EIN ELEMENTARES VERFAHREN ZUR ANNÄHERNDEN BESTIMMUNG DER REELLEN WURZELN ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN

Von

T. FARAGÓ

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. März 1963)

Vorgelegt von DR. E. MAKAI

Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, wo die Koeffizienten a_k $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$ reell sind, $n \geqq 2$, $a_n \neq 0$. Das Aufsuchen der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ kann auf die Untersuchung des Vorzeichens von $f(x)$ in einem gegebenen Intervall zurückgeführt werden. Die Untersuchung wird stets an der positiven x-Achse durchgeführt. Da es bekanntlich bei Polynomen stets einen Wert M gibt, bei dem $f(x) \cdot f(M) > 0$, falls $x \geqq M$, genügt es, die Untersuchung des Vorzeichens im Intervall $[0, M]$ durchzuführen. Die Untersuchung des Vorzeichens von $f(x)$ für negative Werte x läßt sich auf die Untersuchung des Vorzeichens der Funktion $g(x) = f(-x)$ bei positiven Werten von x zurückführen.

Untersuchung des Vorzeichens von $f(x)$ in einem gegebenen Intervall $0 \leqq a \leqq x \leqq b$. Annäherung von links

(Bei der Annäherung von links wird die Untersuchung des Vorzeichens bzw. die Bestimmung der evtl. reellen Nullstellen durch eine Folge steigender Werte von x durchgeführt.)

Es sei

$$0 \leqq a \leqq a_0 < x \leqq b.$$

Bekanntlich ist

$$f(x) = (x - a_0)\, q(x) + f(a_0),$$

wo $q(x)$ ein Polynom $n - 1$-ten Grades von x ist. Wenn

$$f(a_0) \neq 0, \text{ ist } f(x) \cdot f(a_0) > 0$$

für alle Werte von x, die die Ungleichung $q(x) \cdot f(a_0) \geqq 0$ erfüllen, d. h. die Untersuchung des Vorzeichens braucht in dem gegebenen Intervall nur für solche Werte von x durchgeführt zu werden, die die Ungleichung $q(x) \cdot f(a_0) < 0$ erfüllen.

Es seien $q_i(x)$ bzw. $q_s(x)$ im gegebenen Intervall $a_0 < x \leqq b$ die sogenannten, die Funktion $q(x)$ von unten bzw. von oben annähernden stetigen Funktionen, der Einfachheit halber deren annähernde Polynome, für die im gegebenen Intervall folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$q_i(x) \leqq q(x)\,,$$
$$q_s(x) \geqq q(x)\,.$$

Mit deren Hilfe können auch für $f(x)$ die von unten bzw. von oben annähernden Funktionen $f_i(x)$ und $f_s(x)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$f_i(x) = (x - a_0) \cdot q_i(x) + f(a_0)\,,$$
$$f_s(x) = (x - a_0) \cdot q_s(x) + f(a_0)\,.$$

Offenbar ist $f(x) > 0$, wenn $f_i(x) > 0$, bzw. $f(x) < 0$, wenn $f_s(x) < 0$ ist.

Lineare Annäherung von links

Am einfachsten ist jener Fall, bei dem zu $q(x)$ im gegebenen Intervall $a_0 < x \leqq b$ eine untere und eine obere numerische Schranke bestimmt wird. Es seien diese durch q_{i0} und q_{s0} bezeichnet.

Mit ihnen ergeben sich folgende lineare annähernde Polynome:

$$f_i(x) = (x - a_0) \cdot q_{i0} + f(a_0)\,,$$
$$f_s(x) = (x - a_0) \cdot q_{s0} + f(a_0)\,.$$

1*a*. Falls $f(a_0) > 0$, $q_{i0} \geqq 0$, so ist

$$f_i(x) > 0, \text{ also } f(x) > 0, \text{ wenn } a_0 \leqq x \leqq b.$$

1*b*. Falls $f(a_0) > 0$, $q_{i0} < 0$, so ist $f_i(x) > 0$, wenn

$$x < a_0 - \frac{f(a_0)}{q_{i0}} = a_1\,.$$

Offenbar ist $a_1 > a_0$, darum $f(x) > 0$, falls $a_0 \leqq x < \min(a_1, b)$. Wenn $a_1 \geqq b$, ist die Untersuchung im gegebenen Intervall mit der Bestimmung des Zahlenwertes von $f(b)$ beendet. Wenn $a_1 < b$, wird die Untersuchung im Intervall $a_1 \leqq x \leqq b$ weitergeführt. Wenn $f(a_1) = 0$, kann bei der weiteren

Untersuchung eine beliebige Zahl a_1' aus der rechtsseitigen Umgebung von a_1 als untere Grenze des Intervalls gewählt werden.

Ist $f(a_1) > 0$, so wird die vorige Untersuchung mit einem dem geänderten Intervall zugehörigen Wert q_{i0} wiederholt. Offenbar geht die Rolle von a_0 auf a_1 über. Ist nach n Schritten $a_n \geqq b$, dann ist im gegebenen Intervall $f(x) > 0$. Im entgegengesetzten Fall hat $f(x)$ im gegebenen Intervall eine Nullstelle, die durch die Zahlenfolge $a_1, a_2 \ldots$ mit beliebiger Genauigkeit angenähert wird. ($a_1, a_2, \ldots$ ist eine monotone, anwachsende, von oben beschränkte Zahlenfolge, sie hat somit einen Grenzwert ξ, und offenbar ist $f(\xi) = 0$, da eine entgegengesetzte Annahme zu Widersprüchen führt.)

2*a*. Ist $f(a_0) < 0$, $q_{s0} \leqq 0$, ist $f(x) < 0$, falls $a_0 \leqq x \leqq b$.

2*b*. Ist $f(a_0) < 0$, $q_{s0} > 0$, ist $f_s(x) < 0$, falls

$$x < a_0 - \frac{f(a_0)}{q_{s0}} = a_1 .$$

Offenbar ist $a_1 > a_0$, und somit $f(x) < 0$ wenn $a_0 \leqq x < \min(a_1, b)$.

Die weiteren Bemerkungen sind den Bemerkungen zu 1*b* gleich, bloß die Richtungen der Ungleichungen sind umgekehrt, bzw. statt q_{i0} ist q_{s0} zu verstehen. Im folgenden sollen deshalb eben q_{i0} bzw. q_{s0} bestimmt werden.

Ein Verfahren zur Bestimmung approximierender Polynome von $q(x)$

Die Verallgemeinerung des Hornerschen Schemas

Es sei $q(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, wo die Koeffizienten a_k reell sind,

$$a_m \neq 0, \quad m \geqq 2, \quad 0 \leqq a \leqq x \leqq b .$$

Ein annäherndes »Polynom« 0-ten Grades, d. h. eine untere und eine obere Schranke kann gewonnen werden, indem z. B. in die Glieder des Polynoms $q(x)$ mit positiven Koeffizienten die untere, in die Glieder mit negativen Koeffizienten die obere Grenze des Intervalls eingesetzt wird. Auf diese Weise erhält man eine untere Schranke von $q(x)$ im gegebenen Intervall und im gleichen Verfahren durch Vertauschung der Grenzen des Intervalls auch eine obere Schranke.

Im folgenden wird ein ebenfalls einfaches Verfahren vorgeschlagen, das aber im allgemeinen eine »bessere« untere bzw. obere Schranke liefert. Man konstruiere z. B. zu $q(x)$ ein im gegebenen Intervall von unten annäherndes Polynom $m - 1$-ten Grades.

Es sei $a_m > 0$, dann ist $a_m x^m \geqq a_m \cdot a \cdot x^{m-1}$, also $q(x) \geqq a_m \cdot a \cdot x^{m-1} + a_{m-1} x^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} a_k x^k = q_i(x)$.

Wenn $a_m < 0$, ist

$$a_m x^m \geqq a_m \cdot b \cdot x^{m-1}, \text{ und}$$

$$q(x) \geqq (a_m b + a_{m-1}) x^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} a_k x^k = q_i(x) .$$

Ähnlich kann zum annähernden Polynom $m - 1$-ten Grades in vorstehendem Sinne ein von unten annäherndes Polynom $m - 2$-ten Grades konstruiert werden. Durch Fortsetzung des Verfahrens läßt sich eine Annäherung 0-ten Grades, d. h. eine untere Schranke gewinnen. Diese Art der Konstruktion von unten annähernder Polynome kann folgendermaßen formuliert werden: Der Koeffizient des Gliedes höchsten Grades des Polynoms wird, falls positiv, mit der unteren, falls negativ, mit der oberen Grenze des gegebenen Intervalls multipliziert, und das Produkt Koeffizienten des gegebenen Polynomgliedes erstniedrigeren Grades addiert. Eine nach Addition positive Zahl wird mit der unteren, eine negative mit der oberen Grenze des Intervalls multipliziert, sodann das Produkt mit dem Koeffizienten des Gliedes zweitniedrigeren Grades zusammengezogen usw. Auf diese Weise kann ein von unten annäherndes Polynom beliebig kleineren Grades als das gegebene $q(x)$ hergestellt werden. Für von oben annähernde Polynome ist das Verfahren ähnlich, nur ist die Rolle der Grenzen zu vertauschen. Das Verfahren kann dem Hornerschen Schema ähnlich tabelliert werden, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht.

Es sei $q(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 8x - 10$, $4 \leqq x \leqq 5$. Auf die oben beschriebene Weise sollen im gegebenen Intervall von unten annähernde Polynome konstruiert werden.

$$x^4 \geqq 4x^3, \text{ so mit } q(x) \geqq 4x^3 - 6x^3 + 9x^2 + 8x - 10 = q_{i3}(x),$$

$$-2x^3 \geqq -10x^2, \text{ so mit } q_{i3}(x) \geqq -10x^2 + 9x^2 + 8x - 10 = q_{i2}(x) ,$$

$$-x^2 \geqq -5x, \text{ so mit } q_{i2}(x) \geqq -5x + 8x - 10 = q_{i1}(x) ,$$

$$3x \geqq 12, \text{ so mit } q_{i1}(x) \geqq 12 - 10 = q_{i0} .$$

Nach ähnlichem Verfahren:

$$q_{s3}(x) = -x^3 + 9x^2 + 8x - 10, \; q_{s2}(x) = 5x^2 + 8x - 10,$$

$$q_{s1}(x) = 33x - 10, \; q_{s0} = 155.$$

Dies läßt sich folgendermaßen tabellieren:

	1	−6	9	8	−10
$[4;5]_i$	0	4	−10	−5	12
	1	−2	− 1	3	2
	0	5	− 4	25	165
$[4;5]_s$	1	−1	5	33	155
	0	4	− 8	4	48
$[4;4]$	−1	−2	1	12	38

Wie ersichtlich, ergibt sich als Annäherung 0-ten Grades, falls die beiden Grenzen zusammenfallen, eben der Substitutionswert. Somit kann das vorstehende Verfahren als eine Verallgemeinerung des Hornerschen Schemas betrachtet werden.

Ein Beispiel für die lineare Annäherung von links

Es sei $f(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 60x^2 - x + 10$.

Man untersuche das Vorzeichen von $f(x)$ entlang der positiven x-Achse. Bekanntlich können die Koeffizienten des oben stehenden Polynoms $q(x)$ aus dem Hornerschen Schema abgelesen werden, z. B.:

	1	−6	− 7	60	−1	10	
	0	7	7	0	420	2933	
$[7;7]$	1	1	0	60	419	2943	= f(7)
	0	5	− 5	−60	0	−5	
$[5;5]$	1	−1	−12	0	−1	5	= f(5)
	0	5	20	40	200		
$q[5;5]$	1	4	8	40	199 = $q(5)$		

Somit ist $f(x) = (x - 7) \cdot (x^4 + x^3 + 60x + 419) + 2943$, da $q(x) > 0$, falls $x \geqq 0$, und somit $f(x) > 0$, falls $x \geqq 7$.

Ähnlich:

$$f(x) = (x - 5) \cdot (x^4 - x^3 - 12x^2 - 1) + 5, \text{ hier ist}$$

$$q(x) = (x - 5) \cdot (x^3 + 4x^2 + 8x + 40) + 199, \text{ deshalb}$$

$$f(x) = (x - 5)^2 \cdot (x^3 + 4x^2 + 8x + 40) + 199(x - 5) + 5, \text{ d. h.}$$

$$f(x) > 0, \text{ falls } x \geqq 5.$$

Die Untersuchung des Vorzeichens muß also im Intervall $[0; 5]$ durchgeführt werden. Wir teilen dieses in Intervalle der Länge 1, und führen die eingehende Untersuchung des Vorzeichens in diesen Teilintervallen durch. Sie läßt sich in folgende Tabelle zusammenfassen:

	1	−6	−7	60	−1	10		
	0	0	0	0	0	0		
[0; 0]	1	−6	−7	60	−1	10	= f(0)	
	0	0	−6	−13	0			$a_1 = 0 - \frac{10}{-1} > 1$
$q[0;1]_i$	1	−6	−13	47	−1 = q_{i0}			
	0	1	−5	−12	48	47		
[1; 1]	1	−5	−12	48	47	57		
	0	1	−8	−40	8			
$q[1;2]_i$	1	−4	−20	8	55			
	0	2	−8	−30	60	118		
[2; 2]	1	−4	−15	30	59	128		
	0	2	−6	−63	−99			$a_1 = 2 + \frac{128}{40} > 3$
$q[2;3]_i$	1	−2	−21	−33	−40			
	0	3	−9	−48	36	105		
[3; 3]	1	−3	−16	12	35	115		
	0	3	0	−64	−208			$a_1 = 3 + \frac{115}{173} > 3{,}66$
$q[3;4]_i$	1	0	−16	−52	−173			
	0	3,7	−8,51	−57,387	9,6681	32,07197		
[3,7; 3,7]	1	−2,3	−15,51	2,613	8,6681	42.07197		
	0	3,7	5,18	−37,32	−138.828			$a_1 = 3{,}7 + \frac{42}{130{,}16} > 4$
$q[3{,}7;4]_i$	1	1,4	−9,33	−34,707	−130.1599			
	0	3	0	−59,2	−174,64			$a_1 = 3 + \frac{115}{139{,}64} > 3{,}7$
$q[3;3{,}7]_i$	1	0	−16	−47,2	−139.64			
	0	4	−8	−60	0	−4		
[4; 4]	1	−2	−15	0	−1	6		
	0	4	8	−35	−175			$a_1 = 4 + \frac{6}{176} > 4{,}03$
$q[4;5]_i$	1	2	−7	−35	−176			
	0	4,1	−7,79	−60,639	−2,6199	−14,84159		
[4,1; 4,1]	1	−1,9	−14,79	−0,639	−3,6199	−4.84159		
	0	5	15,5	3,55	14,555			$a_1 = 4{,}1 + \frac{4{,}84}{10{,}935} > 4{,}5$
$q[4{,}1;5]_s$	1	3,1	0,71	2,911	10.9351			
	0	4,5	−6,75	−61,875	−8,4375	−42,46875		
[4,5; 4,5]	1	−1,5	−13,75	−1,875	−9,4375	−32.46875		
	0	5	17,5	18,75	84,375			$a_1 = 4{,}5 + \frac{32{,}468}{47{,}938} > 4{,}93$
$q[4{,}5;5]_s$	1	3,5	3,75	16,875	74.9375			
	0	4	8	−28,7	−117,67			$a_1 = 4 + \frac{6}{118{,}67} > 4{,}0505$
$q[4;4{,}1]_i$	1	2	−7	−28,7	−118.67			

Wird keine lineare Annäherung, sondern z. B. für $q(x)$ im Intervall [4;4,1] eine Annäherung ersten Grades verwendet, ist

$q_{i1}(x) = -28{,}7x - 1$, und somit

$f_i(x) = (x - 4)(-28{,}7x - 1) + 6 > 0$, falls $x < 4{,}0511$.

Annäherung von rechts

Es sei $0 \leqq a \leqq x < b_0 \leqq b$.

$$f(x) = (x - b_0) \cdot q(x) + f(b_0)\,.$$

Wenn $f(b_0) \neq 0$, ist $f(x) f(b_0) > 0$ für alle Werte von x, die die Ungleichung $f(b_0)\, q(x) \leqq 0$ erfüllen. Auch hier können die annähernden Funktionen konstruiert werden:

$$f_i(x) = (x - b_0)\, q_s(x) + f(b_0)\,,$$

$$f_s(x) = (x - b_0)\, q_i(x) + f(b_0)\,.$$

Wenn $f(b_0) > 0$, ist $f(x) > 0$ für alle x-Werte, die die Ungleichung $f(b_0)\, q_s(x) \leqq 0$, und wenn $f(b_0) < 0$, ist $f(x) < 0$ für alle x-Werte, die $f(b_0)\, q_i(x) \leqq 0$ erfüllen. Somit muß das Vorzeichen von $f(x)$ für die x-Werte untersucht werden, die die Ungleichungen $f(b_0)\, q_s(x) > 0$ bzw. $f(b_0)\, q_i(x) > 0$ erfüllen.

Lineare Annäherung von rechts

Durch Anwendung der Annäherungen 0-ten Grades von $q(x)$:

$$f_i(x) = (x - b_0)\, q_{s0} + f(b_0),$$

$$f_s(x) = (x - b_0)\, q_{i0} + f(b_0)\,.$$

1. Es sei $f(b_0) > 0$, $q_{s0} > 0$.

$$f_i(x) > 0, \text{ falls } x > b_0 - \frac{f(b)}{q_{s0}} = b_1\,.$$

Offenbar ist $b_1 < b_0$, somit

$$f(x) > 0, \quad \text{wenn} \quad \max\,[a, b_1] < x \leqq b_0\,.$$

Wenn $b_1 \leqq a$, ist die Untersuchung im gegebenen Intervall beendet. Ist $b_1 > a$, muß die Untersuchung im Intervall $a \leqq x \leqq b_1$ weitergeführt werden. Falls $f(b_1) = 0$, so kann ein aus einer beliebigen linksseitigen Umgebung von b_1 genommenes b_1' als obere Grenze des zu untersuchenden Intervalls gewählt werden, und die Untersuchung wird im so erhaltenen Intervall durchgeführt. Ist nach n Schritten $b_n \leqq a$, so ist $f(x) f(b_0) > 0$ im Intervall $[a, b_0]$. Ist $b_n > a$ für jedes n, hat $f(x)$ im Intervall eine Nullstelle, die durch die Zahlenfolge $b_1, b_2, \ldots$ mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden kann. [$b_1, b_2, \ldots$ ist eine monoton abnehmende, von unten beschränkte Zahlenfolge, sie hat also einen Grenzwert ξ und offenbar ist $f(\xi) = 0$, da eine entgegengesetzte Annahme zu Widersprüchen führt.]

2. Es sei $f(b_0) < 0$, $q_{i0} < 0$.

$$f_s(x) < 0\,, \text{ falls } x > b_0 - \frac{f(b_0)}{q_{i0}} = b_1\,.$$

Offenbar ist $b_1 < b_0$, und somit

$$f(x) < 0, \text{ falls } \max[a, b_1] < x \leqq b_0 .$$

Die Bemerkungen zu 1 gelten sinngemäß auch hier.

Ein Beispiel für die lineare Annäherung von rechts

Es sei $f(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 60x^2 - x + 10$.

	1	−6	−7	60	−1	10	
	0	5	−5	−60	0	−5	
[5; 5]	1	−1	−12	0	−1	5	
	0	5	20	40	200		
$q[4; 5]_s$	1	4	8	40	199		$b_1 = 5 - \frac{5}{199} < 4{,}9748$
	0	4,1	−7,79	−60,639	−2,6199	−14,84159	
[4,1; 4,1]	1	−1,9	−14,79	−0,639	−3,6199	−4.84159	
	0	4	8,4	−26,199	−110,0399		
$q[4; 4{,}1]_i$	1	2,1	−6,39	−26,838	−113.6598		$b_1 = 4{,}1 - \frac{4{,}84159}{113{,}66} < 4{,}0574$

Natürlich lassen sich die beiderseitigen Annäherungen auch abwechselnd anwenden, die Annäherung kann sich mithin durch Verengerung des Intervalls von beiden Seiten günstiger gestalten.

Simultane Annäherung von zwei Seiten

Im folgenden wird das gegebene Polynom im gegebenen Intervall durch Polynome zweiten Grades angenähert, deren Kurven durch die beiden Endpunkte der Kurve des gegebenen Polynoms gehen. In besonderen Fällen können mit Hilfe eines annähernden Polynoms beide Grenzen des gegebenen Intervalls gleichzeitig geändert werden, in anderen Fällen darf auch weiterhin von links- bzw. rechtsseitigen Annäherungen gesprochen werden.

Es sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, wo die Koeffizienten a_k $(k = 0, 1, \ldots n)$ reell sind, $n \geqq 2$, $a_n \neq 0$, $0 \leqq a \leqq x \leqq b$.

Bekanntlich ist $f(x) = (x - a)\, q_a(x) + f(a)$, wenn $q_a(x)$ ein Polynom $n-1$-ten Grades von x bezeichnet. Ebenso ist

$$q_a(x) = (x - b) \cdot q_{ab}(x) + q_a(b), \text{ somit}$$

$$f(x) = (x - a) \cdot (x - b) q_{ab}(x) + (x - a)\, q_a(b) + f(a) \text{ bzw.}$$

$$f(x) = (x - b) \cdot (x - a)\, q_{ba}(x) + (x - b) q_b(a) + f(b).$$

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß

$$q_a(b) = q_b(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ und ähnlich}$$

$$q_{ab}(x) = q_{ba}(x).$$

Die von unten bzw. von oben annähernden Funktionen können im gegebenen Intervall folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$f_i(x) = (x - a) \cdot (x - b) q_{abs}(x) + (x - a) q_a(b) + f(a)$$

$$f_s(x) = (x - a) \cdot (x - b) q_{abi}(x) + (x - a) q_a(b) + f(a).$$

Bei Anwendung der Annäherungen von $q_{ab}(x)$ 0-ten Grades: q_{abs0} bzw. q_{abi0} erhält man folgende annähernde Polynome zweiten Grades

$$f_i(x) = (x - a) \cdot (x - b) q_{abs0} + (x - a) q_a(b) + f(a)$$

$$f_s(x) = (x - a) \cdot (x - b) q_{abi0} + (x - a) q_a(b) + f(a).$$

Im weiteren werden diese beiden Polynome zur Untersuchung des Vorzeichens von $f(x)$ verwendet.

Angenommen, es ist $f(a) \cdot f(b) \neq 0$.

1. Es sei $f(a) > 0$, $f(b) > 0$.

   $\alpha)$ bei $q_{abs0} \leqq 0$, ist $f(x) > 0$, wenn $a \leqq x \leqq b$.

   $\beta)$ bei $q_{abs0} > 0$, die Gleichung $f_i(x) = 0$ hat nicht zwei verschiedene reelle Wurzeln, es ist also
   $f(x) > 0$, falls $a \leqq x \leqq b$.

   $\gamma)$ $q_{abs0} > 0$, Gleichung $f_i(x) = 0$ hat zwei verschiedene reelle Wurzeln: x_1, x_2, $x_1 > x_2$, es ist also $f(x) > 0$, falls $a \leqq x < x_2 = a_1$, und $b_1 = x_1 < x \leqq b$.

2. Es sei $f(a) < 0$, $f(b) < 0$.

   $\alpha)$ ist $q_{abi0} \geqq 0$, dann ist $f(x) < 0$, falls $a \leqq x \leqq b$.

   $\beta)$ bei $q_{abi0} < 0$ hat Gleichung $f_s(x) = 0$ nicht zwei verschiedene reelle Wurzeln, es ist mithin
   $f(x) < 0$, falls $a \leqq x \leqq b$.

   $\gamma)$ bei $q_{abi0} < 0$, hat Gleichung $f_s(x) = 0$ zwei verschiedene reelle Wurzeln: x_1, x_2, $x_1 > x_2$, es ist mithin
   $f(x) < 0$, falls $a \leqq x < x_2 = a_1$, und $b_1 = x_1 < x \leqq b$.
   Wird die Bedingung $\gamma)$ erfüllt, muß die Untersuchung sowohl

im 1. als auch 2. Fall im Intervall $[a_1, b_1]$ fortgesetzt werden. Sind nach Schritten endlicher Zahl die Bedingungen *a)* und *β)* erfüllt, ist die Untersuchung beendet, im entgegengesetzten Fall werden die im Intervall $[a, b]$ dem a bzw. dem b nächstliegenden Nullstellen durch die Zahlenfolgen $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2 \ldots$ mit beliebiger Genauigkeit angenähert.

3. Es sei $f(a) \cdot f(b) < 0$.

In diesem Fall können die den Grenzen des gegebenen Intervalls am nächsten liegenden Nullstellen durch die mit Hilfe q_{abi} und q_{abs} hergestellten annähernden Funktionen $f_s(x)$ und $f_i(x)$ ähnlich wie bei den vorstehend bereits besprochenen links- bzw. rechtsseitigen Annäherungen approximiert werden.

Beispiel:

$$f(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 60x^2 - x + 10.$$

	1	−6	− 7	60	−1	10
	0	4	− 8	−60	0	− 4
[4; 4]	1	−2	−15	0	−1	6
	0	5	15	0	0	
$q_4[5; 5]$	1	3	0	0	−1	
	0	5	40	200		
$q_{4;5s}$	1	8	40	200		

Nach vorstehendem ist

$$f(x) = (x-4) \cdot (x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 1) + 6 = (x-4) \cdot (x-5)(x^3 + 3x^2) + (x-4) \cdot -1 + 6 \quad \text{und} \quad \text{somit}$$

$${}_i(x) = 200(x-4) \cdot (x-5) - (x-4) + 6 = 200x^2 - 1801x + 4010,$$

woraus $a_1 > 4{,}031$, $b_1 < 4{,}975$.

Im folgenden wird die Annäherung im Intervall [4; 4,1] von links bzw. von rechts durchgeführt:

	1	−6	− 7	60	− 1	10
	0	4	− 8	−60	0	− 4
[4; 4]	1	−2	−15	0	− 1	6
	0	4,1	8,61	−26,199	−107,4159	
$q_4[4,1; 4,1]$	1	2,1	− 6,39	−26,199	−108,4159	
	0	4,1	25,42	78,023		
$q_{4;4,1s}$	1	6,2	19,03	$51{,}824 = q_{s0}$		
	0	4	24,4	72,04		
$q_{4;4,1i}$	1	6,1	18,01	$45{,}841 = q_{i0}$		

Demnach ist

$$f_i(x) = 51{,}824(x - 4) \cdot (x - 4{,}1) - 108{,}4159(x - 4) + 6,$$

$$f_s(x) = 45{,}841(x - 4) \cdot (x - 4{,}1) - 108{,}4159(x - 4) + 6\,.$$

Vorausgesetzt, daß die Funktion im gegebenen Intervall $[4; 4{,}1]$ nur eine Nullstelle ξ hat, kann man für ξ mit Hilfe der Nullstellen der beiden vorstehenden annähernden Funktionen die Schranken

$$4{,}0541 < \xi < 4{,}054504$$

erhalten.

Bemerkung zur Herstellung annähernder Polynome

Im obigen wurde ein Verfahren zur Herstellung annähernder Polynome durch Verminderung der Exponenten beschrieben, das sich ähnlich dem Hornerschen Schema tabellieren läßt. Ähnlich können annähernde Polynome auch durch Erhöhung der Exponenten hergestellt werden. Das gegebene Polynom kann im gegebenen Intervall z. B. durch ein Binom oder Trinom gleichen Grades angenähert werden. Für verallgemeinerte Polynome mit nicht unbedingt ganzzahligen Exponenten läßt sich sogar der folgende Satz einfach beweisen: Zu einem gegebenen verallgemeinerten Polynom kann in einem gegebenen positiven Intervall ein von unten bzw. von oben annäherndes Polynom mit vorgeschriebenen Exponenten der Veränderlichen konstruiert werden. Das annähernde Polynom kann auch die Eigenschaft haben, das gegebene Polynom beliebig anzunähern, sofern das gegebene Intervall genügend klein ist.

Das hier beschriebene Verfahren liefert im gegebenen Intervall einfach erhältliche untere bzw. obere Schranken. Es stellt sich die Frage, wie zu einem gegebenen Polynom in einem gegebenen Intervall verhältnismäßig »gute« untere bzw. obere Schranken ermittelt werden könnten. Im folgenden wird ein Verfahren vorgeschlagen, das an das über die beiderseitige simultane Annäherung Gesagte anknüpft.

Der Grad des Polynoms $f(x)$ betrage $n \geqq 4$.

Es sei $0 \leqq a \leqq x \leqq b$. Wie gezeigt, ist

$$f(x) = (x - a) \cdot (x - b)\, q_1(x) + c_1(x - a) + f(a)\,.$$

Ist das Polynom $q_1(x)$ im gegebenen Intervall nicht monoton (es kann auch monoton sein, doch ist dann der betreffende Beweis nicht einfach), so empfiehlt sich folgende Darstellung für $q_1(x)$:

$$q_1(x) = (x-a)\cdot(x-b)\,q_2(x) + c_2(x-a) + q_1(a), \text{ usw.}$$
$$\vdots$$
$$q_{k-2}(x) = (x-a)\cdot(x-b)\,q_{k-1}(x) + c_{k-1}(x-a) + q_{k-2}(a),$$
$$q_{k-1}(x) = (x-a)\cdot(x-b)q_k(x) + c_k(x-a) + q_{k-1}(a)\,,$$

wobei c_1, $c_2, \ldots c_k =$ konst.

Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man ein im gegebenen Intervall offenbar monotones $q_k(x)$ bzw. ein Polynom $q_k(x)$ ersten oder zweiten Grades erhält. Sodann bestimmt man für $q_k(x)$ im gegebenen Intervall das absolute Maximum und Minimum, und mit deren Hilfe die annähernden Polynome zweiten Grades $q_{k-1,i}$ und $q_{k-1,s}$, ferner das absolute Minimum von $q_{k-1,i}$ und das absolute Maximum von $q_{k-1,s}$ im gegebenen Intervall. Mit ihrer Hilfe werden die Funktionen $q_{k-2,s}$ und $q_{k-2,i}$ usw. konstruiert und schließlich das absolute Minimum von $f_i(x)$ und das absolute Maximum von $f_s(x)$ ermittelt; diese Werte für $f(x)$ im gegebenen Intervall liefern eine untere bzw. obere Schranke.

Der »guten« unteren bzw. oberen Schranke kann Bedeutung z. B. in Fällen zukommen, in denen man die rechts- bzw. linksseitige Annäherung weitgehender als oben, d. h. z. B. folgendermaßen mechanisieren will.

Nach dem Mittelwertsatz von Lagrange ist

$$f(x) = (x-x_0)\cdot f'(\xi) + f(x_0), \text{ worin}$$
$$\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0),\; 0 < \delta < 1.$$

Bekanntlich können für den absoluten Betrag der Nullstellen von $f(x)$ die untere und obere Schranke m bzw. M bestimmt werden. Es genügt mithin, eine verhältnismäßig »gute« untere bzw. obere Schranke (z. B. 0-ten Grades) für das Polynom $f'(x)$ im Intervall $[m; M]$ zu bestimmen, denn mit ihrer Hilfe lassen sich die positiven reellen Nullstellen von $f(x)$ durch Annäherung von links wie von rechts systematisch bestimmen, ohne die annähernden Funktionen $q_i(x)$ bzw. $q_s(x)$ in den veränderten Intervallen neuerlich bestimmen zu müssen.

Zusammenfassung

Nach dem Verfahren wird zum gegebenen Polynom im gegebenen Intervall durch eine dem Hornerschen Schema ähnliche Tabellierung ein Polynom 1., 2. Grades konstruiert, dessen Kurve an einer Grenze des Intervalls durch den entsprechenden Punkt der gegebenen Kurve geht und im gegebenen Intervall unterhalb bzw. oberhalb der gegebenen Kurve verläuft. Aus dem Vorzeichen dieses annähernden Polynoms kann auf das Vorzeichen des gegebenen Polynoms im Teilintervall des gegebenen Intervalls geschlossen werden. Nötigenfalls wird das Verfahren im veränderten Intervall wiederholt.

T. Faragó, Budapest. XI., Sztoczek u. 2—4. Ungarn.