, Е. Я.: Переходные процессы в машинах переменного тока. Изд. Ак. Наук СССР, 1962. Москва.
3. Kovács, K. P.—RÁCZ, I.: Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai. Akadémiai Kiadó, 1954. Budapest.
4. Kovács, K. P.—RÁCZ, I.: Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen. Bd. I—II. Akadémiai Kiadó. 1959. Budapest.
5. Ковач, К. П.—Рац, И.: Переходные процессы в машинах переменного тока. Госэнергоиздат, 1963. Москва.
6. BYSTRON, K.—MEYER, M.: Kontaktlose, drehzahlregelbare Umrichtermaschinen für hohe Drehzahlen. Siemens-Z. (37), 9, 660/67 (1963).

Prof. Dr. István RÁCZ, Budapest, XI., Egy József u. 18—20. Ungarn