

# KLASSIFIZIERUNG DER VERBRENNUNGSPROZESSE

Von

GY. FÁY

Lehrstuhl für Atomphysik, Technische Universität,  
Budapest

(Eingegangen am 16. März 1964)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. Kovács

In der Flammenbewegung als hydrodynamische Bewegung kommen auch Phänomene vor, bei welchen die Zustandsgrößen diskontinuierliche Funktionen sind. Die Unstetigkeitsstellen sind gemeinsam und lagern sich auf die im Raum bewegten Oberflächen. Diese Unstetigkeitsoberflächen werden *Stoßwellen* genannt. Wie aus der Mechanik bekannt, reduzieren sich die Differentialgleichungen der Elastomechanik bei kleinen Bewegungen zu Wellengleichung, deren physikalischer Inhalt besagt, daß sich die kleinen mechanischen Störungen im Medium in Wellenform fortpflanzen. Wenn die mechanischen Einflüsse intensiver werden, ist diese Annäherung nicht mehr angebracht, weil sich die Störung in diesem Falle nicht mehr in Wellenform fortpflanzt. Nach der Praxis treten in solchen Fällen Stoßwellen auf.

In der Mechanik wurde die Kontinuitätsgleichung aus einer Integralgleichung abgeleitet, u. zw. ausgehend von der Annahme, daß die in ihr vorkommenden Funktionen stetig und differentierbar sind. HADAMARD und KOLMOGOROFF haben bewiesen, daß die Transportintegralgleichungen, die als Ausgangsgleichungen der Kontinuitätsgleichungen gewählt wurden, auch unstetige Lösungen haben. Den geometrischen Ort der Unstetigkeitsstellen — der die Front der Stoßwellen nannte — hat HUGONOT bewiesen, daß die Massen-, Impuls- und Energieströmungen keinen Sprung an der Wellenfront aufweisen. Diese drei Sätze sollen jetzt bewiesen werden.

Der Einfachheit halber soll die Strömung einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit in Richtung der Achse  $x$  betrachtet werden für den Fall, daß die äußeren Kräfte und die Diffusion vernachlässigt werden können.

Die HUGONOT-Sätze gehören insofern zu den Grundprinzipien der Verbrennungstheorie, als sie die Grundgleichungen ergänzen. Die Grundgleichungen sind nämlich an den sogenannten Unstetigkeitsstellen nicht gültig.

Es sei  $x(t)$  die Unstetigkeitsstelle, also offenbar eine Funktion der Zeit  $t$ . Entsprechend kann geschrieben werden:

$$x(t_1) = x_1 < x < x_2 = x_1 + \Delta x = x(t_2),$$

$$t_1 < t < t_2 = t_1 + \Delta t.$$

An der Wellenfront, d. h. im Punkt  $x(t)$  sollen die Funktionen  $\varrho(x, t)$  und  $v(x, t)$  einen Sprung haben, es gilt daher

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x(t)-0} \varrho(x, t) &= \varrho_0(t) \\ \lim_{x \rightarrow x(t)+0} \varrho(x, t) &= \varrho_1(t) \end{aligned} \quad \varrho_0(t) \neq \varrho_1(t)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x(t)-0} v(x, t) &= v_0(t) \\ \lim_{x \rightarrow x(t)+0} v(x, t) &= v_1(t). \end{aligned} \quad v_0(t) \neq v_1(t).$$

Unter Fixierung des Zeitpunktes soll untersucht werden, inwiefern sich die Flüssigkeitsmasse im Intervall  $(x_1, x_2)$  während der Zeit  $t_2 - t_1 = \Delta t$  verändert hat. Sie entspricht offenbar dem Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x, t_1) dx = \int_{x_1}^{x_2} [\varrho(x, t_2) - \varrho(x, t_1)] dx. \quad (1)$$

Es soll nun untersucht werden, wieviel Flüssigkeit an den Punkten  $x_1$  bzw.  $x_2$  in das Intervall  $(x_1, x_2)$  eingeströmt ist.

Am Punkt  $x_1$  schreibt sie sich an

$$\int_{t_1}^{t_2} \varrho(x_1, t) v(x_1, t) dt,$$

am Punkt  $x_2$  hingegen zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \varrho(x_2, t) v(x_2, t) dt,$$

insgesamt also beträgt die Massenveränderung im Zeitintervall  $t_2 - t_1 = \Delta t$  im Intervall  $(x_1, x_2)$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\varrho(x_1, t) v(x_1, t) - \varrho(x_2, t) v(x_2, t)] dt \quad (2)$$

da (1) und (2) gleich sind, kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} [\varrho(x, t_2) - \varrho(x, t_1)] dx = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} [\varrho(x_2, t) v(x_2, t) - \varrho(x_1, t) v(x_1, t)] dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Wendet man auf beiden Seiten den aus der Integralrechnung bekannten Mittelwertsatz an, nach welchem wenn die Funktion  $f(x)$  in dem Intervall

$a \leq x \leq b$  integrierbar ist, dann gibt es auch eine Stelle, an der  $a \leq x^* \leq b$  gültig ist:

$$f(x^*) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx,$$

es kann somit geschrieben werden

$$\varrho(x^*, t_2) - \varrho(x^*, t_1) \Delta x = -[\varrho(x_2, t^*) v(x_2, t^*) - \varrho(x_1, t^*) v(x_1, t^*)] \Delta t.$$

Erfolgt der Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  so, daß

$$x_1 \rightarrow x(t_1), x_2 \rightarrow x(t_2); t_1 \rightarrow t, t_2 \rightarrow t,$$

ergibt sich

$$(\varrho_2 - \varrho_1) U = \varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1, \tag{4}$$

worin  $U = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$  die Geschwindigkeit der Stoßwelle bedeutet. Die Geschwindigkeit des Systems im Verhältnis zur Wellenfront, u. zw. vor bzw. nach ihr (linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert) kann wie folgt geschrieben werden:

$$u_1 = U - v_1 \tag{5}$$

bzw.

$$u_2 = U - v_2 \tag{6}$$

Summiert man (5) und (6), ergibt sich

$$U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{1}{2}(u_2 + v_2).$$

Mit diesen Ausdruck nimmt (4) die Form

$$(\varrho_2 - \varrho_1)(u_1 + v_1 + u_2 + v_2) = 2(\varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1)$$

an, woraus

$$\begin{aligned} \varrho_2 u_2 - \varrho_1 u_1 + \varrho_2(u_1 + v_1) - \varrho_1(u_2 + v_2) + \\ + \varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1 = 2(\varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1). \end{aligned}$$

Da gemäß (5) und (6)  $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = U$  ist, wird

$$\varrho_2 u_2 - \varrho_1 u_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) U = \varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1.$$

Wieder mit Gl. (4) sich  $\varrho_2 u_2 - \varrho_1 u_1 = 0$

und für den ersten Satz von HUGONIOT

$$\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2. \quad (7)$$

Zur Ableitung des zweiten Satzes von HUGONIOT muß die Transportgleichung des Impulses in Integralform aufgeschrieben werden:

$$\int_{x_1}^{x_2} [\varrho(x, t_2) v(x, t_2) - \varrho(x, t_1) v(x, t_1)] dx.$$

Dieser Ausdruck gibt die Veränderung des Impulses des Mediums an, und zwar im Intervall  $(x_1, x_2)$  im betrachteten Zeitintervall  $(t_2, t_1)$ . Dieser stimmt offenbar mit der Differenz zwischen dem in Punkt  $x_1$  eintretenden und dem in Punkt  $x_2$  austretenden Impuls überein.

Es sei  $J$  der in der Zeiteinheit durch die Oberflächeneinheit hindurchtretende Impuls. Der konvektive Teil von  $J$  wird dann

$$\varrho v \cdot v = \varrho v^2,$$

der konduktive Teil hingegen ist dem Drucke gleich, da der Druck die auf die Oberflächeneinheit einwirkende Kraft ist und die Kraft ist nichts anders, als die Impulsveränderung in der Zeiteinheit. Die Transportgleichung wird demgemäß die Form

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [\varrho(x, t_2) v(x, t_2) - \varrho(x, t_1) v(x, t_1)] dx = \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} [p(x_2, t) + \varrho(x_2, t) v^2(x_2, t) - p(x_1, t) - \varrho(x_1, t) v^2(x_1, t)] dt \end{aligned}$$

haben. Wendet man den Mittelwertsatz an, und zieht man den Grenzübergang in Betracht, erhält man

$$U(\varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1) = p_2 - p_1 + \varrho_2 v_2^2 - \varrho_1 v_1^2. \quad (8)$$

Setzt man in den zweiten Faktor der linken Seite die rechte Seite von (4) ein, dann hat man

$$U^2(\varrho_2 - \varrho_1) = p_2 + \varrho_2 v_2^2 - p_1 - \varrho_1 v_1^2.$$

Mit den Zusammenhängen

$$v_1 = U - u_1; v_2 = U - u_2,$$

die sich aus (5) und (6) ergeben, hat man

$$U^2(\varrho_2 - \varrho_1) = p_2 + (\varrho_2 - \varrho_1) U^2 - p_1 2 U(\varrho_2 u_2 - \varrho_1 u_1) + \varrho_2 u_2^2 - \varrho_1 u_1^2,$$

d. h.:

$$p_1 + \varrho_1 u_1^2 = p_2 + \varrho_2^2 u_2^2 - 2 U(\varrho_2 u_2 - \varrho_1 u_1).$$

Das letzte Glied der rechten Seite fällt wegen (7) aus, und es bleibt

$$p_1 + \varrho_1 u_1^2 = p_2 + \varrho_2 u_2^2, \quad (9)$$

d. h. der zweite Satz von HUGONIOT.

Ein ähnlicher Gedankengang führt zur Ableitung des dritten Satzes. Die Energiedichte sei

$$\frac{\varrho v^2}{2} + \varrho e,$$

wobei  $e$  die innere Energie der Masseneinheit ist, die Energieströmungsdichte hingegen

$$\left( \frac{\varrho v^2}{2} + \varrho e \right) \cdot v,$$

d. h. mit Annäherung:

$$\left( \frac{\varrho v^2}{2} + \varrho i \right) v; \quad \left( i = e + \frac{p}{\varrho} \right). \quad (10)$$

Schreibt man die Transportgleichung mit diesen Zusammenhängen in Integralform auf, wendend man wieder den Mittelwertsatz an und zieht man den Grenzübergang in Betracht, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\varrho_2 v_2^2}{2} + \varrho_2 e_2 - \frac{\varrho_1 v_1^2}{2} - \varrho_1 \cdot e_1 \right] U = \\ & = \left( \frac{\varrho_2 v_2^2}{2} + \varrho_2 i_2 \right) v_2 - \left( \frac{\varrho_1 v_1^2}{2} + \varrho_1 i_1 \right) \cdot v_1. \end{aligned}$$

Hieraus und aus (5), (6) sowie unter Anwendung der ersten zwei Sätze von HUGONIOT hat man den dritten Satz von HUGONIOT:

$$e_1 + p_1 V_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = e_2 + p_2 V_2 + \frac{1}{2} u_2^2, \quad (11)$$

in den  $V = \frac{1}{\varrho}$  das spezifische Volumen bedeutet.

Zusammenfassend gilt die Feststellung, daß an der Front der Stoßwelle folgende Gleichungen Gültigkeit haben müssen:

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2, \\ e_1 + p_1 V_1 + \frac{1}{2} u_1^2 &= e_2 + p_2 V_2 + \frac{1}{2} u_2^2. \end{aligned}$$

Dies sind die *drei Sätze von HUGONIOT*. Mit ihrer Hilfe läßt sich das gasdynamische Modell des Verbrennungsprozesses aufbauen, demzufolge die Flammenfortpflanzung ein in dem brennbaren Gas sich abspielender Stoßwellenprozeß darstellt. Im weiteren soll angenommen werden, daß die Stoßwelle die Flamme begrenzt und daß sich chemische Reaktionswärme nur nach der Front zu befreit, während sie vor der Front vernachlässigbar ist.

Die Klassifikation der Verbrennungsprozesse geschieht auf Grund dieses Modells. Um sie zu ermöglichen, müssen die Sätze von HUGONIOT transformiert werden. Zuerst sollen Größen definiert werden, die nur von den Anfangszuständen  $p_1, V_1$  abhängig und somit vom Gesichtspunkt des Endzustandes unabhängig sind. Hier verstehen wir unter Anfangs- und Endzuständen die dem Sprungpunkt zugehörigen links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte der Zustandsgrößen  $p, V$ . Im Weiteren befassen wir uns nur mit dem an der Brechungsfront sich abspielenden Sprungprozeß.

Die eine Bewegungskonstante soll

$$M = \rho_2 u_2 (= \rho_1 u_1), \quad (12)$$

die andere

$$H = e_1(p_1, V_1) - e_2(p_1, V_1) \quad (13)$$

sein. Sie ist im Sinne früher gestellter Bedingungen der spezifischen Reaktionswärme gleich.  $M$  sei die Impulsdichte oder Massenstromdichte in bezug auf die Wellenfront. Mit diesen zwei Größen erhält man aus den drei HUGONIOT-Sätze, die drei ihnen äquivalenten Gleichungen

$$\frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1} = -M, \quad (14)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = -M^2, \quad (15)$$

$$e_2(p_2, V_2) - e_2(p_1, V_1) + \frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_1 + p_2) = H, \quad (16)$$

in denen natürlich

$$H(p_1, V_1) \neq H(p_2, V_2).$$

(14), (15) und (16) nennt man auch die erste, zweite und dritte Gleichung von HUGONIOT. Ihre Ableitung aus den HUGONIOT-Sätzen und aus dem Verhältnis von  $v_1, v_2$  zu  $u_1, u_2$  nimmt folgenden Verlauf:

Aus (9) ist

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \varrho_1 u_1^2 - \varrho_2 u_2^2 = \varrho_1 u_1 u_1 - \varrho_2 u_2 u_2 \\ &= (\text{siehe ersten HUGONIOT Satz}) = \\ &= M(u_1 - u_2) = Mu_1 - Mu_2, \end{aligned} \tag{17}$$

es wird demnach

$$\frac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1} = -M.$$

Wenn aber in der ersten Gleichung von (17)  $\frac{M}{\varrho_1}$  anstatt  $u_1$  und  $\frac{M}{\varrho_2}$  statt  $u_2$  geschrieben wird, dann ergibt sich mit der Bezeichnung  $\frac{1}{\varrho} = V$  die Gleichung

$$p_2 - p_1 = \frac{M^2}{\varrho_1} - \frac{M^2}{\varrho_2} = M^2 \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) = -M^2 (V_2 - V_1)$$

und schließlich der Ausdruck

$$\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = -M^2.$$

Um (16) ableiten zu können, muß im Betracht gezogen werden, daß aus der Definition von  $H$

$$\begin{aligned} e_2(p_2, V_2) - e_2(p_1, V_1) - H &= \\ &= e_2(p_2, V_2) - e_2(p_1, V_1) - [e_1(p_1, V_1) - \\ &- e_2(p_1, V_1)] = e_2(p_2, V_2) - e_1(p_1, V_1) \end{aligned} \tag{18}$$

folgt. Hieraus wird nach dem dritten Satz von HUGONIOT weiter =

$$= p_1 V_1 + \frac{1}{2} u_1^2 - p_2 V_2 - \frac{1}{2} u_2^2.$$

Setzt man statt  $u_1^2, u_2^2$  die Größen  $M^2 V_1^2$ , bzw.  $M^2 V_2^2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} e_2(p_2, V_2) - e_2(p_1, V_1) - H &= p_1 V_1 - p_2 V_2 + \frac{1}{2} (M^2 V_1^2 - M^2 V_2^2) = \\ &= p_1 V_1 - p_2 V_2 + \frac{1}{2} (p_2 V_2 + p_2 V_1 - p_1 V_2 - p_1 V_1) = \\ &= \frac{1}{2} (V_2 - V_1) (p_1 + p_2), \end{aligned}$$

und dieser Satz wäre zu bestätigen. Nun soll untersucht werden, welche  $p_2, V_2$  - Zustände aus den  $p_1, V_1$  - Anfangszuständen vorkommen können? Um einen konkreten Fall betrachten zu können, sei die Reaktionswärme, d. h.  $H$  fixiert. In diesem Falle müssen die möglichen  $p_2, V_2$  - Zustandsgrößen auf der Kurve

$$H = \text{konst.} \quad (19)$$

liegen. Im Falle von (16) und (19) definiert

$$p_2 = p_2(V_2) \quad (20)$$

ein Zusammenhang zwischen  $p_2, V_2$ , in dem die Parameter  $p_1, V_1$  und  $H$  sind.

Die implizite Gleichung der Kurve (20) entspricht eben der Gl. (16), und auf Grund von (16) soll der Verlauf der Funktion  $p_2 = p_2(V_2)$  untersucht werden.

Differenziert man (16) nach  $V_2$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_2(p_2, V_2)}{\partial p_2} \cdot \frac{dp_2}{dV_2} + \frac{\partial e_2(p_2, V_2)}{\partial V_2} + \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \\ + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) \frac{dp_2}{dV_2} = 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} \frac{dp_2}{dV_2} \left[ \frac{\partial e_2(p_2, V_2)}{\partial p_2} + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) \right] = \\ = - \left[ \frac{\partial e_2(p_2, V_2)}{\partial V_2} + \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Es kann angenommen werden, daß  $\frac{\partial e_2(p_2, V_2)}{\partial p_2}, \frac{\partial e_2}{\partial v_2} > 0$ ,

und für ideale Gase soll bewiesen werden, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer auf der linken Seite nie negativ sein kann.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_2(p_2, V_2)}{\partial p_2} &= \frac{\partial}{\partial p_2} (C_v \cdot T_2) = \frac{\partial}{\partial p_2} \left( C_v \cdot \frac{p_2 V_2}{R} \right) = \\ &= \frac{C_v}{R} V_2 = \frac{1}{z-1} V_2, \quad \left( z = \frac{C_p}{C_v} > 1 \right). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer könnte nur negativ sein, wenn

$$\frac{V_2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) < 0$$

wäre. Dies aber würde bedeuten, daß

$$\frac{V_1}{V_2} > \frac{2}{\kappa - 1} + 1 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \quad (22)$$

wäre. Es soll jedoch bewiesen werden, daß dieses Verhältnis nie erreichbar ist. Um das beweisen zu können, wollen wir die dritte HUGONIOT-Gleichung transformieren. Auf Grund von (18) und mit  $\frac{1}{V} = \varrho$ , ergibt sich

$$e_2(p_2, V_2) - e_1(p_1, V_1) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} (\varrho_1 - \varrho_2) (p_1 - p_2). \quad (23)$$

Zieht man in Betracht, daß

$$\begin{aligned} e_1(p_1, V_1) &= C_v T_1 + q; \quad e_2(p_2, V_2) = C_v T_2; \\ e_2(p_2, V_2) - e_1(p_1, V_1) &= \frac{C_v}{R} \left( \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1} \right) - q = \\ &= \frac{1}{\kappa - 1} \left( \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1} \right) - q \end{aligned} \quad (24)$$

wo  $q$  die spezifische Reaktionswärme ist.

Aus (23) und (24) folgt

$$\frac{1}{\kappa - 1} \left( \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{p_2}{\varrho_1} - \frac{p_1}{\varrho_1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1}{\varrho_2} - \frac{p_2}{\varrho_2} \right) + q,$$

woraus

$$\begin{aligned} -q + p_2 \frac{2\varrho_1 + (\kappa - 1)\varrho_1 - (\kappa - 1)\varrho_2}{2(\kappa - 1)\varrho_1\varrho_2} &= \\ = p_1 \cdot \frac{2\varrho_2 + (\kappa - 1)\varrho_2 - (\kappa - 1)\varrho_1}{2(\kappa - 1)\varrho_1\varrho_2}, \end{aligned}$$

d. h.:

$$\begin{aligned} p_2 [(\kappa + 1)\varrho_1 - (\kappa - 1)\varrho_2] &= \\ = p_1 [(\kappa + 1)\varrho_2 - (\kappa - 1)\varrho_1] + 2(\kappa - 1)\varrho_1\varrho_2 \cdot q. \end{aligned} \quad (25)$$

Es gilt somit

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\kappa + 1) \varrho_2 - (\kappa - 1) \varrho_1}{(\kappa + 1) \varrho_1 - (\kappa - 1) \varrho_2} + 2 \frac{(\kappa - 1) \varrho_1 \varrho_2 \cdot q}{p_1 (\kappa + 1) \varrho_1 - (\kappa - 1) \varrho_2} \quad (26)$$

und aus (25)

$$\begin{aligned} & \varrho_1 [(\kappa + 1) p_2 + (\kappa - 1) p_1 - 2(\kappa - 1) q \varrho_2] = \\ & = \varrho_2 [(\kappa + 1) p_1 + (\kappa - 1) p_2], \end{aligned} \quad (27)$$

woraus

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} + \kappa - 1 - \frac{2q\varrho_2}{p_1}}{(\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1} + 1}. \quad (28)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der maximale Dichtesprung — d.h.

wenn  $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$  —, dem  $\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$  gleich ist.

Aus dem gesagten folgt, daß die maximale Relation  $V_1/V_2$  gleichfalls  $\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$  gleich ist. Nachdem diese *maximal* ist, besteht die Ungleichheit

$$\frac{V_1}{V_2} < \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \quad (29)$$

und nicht umgekehrt, wie in (21) auf indirektem Wege angenommen war. Für ideale Gase ist damit bewiesen, daß

$$\frac{dp_2}{dV_2} < 0, \quad (30)$$

d. h. die Funktion ist monoton abnehmend. Es ist leicht einzusehen, daß sie von unten konvex ist, daß also

$$-\frac{d^2 p_2}{dV_2^2} < 0.$$

Hierzu soll (26) in der Form

$$p_2 = p_1 \frac{(\kappa + 1) V_1 - (\kappa - 1) V_2}{(\kappa + 1) V_2 - (\kappa - 1) V_1} + \frac{2(\kappa - 1) q}{(\kappa + 1) V_2 - (\kappa - 1) V_1} \quad (31)$$

geschrieben werden, wobei sich

$$\frac{dp_2}{dV_2} = - \frac{2(z^2 - 1)q + 4z p_1 V_1}{[(z + 1)V_2 - (z - 1)V_1]^2} < 0$$

ergibt, wie in (30) gezeigt. Hieraus ist

$$\frac{d^2 p_2}{dV_1^2} = 2 \cdot \frac{2(z^2 - 1)q + 4z p_1 V_1}{[(z + 1)V_2 - (z - 1)V_1]^3}$$

ablesbar.

Hier ist der Nenner größer als Null, weil

$$(z + 1)V_2 - (z - 1)V_1 > 0,$$

da der Zähler gemäß (29)

$$\frac{V_1}{V_2} < \frac{(z + 1)}{(z - 1)}$$

die Summe zweier positiver Zahlen darstellt. Und tatsächlich ist die

$$\frac{d^2 p_2}{dV_2^2} > 0. \tag{32}$$

Wenn  $H$  gegeben ist und bei gegebenen Anfangsgrößen  $p_1, V_1$  müssen die Postwellenfront-Werte  $p_2, V_2$  auf einer von unten konvexen, monoton abnehmenden Kurve liegen. Diese Kurve  $p_2 = p_2(V_2)$  wird *die Adiabate von HUGONIOT* genannt. Der Name ist damit begründet, daß die Reaktionswärme das System bei Übersteigen der Wellenfront nicht verläßt.

Trägt man die Adiabate von Hugoniot in das Koordinatensystem  $p, V$  auf, zeigt sich vor allem, daß der Punkt  $p_1, V_1$  unbedingt an der konvexen Seite der Kurve liegen muß (Abb. 1).

Um dies einzusehen, muß bedacht werden, ob die Ordinate  $p_2$  des Punktes mit der Abszisse  $V_2 = V_1$  größer ist als  $p_1$  und umgekehrt, ob die Abszisse des Punktes mit der Ordinate  $p_2 = p_1$  größer ist, als  $V_1$ . Wir beweisen, daß sie größer sind, d. h. daß

$$p_2(V_1) > p_1 \tag{33}$$

und

$$V_2(p_1) > V_1. \tag{34}$$

Um das einzusehen, bilden wir zunächst  $p_2(V_1)$  auf Grund von (31):

$$p_2(V_1) = p_1 + \frac{z - 1}{V_1} > p_1. \tag{35}$$

Da

$$q > 0 \text{ und } z > 1 \text{ sind.}$$

Wenn aber  $p_2 = p_1$ , dann ist gemäß (31)

$$p_1 = p_1 \frac{(\kappa + 1) V_1 - (\kappa - 1) V_2}{(\kappa + 1) V_2 - (\kappa - 1) V_1} + 2 \frac{(\kappa - 1) q}{(\kappa + 1) V_2 - (\kappa - 1) V_1},$$

woraus, wie behauptet,

$$V_2 = V_1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{p_1} > V_1, \quad (36)$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Punkt  $p_1, V_1$  deshalb an der konvexen Seite der Kurve liegt, weil die Reaktion exotherm ist ( $q > 0$ ), im gegenteiligen Fall

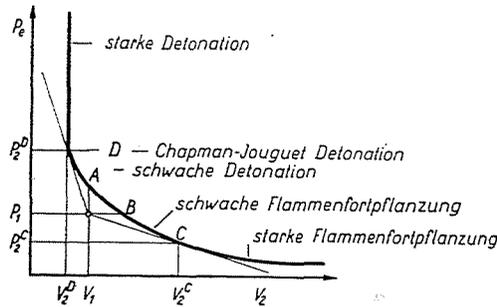


Abb. 1. Klassifizierung der Verbrennungsprozesse

liegt er an der konkaven Seite. Da der Punkt  $p_1, V_1$  an der konvexen Seite der HUGONIOTSCHEN Kurve liegt, können vom Punkt  $p_1, V_1$  zwei Berührungslinien an die Kurve gezogen werden. Bei endothermen Reaktionen läßt sich keine Berührungslinie ziehen (siehe Abb. 1). Zur Klassifikation der Verbrennungsprozesse sollen vier ausgewählte Punkte an der Kurve untersucht werden.

Es sei  $A$  der Punkt mit der Abszisse  $V_1$ ,

$B$  der Punkt mit der Ordinate  $p_1$ ,

$C$  der Punkt, dessen Abszisse größer ist als  $V_1$ . Es ist der Berührungspunkt zwischen der Kurve und der an sie vom Punkt  $p_1, V_1$  gelegten Berührungslinie dessen Koordinaten  $p_2^c, V_2^c$  sind, und schließlich,

$D$  der andere Berührungspunkt, dessen Koordinaten  $p_2^D, V_2^D$  sind. Er ist entstanden, indem eine Berührungslinie aus Punkt  $p_1, V_1$  an die linke Seite der Kurve (mit der Ordinate  $p_1$ ) gezogen wurde.

Nun soll die physikalische Bedeutung der durch diese Punkten repräsentierten Zustände untersucht werden. Deshalb wird zunächst die zweite Hugoniot Gleichung [siehe (15)] in der Form

$$p_2 = p_1 - M^2(V_2 - V_1) \tag{37}$$

aufgeschrieben.

Dieser Ausdruck ist die Gleichung der Geraden mit der Richtungstangente  $-M^2$ , die durch die Punkte  $(p_2, V_2)$ ,  $(p_1, V_1)$  verläuft. Wie ersichtlich liegen die Endzustände  $(p_2, V_2)$  einesteils an der HUGONIOTSchen Adiabate

$$p_2 = p_2(V_2), \tag{38}$$

andererseits an der durch Gl. (37) beschriebenen Geraden. Da die Richtungstangente  $-M^2 < 0$  der Geraden nicht positiv sein kann, bedeutet dieser Umstand daß es im Abschnitt zwischen den Punkten *A* und *B* der HUGONIOTSchen Adiabate keine physikalisch möglichen Endzustände  $p_2, V_2$  geben kann. Die Richtungstangente der Geraden, die die zwischen *A* und *B* befindlichen Kurvenpunkte mit  $(p_1, V_1)$  verbindet, mißt nach dem ersten HUGONIOTSchen Satzes bei gegebenem  $\rho_2$  bzw.  $V_2$  die Geschwindigkeit  $u_2$ , und wenn sich die Welle im Ruhegas ( $v_1 = 0$ ) fortpflanzt, dann bedeutet  $u_1$  gemäß (5) und (6) die Geschwindigkeit der Stoßwelle. Sie wird also die Geschwindigkeit der Flammenfortpflanzung bezeichnet. Aus Abb. 1 geht hervor, daß den Kurvenpunkten links vom Punkt *A* größere Flammenfortpflanzungsgeschwindigkeiten zugeordnet sind als jenen rechts vom Punkt *B*. Der linksseitige Bereich ist charakterisiert durch

$$p_2 > p_1, \tag{I}$$

der rechtsseitige durch

$$p_2 < p_1. \tag{II}$$

Im Bereiche I herrschen Zustände, bei denen der Druck *hinter* der Stoßwelle kleiner ist als vor der Welle ( $p_2$ ). Solche Prozesse nennt man *Detonationen*. Im Bereiche II ist die Lage umgekehrt, die Stoßwelle pflanzt sich von den Stellen mit höherem Druck jenen mit kleinerem Druck. Diese Prozesse nennt man *Verbrennungsprozesse* im engeren Sinne oder *Flammenfortpflanzung*. Einen weiteren Klassifizierungsgesichtspunkt bildet die Lagerung der Zustände in Bezug auf die Berührungspunkte *D* und *C*. Die Punkte *C* und *D* bestimmen den Wertevorrat von  $M^2$  und somit von  $U$  oder  $u_2$ , da nämlich nur jene  $M$ -Werte möglich sind, die die Bedingung

$$\frac{p_2^C - p_1}{V_2^C - V_1} < -M^2 < \frac{p_2^D - p_1}{V_2^D - V_1} \tag{39}$$

erfüllen. Der Berührungspunkt *C* trennt den rechtsseitigen Teil der HUGONIOTSchen Adiabate (rechts vom Punkte *B*), d. h. den Bereich der Flammenfortpflanzung in zwei Teile. Der Teil zwischen den Punkten *B* und *C* ist der Bereich der schwachen Flammenfortpflanzung, der andere, rechts von *C* der Bereich der starken Flammenfortpflanzung. Diese Benennungen sind damit begründet,

daß bei den Flammenfortpflanzungen mit identischer Geschwindigkeit bei denen entfernter von  $B$  die Menge

$$\frac{V_1}{V_2} \equiv \frac{q_2}{q_1}$$

höheren Wert annimmt.

Ähnlich trennt der Berührungspunkt  $D$  den linksseitigen Teil der HUGONIOTSchen Adiabate (links von Punkt  $A$ , d. h. den Bereich der Detonation) in zwei Teile. Der Teil  $A - D$  ist der Bereich der schwachen Detonation, der Teil links von  $D$  der Bereich der starken Detonation. Der Zustand bei den Punkten  $D$  bzw.  $C$  representiert die Detonation bzw. die Flammenfortpflanzung nach CHAPMAN—JOUQUET.

Abb. 1. gibt eine gute Übersicht über die Klassifizierung der Verbrennungsprozesse auf Grund des gasdynamischen Modells. Dieser Modell wurde in vielen Beziehungen der Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen. So z. B. zur Untersuchung der Verbrennungsprozesse auf Grund des Nulldimensions-Modells. Unter Nulldimensions-Modell ist eine Annäherung zu verstehen, bei der die Raum- und Zeitabhängigkeit der Phänomene außer Acht gelassen werden und nur der gegenseitige Zusammenhang der anderen Zustandsgrößen untersucht wird. Auf das Vulissche Nulldimensions-Modell der Verbrennungsprozesse werden wir später noch zurückkehren.

Das HUGONIOTSche Modell der Verbrennungsprozesse hat sich als sehr nützlich erwiesen. Es erfaßt einen weiten Erfahrungskreis und ermöglicht es viele Prozesse auf dieser Grundlage zu berechnen.

Die nächste Arbeit wird auf Grund der nun schon bekannten Aufgaben der Verbrennungstheorien eine Übersicht über diese geben und besonders die auf dem eindimensionalen Modell faßende, d. h. die Theorie von FRANCK—KAMENEZKIJ—ZELDOVITSCH ausführlicher behandeln.

### Zusammenfassung

Verfasser gibt einen Beweis der Hugoniot-Sätze, der rationeller ist, als die üblichen. Auf dieser Grundlage klassifiziert er die Verbrennungsprozesse.

### Literatur

1. CHAPMAN, D. L.: Phil. Mag. (5) 47, 90 (1899).
2. FRIDRICH, K. O.: On the Mathematical Theory of Deflagrations and Detonations. Naval Report. 79—46. Bureau of Ordnance, 1946.
3. JOUQUET, E.: J. math. 1905, 347.
4. JOUQUET, E.: J. math. 1906, 5.
5. JOUQUET, E.: Compt. rend. 156, 872 (1913).
6. JOUQUET, E.: Compt. rend. 156, 1058 (1913).
7. JOUQUET, E.: La mécanique des explosifs. Ed. Doin. Paris 1917.
8. JOUQUET, E.—CRUSSARD, L.: Comp. rend. 168, 820 (1919).
9. JOUQUET, E.: La théorie thermodynamique de la propagation des explosions. Proc. Intern. Cong. Applied Mech. 1926. 12.
10. PUNGOR, E.: A lángfotometria elméleti alapjai (Ungarisch). (Die theoretischen Grundlagen der Flammenphotometrie.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962.