

ALLGEMEINES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG DES DURCHGRIFFES VON ELEKTRONENRÖHREN MIT ZYLINDRISCHEN STABELEKTRODEN

Von

A. BALASKÓ

Lehrstuhl für Elektronenröhren und Halbleiter, Technische Universität,
Budapest

(Eingegangen am 4. Januar 1964)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. P. VALKÓ

Einleitung

Die aus dem Schrifttum allgemein bekannten Methoden für die Berechnung des Durchgriffs sind sehr kompliziert und für praktische Zwecke fast unbrauchbar. Die Schwierigkeit besteht in erster Linie darin, daß die Berechnungen für den praktischen Gebrauch zu langwierig und umfangreich sind. Man war deshalb bei der Entwicklung von Elektronenröhren bestrebt, möglichst einfache Elektrodensysteme zu entwickeln, für die möglichst einfache Berechnungsformeln aufgestellt werden können.

Trotzdem kommen in der Praxis immer noch sehr viele Fälle vor, in denen wegen der technischen Anforderungen kompliziertere Systeme verwendet werden müssen. Für diese Fälle gibt es keine einfachen fertigen Berechnungsformeln, und der Konstrukteur ist gezwungen, sie selbst abzuleiten.

Das hier vorgeschlagene Berechnungssystem hat den Vorzug, für zylindrische Stabsysteme allgemeingültig zu sein. Es ist keine exakte Methode, das elektrische Feld des Elektrodensystems wird vielmehr nach konformer Abbildung annähernd durch das Feld von Ladungslinien bestimmt. Im Grunde genommen folgt die Berechnung des elektrostatischen Feldes dem auch von SPANGENBERG [1] beschrittenen klassischen Weg. Die umfangreichen Einzelberechnungen werden jedoch im einfachen übersichtlichen Formalismus der Determinantenalgebra zusammengefaßt.

Das gelöste allgemeine System soll hier als *Bezugssystem* beschrieben werden. Zur Bezeichnung *des Durchgriffes* wird zur allgemeinen Behandlung ein abgeändertes Symbol mit drei Indizes eingeführt. *Die allgemeine Lösung des Potentialfeldes* wird nach dem ursprünglichen Verfahren gesucht und auch formal auf dieselbe Art verwendet. Als nächster Schritt werden die Bedingungsgleichungen aufgestellt. Zu den Grenzbedingungen wird bemerkt, daß für die Genauigkeit der Durchgriffsberechnungen ein optimales Netz der Grenzbedingungspunkte besteht. Daraus folgt, daß die Grenzbedingungspunkte nach einer bestimmten Regel ausgewählt werden müssen. Aus den für das Bezugssystem aufgeschriebenen Bedingungsgleichungen kann jede beliebige Ersatzladung berechnet werden. Die Beiwerte der Bezugsgleichungen werden — von der ursprünglichen Aufgabe abweichend — in einer erweiterten Matrix

zusammengefaßt, auf die dann sämtliche mathematischen Operationen angewendet werden. Damit erhält man bei ganz allgemeiner Gültigkeit den Ausdruck für den Durchgriff in geschlossener Form als Quotienten zweier Determinanten. Der so ermittelte Ausdruck bildet die allgemeinste eingeführte Formel, die bei beliebiger Umordnung der Stabelemente des untersuchten Systems auf die gleiche Art und Weise ermittelt werden kann. In diesem Sinne kann also der betreffende Ausdruck als *topologische Definition des Durchgriffes* betrachtet werden. Trägt die Umordnung der Stabelemente Symmetriebedingungen in das System, folgt der Änderung der geometrischen Struktur die Reduktion des Ausdrucks für den Durchgriff, wobei sich zwischen ihnen eine eindeutige Wechselbeziehung feststellen läßt. Die mathematischen Bedingungen der erwähnten Reduktion werden im Ausdruck für die Symmetriebedingungen durch ein Symbol zusammengefaßt.

Bezugssystem

Wird der eine Sektor der Abbildung 1a N -mal bis zum Öffnungswinkel $\beta, 2\beta, \dots, 2\pi$ wiederholt, erhält man das eigentliche Bezugssystem. Die Elektroden sollen folgendermaßen bezeichnet werden: den Grenzbedingungen entsprechend werden die Gruppen der Elemente gleichen Potentials, vom Zentrum ausgehend, mit den Indizes $I = 1, 2, \dots (T - 1)$ versehen. (Die T -te Elektrode ist der begrenzende Metallzylinder.)

Es wird weiterhin der Index y benutzt, der, vom Zentrum ausgehend, jedes einzelne Element bezeichnet. Zur allgemeinen Bezeichnung der Indexnummern » I « werden die Großbuchstaben $A, B, C \dots$ herangezogen, während zur allgemeinen Bezeichnung der Indexnummern » y « die Kleinbuchstaben $a, b, c \dots$ benutzt werden. Die Anzahl der vom Zylinder eingeschlossenen Elemente beträgt $X - 1$, wenn $y = X$ ist.

Die Ladung der Einheitslänge der Ladungslinien wird mit q bezeichnet. Die Gesamtladung eines Elementes mit dem Index y ist Q_y .

Jedem Punkt P des Sektors der Abb. 1a wird eine komplexe Zahl $z = re^{j\varphi}$ zugeordnet. Die Achse des y -ten Elementes im Sektor eines Querschnittes ist $z_y = r_y e^{j\theta_y}$ der Durchmesser des Stabes hingegen $2 \varrho_y$.

Die Definition des Durchgriffes

Die mathematische Definition des Durchgriffes ist aus [2] übernommen. Die dort benutzte Bezeichnung durch einen Index wird noch mit einem oberen Index erweitert. Der mit dem Symbol D_{JK}^y bezeichnete Durchgriff bedeutet das Durchdringen des elektrostatischen Feldes der J -ten Elektrode in Rich-

tung des y -ten Elementes durch die »Spalten« der K -ten Elektrode (oder auf diese bezogen).¹

$$D_{JK}^y = \frac{\frac{\partial Q_y}{\partial U_J}}{\frac{\partial Q_y}{\partial U_K}} = \frac{\frac{\partial q_y}{\partial U_J}}{\frac{\partial q_y}{\partial U_K}} = \frac{\frac{\partial E_y}{\partial U_J}}{\frac{\partial E_y}{\partial U_K}} = - \left(\frac{\partial U_K}{\partial U_J} \right)_{E_y = \text{Konst.}} \quad (1)$$

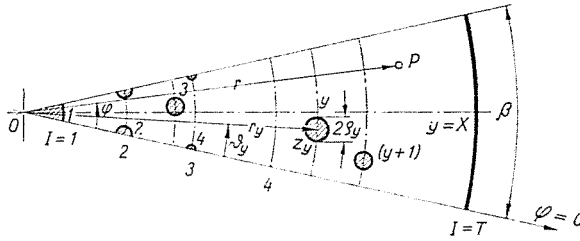


Abb. 1a. Das Bezugssystem. $P = P(r, \varphi)$ ist ein Punkt des Sektors. z_y ist der Ortsvektor der Achse des y -ten Stabes. Es sind die eingeführten Indizes und die Elektrodennummern angegeben

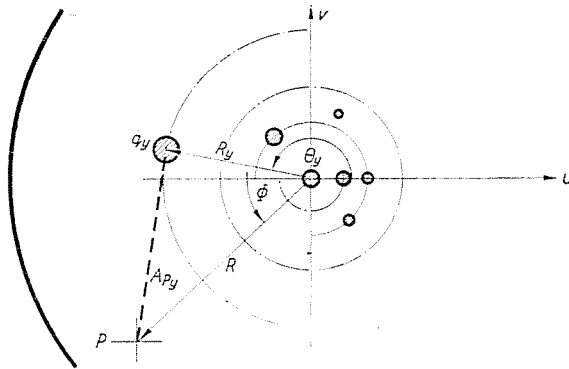


Abb. 1b. Die Geometrie der Bildebene

Hier bedeutet U_J bzw. U_K die Spannung der I -ten bzw. K -ten Elektrode, auf das y -te Element bezogen, während E_y die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche des y -ten Elementes angibt.

Der Ausdruck (1) zeigt, in welchem Maße sich die Ladung der y -ten Elektrode ändert, wenn die Spannungen der J -ten bzw. K -ten Elektrode gegenüber diesem Element in gleichem Maße geändert wird. Die obige Zahl gibt außerdem das Verhältnis der Feldstärkeänderung bei den gegebenen Bedingungen an.

¹ Diese Formulierung erleichtert das Verständnis der Bedeutung der Indizes J, K, y . Im Bezugssystem, das als Ausgang der Behandlung dient, muß die K -te Elektrode das y -te Element nicht umgeben, auch muß die Elektrode keine Spalten haben.

Der Ausdruck (1) interpretiert den Durchgriff nur für ein Element des Bezugssystems.

Ist das Element y der Teil einer Elektrode, deren einzelne Elemente die gleiche Ladung Q_y besitzen, liegt in Bezug auf weitere Berechnungen ein Sonderfall vor. (Der Durchgriff kann dann nicht nur für ein Element, sondern für die ganze Elektrode bestimmt werden.) In diesem Fall mußte natürlich die Bezeichnung D des Durchgriffes mit dem oberen Index »I« versehen werden, z. B. D_{JK}^I , doch wird im folgenden immer im Sinne des Ausdrucks (1) vorgegangen.

Allgemeine Lösung des Potentialfeldes

Der Sektor $1a$ wird durch konforme Abbildung in eine Form gebracht, in der das Potentialfeld durch räumliche Ladungsgebilde auf elementare Weise bestimmt werden kann. Das Potential der Bildebene kann ausgenützt werden, indem man durch Transformationsgleichungen auf die Veränderlichen der Ausgangsebene zurückkehrt.

Die Abbildungsfunktion $w = \left(\frac{z}{c}\right)^N$ transformiert die Ausgangsebene in den Bereich der Abbildung $1b$, wenn $N = \frac{2\pi}{\beta}$ und c eine Konstante ist.

Das Bild des Punktes z ist

$$w = R \cdot e^{j\varphi} = \left(\frac{r}{c}\right)^N \cdot e^{jN\varphi}.$$

Hieraus erhält man die Transformationsgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{r}{c}\right)^N \\ \varphi &= N\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Indizes der entsprechenden Elemente in der Ausgangs- bzw. Bildebene werden nicht geändert. Der Ort des Stabes y in der Ebene w ist

$$w_y = R_y e^{j\theta_y} = \left(\frac{r_y}{c}\right)^N e^{jN\theta_y}.$$

Ist ϱ_y in der Ausgangsebene nicht groß, kann das Bild des Elementes y als Kreiszyylinder betrachtet werden. Das Potential der Elektroden kann von einem beliebig gewählten Nullpegel aus gemessen werden. Die Gl. (1) erfordert, daß die Spannung des y -ten Elementes gleich der Spannung dieses Nullpegels sei.

Die Potentialverteilung wird im System 1b aus dem Feld der Ladungslinien q_y superponiert. Bei dieser Lösung wird verlangt, daß sich die Äquipotentiallinien an die in der Ebene w abgebildeten Bilder der Elemente mit dem Radius ϱ_y gut anschmiegen. Ist ϱ_y klein, bleibt die konforme Transformation kreisgerecht. Die Äquipotentiallinien sind nur in jener ganz engen Umgebung der Ladungslinien q_y Kreise, in der die Wirkung der anderen Ladungsgebilde des Feldes vernachlässigt werden kann. Auf Grund dieser Voraussetzung sollen anhand der bekannten Potentialbestimmung quantitative Näherungsvorschriften angegeben werden.

Im Sinne des Gesagten läßt sich die Wirkung der y -ten Ladungslinien im Punkt P in der Form

$$-4\pi\epsilon_0 U_y(P) = q_y \cdot \ln A_{Py}^2 + K_1 \quad (3)$$

schreiben. Hier bedeutet A_{Py} die Entfernung des Punktes w_y von P , während sich A_{Py}^2 gemäß Abbildung 1b nach dem Kosinussatz zu

$$A_{Py}^2 = R^2 + R_y^2 - 2RR_y \cdot \cos(\varnothing - \vartheta_y)$$

schreibt. Mit den Transformationsgleichungen (2) und nach Einführung der Bezeichnung $a_{py} = \ln A_{Py}^2$ hat man

$$-4\pi\epsilon_0 \cdot U(P) = \sum_{y=1}^{X-1} a_{py} \cdot q_y + K, \quad (4)$$

worin

$$a_{py} = \ln \left[\left(\frac{r}{c} \right)^{2N} + \left(\frac{r_y}{c} \right)^{2N} - 2 \left(\frac{r}{c} \right)^N \cdot \left(\frac{r_y}{c} \right)^N \cdot \cos N(\varphi - \vartheta_y) \right]. \quad (5)$$

Die Wirkung des Anodenzylinders mit dem Index Y wurde hier mit einer Konstante K bezeichnet. Dies setzt voraus, daß der Anodenzylinder von den inneren Elektroden so weit entfernt ist, daß ihre Fernwirkung als elektrisches Feld von Ladungslinien (Σ_q) in den Punkten des Begrenzungszyllinders anzusehen ist. Die hierfür gültigen quantitative Vorschriften werden gleichfalls angegeben werden können. Die Behauptung, daß die Konstante K als Wirkung des Anodenzylinders anzusehen ist, kann bewiesen werden.

Der Ausdruck (4) wird anhand der Grenzbedingungen dem Bezugssystem genau angepaßt. Der Punkt P werden zu diesem Zweck in den Oberflächenpunkten jedes Elementes $y = x$ fixiert, wobei das Potential dieser Punkte vorgeschrieben wird.

Die Gesamtheit der Grenzbedingungen bilden die Oberflächenpunkte und die zugehörigen Potentialwerte.

Werden die Grenzbedingungen für jedes Element mit dem Index x befriedigt, erhält man aus (4) X Gleichungen. Da die Definition (1) benutzt werden soll, wird das Potential des y -ten Elementes (und der zugehörigen Elektrode) gleich Null gesetzt, man hat also

$$\left. \begin{aligned}
 -4\pi\varepsilon_0 U_1 &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1y} q_y + \dots + a_{1(X-1)} q_{X-1} + K \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_2 &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \dots + a_{2y} q_y + \dots + a_{2(X-1)} q_{X-1} + K \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_3 &= \dots \dots \dots \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_4 &= \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_J &= a_{J1} q_1 + a_{J2} q_2 + \dots + a_{Jy} q_y + \dots + a_{J(X-1)} q_{X-1} + K \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_J &= a_{m1} q_1 + a_{m2} q_2 + \dots + a_{my} q_y + \dots + a_{m(X-1)} q_{X-1} + K \\
 &\dots \dots \dots \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_K &= a_{r1} q_1 + a_{r2} q_2 + \dots + a_{ry} q_y + \dots + a_{r(X-1)} q_{X-1} + K \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_K &= a_{i1} q_1 + a_{i2} q_2 + \dots + a_{iy} q_y + \dots + a_{i(X-1)} q_{X-1} + K \\
 &\dots \dots \dots \\
 -4\pi\varepsilon_0 U_T &= a_{x1} q_1 + a_{x2} q_2 + \dots + a_{xy} q_y + \dots + a_{x(X-1)} q_{X-1} + K
 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Grenzbedingungen

Für die Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist es prinzipiell belanglos, wie die Grenzbedingungspunkte gewählt werden, solange ϱ_y sehr klein ist. Bei endlichen Werten von ϱ_y läßt sich indessen die Genauigkeit der Annäherung durch richtige Wahl der Oberflächenpunkte wesentlich erhöhen.

Es sei die Form der Äquipotentiallinien in der Ebene w der Lösung $U(P) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) \sum_y q_y \cdot a_{Py} \dots$ entsprechend eine Kurve S' . Es werden nun die Oberflächenpunkte zweier Elemente P'_x und P'_y beliebig gewählt.

Werden in diesen Punkten die Spannungen U_J, U_K vorgeschrieben, kann man q_x, q_y bestimmen und erhält eine Lösung für die Zylinder mit den durch P_x, P_y laufenden Leitkurven S'_x, S'_y . Diese Lösung soll in der z -Ebene benutzt werden, weshalb es erforderlich ist, mit der inversen Transformation auf die Ausgangsebene zurückzukehren.

Die Abbildung transformiert S'_x in S_x , wobei jedoch die Kurve S_x in Wirklichkeit niemals mit dem Kreis zusammenfällt, dessen Halbmesser ϱ_x beträgt.

Von den Linien ϱ_x und S_x ist nur bekannt, daß sie in den Grenzbedingungspunkten der Ausgangsebene zusammenfallen. Die Potentialverteilung in der z -Ebene stimmt mit den berechneten Werten in der Nähe der Punkte P_x am besten überein.

Werden also die Oberflächenpunkte in geeigneter Weise ausgewählt, läßt sich ein Netz der Punkte P_x herstellen, aus dessen Potentialfeld D_{JK}^y mit dem kleinsten Fehler berechnet werden kann. Durchgeführte Berechnun-

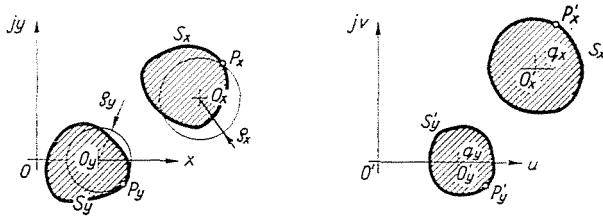


Abb. 2. Die Äquipotentialumfänge S und ϱ schneiden sich in den Punkten P . Hier stellen ϱ die Linien des wahren, S die des angenäherten Potentialfeldes dar

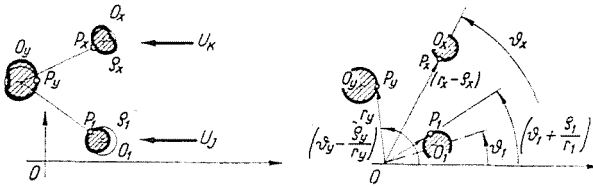


Abb. 3a. Das optimale Netz der Punkte P zur Berechnung des Durchgriffs D_{JK}^y
 Abb. 3b. Das optimale Netz P_x wird annähernd durch den Schnitt von P_x mit ϱ_1 oder durch den Schnitt von r_x und ϱ_x bestimmt

gen machen die Annahme wahrscheinlich, daß die Punkte P_x im optimalen Netz durch die Schnittpunkte der Radien $\overline{O_y O_1}, \overline{O_y O_2} \dots \overline{O_y O_x} \dots$ mit den Kreisen $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_x$ bestimmt werden (Abbildung 3a).

Es genügt jedoch, die Punkte P_x näherungsweise durch die Schnittpunkte des Kreises ϱ_x dem Kreisbogen vom Radius r_x oder mit dem Radius r_x selbst zu bestimmen (Abb. 3b).

In diesen beiden Fällen ist die Angabe der Grenzbedingungen sehr einfach. Sie schreiben sich zu

$$r = r_x; \quad \varphi = \vartheta_x \pm \frac{\varrho_x}{r_x}, \quad U = U_{I(x)}, \quad x = 1, 2 \dots X, \quad (7)$$

oder

$$r = r_x \pm \varrho_x; \quad \varphi = \vartheta_x, \quad U = U_{I(x)}, \quad x = 1, 2 \dots X, \quad (8)$$

wobei die Indexfunktion $I = I(x)$ nach Abb. 4 angegeben werden kann.

Es soll z. B. einem $x = 4$ ein $I = 3$ zugehören. Das bedeutet, daß der Stab $x = 4$ ein Teil der Elektrode 3 mit der an ihr liegenden Spannung U_3 ist.²

Der Ausdruck (5) für a_{py} kann folgendermaßen umgeändert werden:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{xy} &= \ln \left[\left(\frac{r_x}{c} \right)^{2N} + \left(\frac{r_y}{c} \right)^{2N} - 2 \left(\frac{r_x}{c} \right)^N \cdot \left(\frac{r_y}{c} \right)^N \cdot \cos N \left(\vartheta_x \pm \frac{\varrho_x}{r_x} - \vartheta_y \right) \right] \\
 \text{beziehungsweise} \\
 a_{xy} &= \ln \left[\left(\frac{r_x \pm \varrho_x}{c} \right)^{2N} + \left(\frac{r_y}{c} \right)^{2N} - 2 \left(\frac{r_x \pm \varrho_x}{c} \right)^N \cdot \left(\frac{r_y}{c} \right)^N \cdot \cos N (\vartheta_x - \vartheta_y) \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

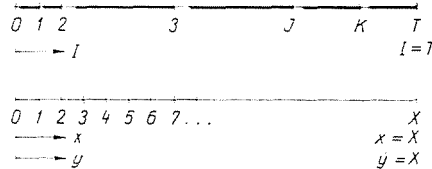


Abb. 4

Aus dem bekannten (9) können nun schon die Näherungsbedingungen zusammengefaßt werden, u. zw. in der Form

$$a_{xx} \cdot q_x < a_{xy} \cdot q_y \quad y \neq x \quad (10)$$

$$a_{xy} \neq f(\vartheta). \quad (11)$$

Das Feld der Ladungslinie q_x (auf dem ϱ_x entsprechenden transformierten Radius) kann mit guter Annäherung als Kreis angesehen werden, wenn (10) befriedigt ist.

Die Wirkung des Anodenzylinders ist in jedem Punkt P gleich, wenn die Beiwerte a_{xy} von den Winkelkoordinaten unabhängig sind [siehe Ausdruck (11)]. In diesem Falle ist

$$a_{x1} = a_{x2} \dots = a_{x(x-1)}.$$

² Der Wert und das Argument der Indexfunktion muß eine ganze Zahl sein. Bei Sprungfunktionen benutzt man an der Stelle des Sprunges den zunächst links stehenden Funktionswert. In der I Skala wird darauf durch die stark ausgezogenen Abschnitte hingewiesen.

Die topologische Bestimmung des Durchgriffes

Aus den Bedingungsgleichungen (6) kann die Ladung q_y der Ladungslinie des y -ten Elementes anhand der Cramerschen Regel berechnet werden:

$$q_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad \text{wenn } \Delta \neq 0 \tag{12}$$

Wird dieser Quotient $\frac{\Delta_y}{\Delta}$, der Definition (1) des Durchgriffs entsprechend, nach U_J und U_K differenziert und werden die vorgeschriebenen Operationen durchgeführt, dann erhält man D_{JK}^y in der Form

$$D_{JK}^y = \frac{\frac{\partial q_y}{\partial U_J}}{\frac{\partial q_y}{\partial U_K}} = \frac{-4\pi\epsilon_0 \cdot \Delta}{-4\pi\epsilon_0 \cdot \Delta} \cdot \frac{\frac{\partial \Delta'_y}{\partial U_J}}{\frac{\partial \Delta'_y}{\partial U_K}} \tag{13}$$

Δ'_y weicht insofern von Δ_y ab, als aus der y -ten Spalte $-4\pi\epsilon_0$ herausgehoben wurde.

$$\frac{\frac{\partial}{\partial U_J} \Delta'_y}{\frac{\partial}{\partial U_K} \Delta'_y} = \frac{\frac{\partial}{\partial U_J} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(y-1)} & U_1 & a_{1(y+1)} & \dots & a_{1(X-1)} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(y-1)} & U_2 & a_{2(y+1)} & \dots & a_{2(X-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(y-1)} & U_J & a_{i(y+1)} & \dots & a_{i(X-1)} & 1 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m(y-1)} & U_J & a_{m(y+1)} & \dots & a_{m(X-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(y-1)} & U_K & a_{r(y+1)} & \dots & a_{r(X-1)} & 1 \\ a_{X1} & a_{X2} & \dots & a_{X(y-1)} & U_1 & a_{X(y+1)} & \dots & a_{X(X-1)} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{\partial}{\partial U_K} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(y-1)} & U_1 & a_{1(y+1)} & \dots & a_{1(X-1)} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(y-1)} & U_2 & a_{2(y+1)} & \dots & a_{2(X-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(y-1)} & U_J & a_{i(y+1)} & \dots & a_{i(X-1)} & 1 \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(y-1)} & U_K & a_{r(y+1)} & \dots & a_{r(X-1)} & 1 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(y-1)} & U_K & a_{i(y+1)} & \dots & a_{i(X-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{X1} & a_{X2} & \dots & a_{X(y-1)} & U_T & a_{X(y+1)} & \dots & a_{X(X-1)} & 1 \end{vmatrix}}$$

Die Differentiation wird in Determinantenform durchgeführt. Eine Ableitung stellt die Summe von X Determinanten dar. Aus dieser Summe wird jedoch nur die y -te Determinante nicht verschwinden, für D_{JK}^y ergibt sich also folgender Ausdruck:

$$D_{JK}^y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1(y-1)} & 0 & a_{1(y+1)} & a_{1(X-1)} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2(y-1)} & 0 & a_{2(y+1)} & a_{2(X-1)} & 1 \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l(y-1)} & 1 & a_{l(y+1)} & a_{l(X-1)} & 1 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m(y-1)} & 1 & a_{m(y+1)} & a_{m(X-1)} & 1 \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r(y-1)} & 0 & a_{r(y+1)} & a_{r(X-1)} & 1 \\ a_{X1} & a_{X2} & a_{X(y-1)} & 0 & a_{X(y+1)} & a_{X(X-1)} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1(y-1)} & 0 & a_{1(y+1)} & a_{1(X-1)} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2(y-1)} & 0 & a_{2(y+1)} & a_{2(X-1)} & 1 \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l(y-1)} & 0 & a_{l(y+1)} & a_{l(X-1)} & 1 \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r(y-1)} & 1 & a_{r(y+1)} & a_{r(X-1)} & 1 \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l(y-1)} & 1 & a_{l(y+1)} & a_{l(X-1)} & 1 \\ a_{X1} & a_{X2} & a_{X(y-1)} & 0 & a_{X(y+1)} & a_{X(X-1)} & 1 \end{vmatrix}} \quad (14)$$

$y = 1, 2, \dots, X$

Im folgendem soll die Formel (14) als die topologische Definition des Durchgriffes betrachtet werden, weil zum Ausdruck bringt, daß der Durchgriff eine rein geometrische Eigenschaft des betrachteten Systems ist. Die Formel (14) ist also die grundlegende Form des Durchgriffes, die auf Grund der geometrischen Struktur des Systems unmittelbar aufgeschrieben werden kann.

Es sind folgende Regeln zu beachten:

1. D_{JK}^y ist der Quotient zweier Determinanten der Ordnungszahl X .
2. In der y -ten Spalte des Zählers sind jene Elemente mit erstem Index x nicht gleich Null, deren Index $I = J$ ist.

In der y -ten Spalte des Nenners gehören jene Elemente mit dem ersten Index x dem $I = K$ zu, die nicht gleich Null sind. Die Elemente der y -ten Spalte, die nicht gleich Null sind, haben alle den Wert 1.

3. An den X -ten Spalten beider Determinanten stehen ausschließlich Elemente mit dem Wert 1.

4. Mit Ausnahme der y -ten und der X -ten Spalte hat jedes Element die Form a_{xy} und kann aus (9) berechnet werden.

Die mathematische Form der Symmetriebedingungen

Man nennt ein System symmetrisch, wenn in seinem elektrostatischen Feld zwei oder mehrere Elemente durch ein Gebilde gleicher Ladungsdichte ersetzt werden können. Das Bezugssystem befriedigt durch die Elemente r und s eine Symmetriebedingung, wenn in dem dort herrschenden elektrostatischen Feld r und s durch gleiche Ladungslinien ersetzt werden können.

Die eingeführten Bedingungen (10) bzw. (11) sind sehr allgemein. In einem solchen Feld findet sich keine Wiederholung oder Symmetrie im gegenseitigen Abstand der sonst regelmäßig geformten Elemente voneinander bzw.

in den Verhältnissen ihrer Durchmesser. In diesem Feld kann die Lösung (4) des elektrostatischen Potentials den Oberflächen der Stäbe nur so angepaßt werden, daß jedes stabförmige Element durch Ladungslinien verschiedener Größe ersetzt wird. Im Ausdruck (4) ist also die Zahl der unbestimmten Größen gleich dem Höchstwert des y -Indexes, d. h. $y = X$.

Wird die Allgemeingültigkeit durch Einführung von Symmetriebedingungen beeinträchtigt, dann verringert sich die Zahl der unbestimmten Größen gerade um die Anzahl der Symmetriebedingungen.

Auf die genaue Untersuchung der mathematischen Form der Symmetrie-

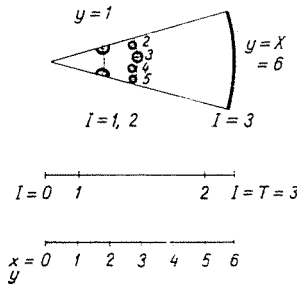


Abb. 5. Das den Bedingungen (10) und (11) genügende System und die Indexfunktion $I = I(x, y)$

bedingungen wird hier nicht eingegangen, vielmehr sollen lediglich die Reduktionsregeln erläutert werden (3).

I. Wird in das Bezugssystem durch die Elemente (r, s) eine Symmetriebedingung eingeführt, vermindert sich die Ordnungszahl der Determinanten des Zählers und Nenners von D_{JK}^y um 1.

Die Determinanten von D_{JK}^y des reduzierten Systems werden aus dem Ausdruck für D_{JK}^y des Bezugssystems gewonnen, indem man zur r -ten Spalte die Elemente der s -ten Spalte addiert, während aus den so gewonnenen Determinanten die s -te Reihe und Spalte gestrichen wird.

II. Die matematische Form bedeutet nichts anderes als die Gleichheit der Elemente der r -ten und s -ten Reihe in der erweiterten Matrix, die den Determinanten des Zählers und Nenners zugeordnet ist.

Zur einfachen Beschreibung der mathematischen Form soll folgender Formalismus eingeführt werden:

$$a_{21} = a_{31}$$

$$a_{22} = a_{32}$$

$$a_{23} = a_{33}$$

$$U_2 = U_3$$

werden in der Form

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & U_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & U_2 \end{pmatrix}$$

zusammengefaßt. Reduktionen, die diesen Symmetriebedingungen entsprechen, können in zwangloser Folge und in beliebiger Zahl in einem oder in mehreren Schritten durchgeführt werden, natürlich nur zwischen Elementen gleichen Potentials, also zwischen den Teilen ein und derselben Elektrode. Die Grenze der Reduktion ist mithin ein System, dessen erweiterte Matrix den Rang T hat, wenn T die Zahl der Elektroden bedeutet. Im folgenden soll in diesem Fall von Grenzgeometrie gesprochen werden.

Die geometrische Bedeutung der Symmetriebedingungen

Die Beiwerte a_{xy} haben geometrische Bedeutung. a_{xy} ist der natürliche Logarithmus des Quadrates des relativen Abstandes zwischen dem durch (7,8) definierten Oberflächenpunkt des x -ten Elementes und der Achse des y -ten Elementes. a_{xy} ist also diesem Abstand proportional.

Die in der mathematischen Form enthaltenen Zusammenhänge schreiben somit die Identität des Abstandes zwischen den stabförmigen Elementen und des Verhältnisses ihrer Durchmesser im Bezugssystem vor. Dadurch werden diese an geometrische Orte fixiert.

Als allgemeine Regel kann festgehalten werden:

1. Durch Einbringung unabhängiger Symmetriebedingungen erhält man ein spiegelsymmetrisches System. Die Spiegelebene wird schon durch die allererste Symmetriebedingung festgelegt.

2. Operiert man im Verlauf der Reduktion mehrmals mit einer gegebenen Ladungslinie, wird das reduzierte System zylindersymmetrisch. Das Zentrum wird durch die erste abhängige Symmetriebedingung festgelegt.

Für die geometrische Tätigkeit im Zusammenhang mit dem Einbringen der Symmetriebedingung gilt folgendes: Die erste, z. B. durch (r, s) eingebrachte Symmetriebedingung transponiert sämtliche Elemente in die Halbierungsenkrechte der Elemente (r, s) , doch ist hierbei der Durchmesser der transponierten Elemente noch beliebig groß.

Weitere unabhängige Symmetriebedingungen heben die entsprechenden Elemente aus der Achse paarweise heraus (die örtliche Einschränkung ändert sich); sie enthalten auch Bedingungen für die den Spiegelungseigenschaften entsprechenden Durchmesser.

Die erste abhängige Symmetriebedingung fixiert die bei den vorangegangenen Operationen noch nicht vorgekommenen Elemente im Zentrum ohne irgendwelche Einschränkungen bezüglich des Durchmessers.

Weitere abhängige Symmetriebedingungen heben die Elemente aus dem

Zentrum einzeln heraus und enthalten auch Vorschriften bezüglich des Durchmessers und der Periodizität am Umfang (siehe Abb. 6).

Diese Regeln sollen an einem Beispiel untersucht werden.

Beispiel: Es soll der Durchgriff D_{42}^1 einer Tetrode mit 10 Elementen berechnet und die Grenzgeometrie bestimmt werden.

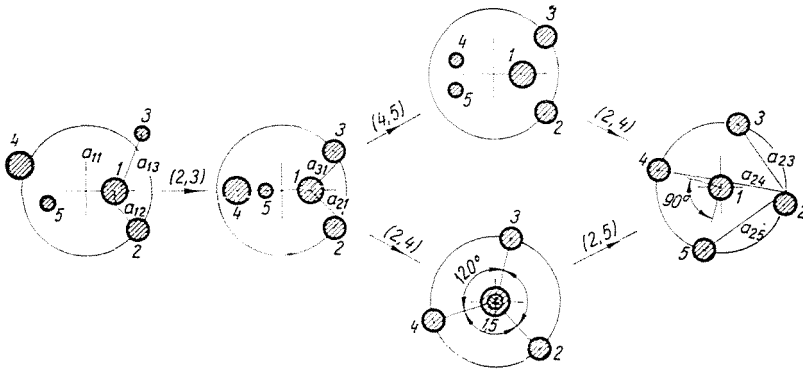


Abb. 6. Die geometrische Bedeutung der Symmetriebedingungen sowie der Reduktion. Die Abbildung zeigt die w -Ebene des Elektrodensystems. Der Maßstab der Zeichnung wurde so gewählt, daß die Abstände gleich a_{xy} sind und der Anodenzylinder weit vom Zentrum entfernt ist

Abb. 7 zeigt das Bild eines Sektor der Ausgangsebene z in dieser Tetrode. Die Indexfunktion $I = I(y)$ ist gleichfalls dort angegeben.

Der Ausdruck D_{42}^1 hat in der allgemeinen Anordnung folgende Form

$$D_{42}^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{17} & a_{18} & a_{19} & 1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{27} & a_{28} & a_{29} & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{62} & a_{63} & \dots & a_{67} & a_{68} & a_{69} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{82} & a_{83} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & a_{92} & a_{93} & \dots & a_{97} & a_{98} & a_{99} & 1 \\ 1 & a_{102} & a_{103} & \dots & a_{107} & a_{108} & a_{109} & 1 \end{pmatrix}$$

Das reduzierte System ist wieder ein grenzgeometrisches Gebilde, welches in Abb. 8b aufgetragen ist. Interessanterweise enthält auch dieses Gebilde, wie in Abb. 8c und 8d gezeigt, noch weitere Symmetriemöglichkeiten.

Danksagung

Das gezeigte Berechnungsverfahren wurde vom Verfasser in seiner Diplomarbeit im Jahre 1962 zum erstenmal beschrieben. Viele Ergebnisse dieses auf der Diplomarbeit fußenden Aufsatzes sind den Anregungen der Konsulenten zu verdanken. Der Verfasser drückt an dieser Stelle dem Herrn Dozenten M. Romhányi und Herrn Dipl. Ing. V. Ereky seinen Dank für ihre selbstlose Hilfe aus.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit benutzt zur Berechnung der Durchgriffe die bei [1] beschriebene allgemein bekannte Methode. Im Gegensatz zu den bisherigen Bestrebungen wurde darauf verzichtet, eine einfache oder kurze Endformel abzuleiten. Auch werden die durch Symmetrien vorhandenen Vereinfachungsmöglichkeiten nicht restlos ausgenützt. Auf diese Art konnte eine neue topologische Regel des Durchgriffsausdruckes erkannt werden, die sich in der inneren Struktur der mathematischen Ausdrücke zeigt. Diese inneren Gesetzmäßigkeiten ermöglichen ein direktes Aufschreiben der Durchgriffe aus den geometrischen Angaben des Elektroden-systems. In der aufgestellten allgemeinen Formel gelangt die geometrische Struktur des Elektroden-systems unmittelbar zum Ausdruck, da die Methode topologischen Charakter hat.

Der Formalismus der Ergebnisse gestattet es, die Ergebnisse leicht in einen Elektronen-rechner einzuprogrammieren.

Schrifttum

1. SPANGENBERG, K. R.: Vacuum Tubes; Mc Graw-Hill Book Company, 1948.
2. ROTHE, H.—W. KLEEN: Physikalische Grundlagen der Hochvakuumelektronenröhren. Band. I. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Frankfurt/Main, 1955.
3. BALASKÓ, A.: Allgemeines Verfahren zur Berechnung des Durchgriffes von Elektronenröhren, T. T. M. 1965 (in Vorbereitung).

Antal BALASKÓ, Budapest, IV., Váci út 77. Egyesült Izzó Vill. R. T.