

MÉTHODE POUR LE CALCUL DE LA POINTE DE COURANT DE DÉMARRAGE DES MOTEURS A COURANT CONTINU, A EXCITATION DÉRIVÉE

Par

T. KELEMEN

Chaire des Machines Électriques de l'Université Technique de Budapest

(Reçu le 19 juin 1963)

Dans un article précédent [1], nous avons fait connaître en détail le calcul de la pointe de courant et de la durée du démarrage *en un temps* d'un moteur à courant continu à excitation dérivée, sans couple résistant (effectuant donc seulement une accélération de masse), à partir d'un réseau à tension constante.

Nous y avons calculé la pointe de courant par la méthode «classique» connue dans la littérature (cf. par ex. [2]) à l'aide de *fonctions exponentielles*, en possession des données nécessaires (par exemple de la résistance en série). Nous avons vu cependant que si le problème consiste à déterminer la résistance en série pour obtenir la *pointe de courant prescrite*, ce problème ne peut être résolu selon la méthode classique qu'au moyen d'approximations successives, par une *évaluation répétée*. Le résultat obtenu — après des calculs répétés un certain nombre de fois — n'est généralement pas la solution exacte, mais seulement une solution *approximative*.

Dans ce qui suit, nous présentons une méthode qui permet de calculer — en partant de la méthode classique — la valeur maximum du courant d'une *manière simple*, en donnant *directement* la solution exacte recherchée.

1. Pure accélération de masse

1.1. Relations fondamentales

Si le moteur à courant continu et à flux constant de la figure 1 est mis sous la tension de réseau constante U , et si le moteur ne doit accomplir qu'une accélération de masse (le couple résistant étant donc $M_r = 0$), le système d'équations différentielles décrivant le processus du démarrage sera:

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + K\omega, \quad (1)$$

et

$$M_a = \Theta \frac{d\omega}{dt}. \quad (2)$$

R et L représentent la résistance et l'inductance *totale* (interne + en série) du circuit d'induit (moteur + réseau). M_a est le couple d'induit du moteur, Θ l'inertie de toutes les masses à accélérer, réduite sur l'arbre du moteur, ω la vitesse angulaire, $K = \frac{E}{\omega}$ est une constante, parce que le flux est constant (E est la force électromotrice induite).

Le caractère du processus de démarrage, c'est-à-dire la question de savoir s'il est périodique ou apériodique, ainsi que la valeur maximum du courant

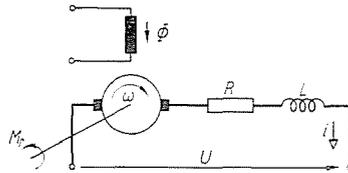


Fig. 1. Schéma de couplage

dépendent de la valeur et du rapport réciproque des constantes du système d'équations différentielles ci-dessus.

Nous obtiendrons une solution de valeur générale, en choisissant comme variable indépendante une grandeur qui contient toutes les constantes du système d'équations, et exprime un rapport déterminé entre ces constantes. Une telle grandeur est, par exemple, le coefficient d'amortissement, notion bien connue dans la technique de la régulation, dont l'expression est, dans notre cas (cf. par ex. [3, pp. 101—102])

$$z = \frac{R}{2K} \sqrt{\frac{\Theta}{L}} \quad (3)$$

La résolution du système d'équations (1)–(2) est connue dans la littérature (v. par ex. [1], [2]). Afin de faciliter la compréhension de ce qui va suivre, récapitulons l'expression du courant i , ainsi que celle du temps t_m de l'apparition de la pointe de courant i_m . Si nous désignons par Ω_0 la fréquence circulaire de l'oscillation non amortie du moteur:

$$\Omega_0 = \frac{K}{\sqrt{L\Theta}} \quad (4)$$

et si nous introduisons les notations suivantes

$$\varrho = \frac{R}{2L}, \quad (5)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \varrho^2}, \quad \text{si } \varrho < \Omega_0 \text{ (cas périodique),} \quad (6)$$

$$A = \sqrt{\varrho^2 - \Omega_0^2}, \quad \text{si } \varrho > \Omega_0 \text{ (cas apériodique),} \quad (7)$$

les expressions de i et t_m seront

a) *En cas périodique* ($\varrho < \Omega_0$)

$$i = \frac{U}{L} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \exp(-\varrho t), \quad (8)$$

$$t_m = \frac{1}{\Omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Omega}{\varrho}. \quad (9)$$

b) *En cas apériodique* ($\varrho > \Omega_0$)

$$i = \frac{U}{L} \frac{\operatorname{sh} At}{A} \exp(-\varrho t), \quad (10)$$

$$t_m = \frac{1}{A} \operatorname{ar\,th} \frac{A}{\varrho}. \quad (11)$$

c) *En cas-limite apériodique* ($\varrho = \Omega_0$)

$$i = \frac{U}{L} t \exp(-\Omega_0 t), \quad (12)$$

$$t_m = \frac{1}{\Omega_0}. \quad (13)$$

En substituant les expressions de t_m dans les relations correspondantes du courant i , nous aurons les formules de la pointe de courant i_m . Exprimons-les par le coefficient d'amortissement, en confrontant (3), (4) et (5)

$$\varrho = z\Omega_0, \quad (14)$$

ce qui donne

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 - z^2}, \quad (15)$$

et

$$A = \Omega_0 \sqrt{z^2 - 1}. \quad (16)$$

A la base de ces équations, la pointe de courant est

a) *En cas périodique* ($z < 1$)

$$i_m = \frac{U}{L\Omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \sin \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} \right) \exp \left(- \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} \right). \quad (17)$$

b) *En cas apériodique* ($z > 1$)

$$i_m = \frac{U}{L\Omega_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \operatorname{sh} \left(\operatorname{ar th} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} \right) \exp \left(- \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \operatorname{ar th} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} \right). \quad (18)$$

Ces deux relations compliquées peuvent être réduites à une forme plus simple si nous introduisons à la place de z une nouvelle variable indépendante:

a) *en cas périodique*

$$z = \cos a, \quad (19)$$

b) *en cas apériodique*

$$z = \operatorname{ch} b. \quad (20)$$

Par substitution des nouvelles variables, l'expression de la pointe de courant sera finalement

a) *en cas périodique* ($z < 1$)

$$i_m = \frac{U}{L\Omega_0} \exp \left(- \frac{a}{\operatorname{tg} a} \right); \quad (21)$$

b) *en cas apériodique* ($z > 1$)

$$i_m = \frac{U}{L\Omega_0} \exp \left(- \frac{b}{\operatorname{th} b} \right); \quad (22)$$

c) *en cas-limite apériodique* ($z = 1$)

$$i_m = \frac{U}{L\Omega_0} \exp(-1). \quad (23)$$

Bien que la détermination de la pointe de courant, sur la base des formules précédentes, ne pose pas de difficultés sérieuses, nous pouvons dire que ces formules ne semblent pas convenir aux calculs techniques *pratiques*, et ne donnent pas encore la solution *directe* mentionnée dans l'introduction.

Afin de réaliser notre but, nous aurons donc recours à la méthode suivante: nous chercherons des valeurs z *distinguées*, permettant de déterminer facilement la valeur de i_m , et pour d'autres valeurs de z nous chercherons de valeurs proportionnelles rapportées aux précédentes, à la base desquelles nous pourrions cette fois nous orienter facilement en ce qui concerne l'intensité de pointe.

Il est facile de calculer la valeur maximum du courant si $z = 0$, c'est-à-dire en cas d'oscillation non amortie. Dans ce cas, l'expression du courant est

$$i_{(z=0)} = \frac{U}{L\Omega_0} \sin \Omega_0 t, \quad (24)$$

d'où la valeur maximum du courant

$$i_{m0} = \frac{U}{L\Omega_0}. \quad (25)$$

(L'index zéro renvoie à la valeur $z = 0$).

1.2. L'expression de la pointe de courant relative

En connaissance de la pointe de courant i_{m0} que nous venons de calculer, nous pouvons à présent déterminer la pointe de courant relative

$$\beta = \frac{i_m}{i_{m0}} \quad (26)$$

au cas d'un coefficient quelconque d'amortissement. Sa valeur est

a) *en cas périodique*, à la base de (25) et de (21)

$$\beta = \exp \left(-\frac{a}{\operatorname{tg} a} \right); \quad (27)$$

b) *en cas apériodique*, à la base de (25) et de (22)

$$\beta = \exp \left(-\frac{b}{\operatorname{th} b} \right); \quad (28)$$

c) *en cas-limite apériodique*, à la base de (25) et de (23)

$$\beta = \exp (-1) \cong 0,368.$$

(Tandis que le calcul de β à partir de (27) ne cause pas de difficulté en cas périodique, en cas apériodique il est plus opportun d'employer, pour l'évaluation numérique au lieu de l'expression (28), l'équation suivante facile à déduire à partir de (18):

$$\beta = \exp \left[-\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) \right]. \quad (29)$$

La courbe $\beta = f(z)$ calculée à la base des équations précédentes est présentée par la figure 2 à une échelle deux fois logarithmique. Sur cette figure, nous pouvons chercher la valeur β correspondant à une valeur quelconque

de z , et de la sorte, en connaissance de i_{m0} , nous obtenons directement la valeur maximum de courant correspondant à la valeur donnée de z :

$$i_m = i_{m0} \beta. \quad (26a)$$

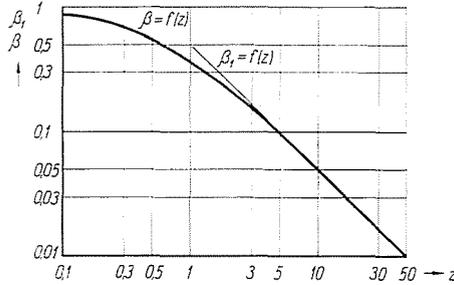


Fig. 2. Valeur de la pointe de courant relative β , en fonction du coefficient d'amortissement z

1.3. Introduction de la résistance transitoire

Transformons l'expression (25) de i_{m0} en substituant la valeur de Ω_0 de (4). De cette manière

$$i_{m0} = \frac{U}{K} \sqrt{\frac{\Theta}{L}}. \quad (30)$$

Nommons la quantité $K \sqrt{\frac{L}{\Theta}}$ exprimée en ohms: *résistance transitoire*, et notons-la par r

$$r = K \sqrt{\frac{L}{\Theta}}. \quad (31)$$

Par l'introduction de la résistance transitoire, l'équation (30) prend une forme analogue à la loi d'Ohm

$$i_{m0} = \frac{U}{r}. \quad (32)$$

L'équation (32) exprime donc que, lors d'une pure accélération de masse, en cas de *non-amortissement* ($z = 0$) nous obtenons la *pointe de courant* en divisant la tension aux bornes par la résistance transitoire.

A l'aide de la résistance transitoire, nous pouvons encore exprimer simplement le coefficient d'amortissement à la base de (3) et de (31)

$$z = \frac{R}{2K} \sqrt{\frac{\Theta}{L}} = \frac{R}{2r}. \quad (33)$$

1.4. Calcul approximatif de la pointe de courant

Bien que la pointe de courant soit facile à déterminer à l'aide de la figure 2, une question se pose: ne pourrait-on pas, pour calculer la valeur de la pointe de courant relative, trouver une relation approximative simple, d'une exactitude satisfaisante pour la pratique, qui rendrait superflue même l'utilisation du diagramme de la figure 2?

En analysant les processus physiques se déroulant lors du branchement du moteur, il semble plausible que, si nous faisons démarrer le moteur en intercalant une résistance en série suffisamment grande, nous considérons comme approximativement égale à la pointe de courant le courant stationnaire

de court-circuit $i_c = \frac{U}{R}$ au lieu de la pointe de courant réelle.

Lors du démarrage du moteur, la pointe de courant est toujours plus petite que le courant stationnaire de court-circuit, car l'inductance du circuit retarde la formation du courant, pendant ce retard le moteur se met à tourner et une force électromotrice se produit dans l'induit. Avec l'accroissement de la résistance R du circuit, l'effet de l'inductance est de plus en plus négligeable, et les phénomènes de branchement approchent de plus en plus les phénomènes de la mise sous tension d'un circuit formé uniquement de résistance. Avec l'augmentation de la résistance R , le moment t_m de l'apparition de la pointe de courant approche de plus en plus le moment du branchement, et le fait que le moteur se met à tourner influence donc de moins en moins la valeur maximum du courant. Bien que nous n'obtenions une concordance mathématiquement exacte du branchement du moteur et du branchement de la résistance que dans le cas $R = \infty$ (ce qui physiquement n'a d'ailleurs pas de sens, puisque le circuit est interrompu et que nous ne pouvons donc pas parler de pointe de courant), de toute manière nous pouvons formuler qu'en cas d'amortissement important (de résistance importante) il est possible d'effectuer un calcul approximatif en remplaçant la pointe de courant par le courant stationnaire de court-circuit. Reste à savoir quelle est numériquement la valeur de ce coefficient d'amortissement «important» qui, s'il est dépassé, provoque une erreur pratiquement admissible par le calcul approximatif avec le courant i_c .

Nous pouvons facilement répondre à cette question à l'aide de la fonction $\beta = f(z)$. Comme nous l'avons indiqué $i_c = i_m$ lorsque $R = \infty$, c'est-à-dire $z = \infty$. A la base de l'équation (29)

$$\exp \left[- \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right] \cong \frac{1}{2z} = \beta_1, \quad (34)$$

si $z \rightarrow \infty$.

La valeur notée β_1 correspond — en valeur relative — au courant stationnaire de court-circuit i_c .

Nous obtenons le rapport de la différence entre la valeur de courant i_c et la pointe de courant i_m avec i_m , c'est-à-dire l'erreur relative faite avec le calcul approximatif, en calculant le nombre proportionnel

$$\delta = \frac{\beta_1 - \beta}{\beta}. \quad (35)$$

Si nous considérons comme une erreur pratiquement admissible les 5%, il résulte de (35) que les calculs avec le courant $i_c = \frac{U}{R}$ peuvent être utilisés déjà pour les valeurs $z > 4$.

Nous avons tracé (avec un trait fin) la fonction $\beta_1 = f(z)$ dans la figure 2.

A l'aide de la figure 2 ainsi complétée, nous pouvons obtenir un résultat intéressant, à savoir nous pouvons déterminer directement la vitesse angulaire atteinte par le moteur au moment de l'apparition de la pointe de courant. A notre avis, ce résultat peut être, du fait de son caractère numérique, un complément appréciable du tableau physique que nous avons esquissé plus haut.

Nous avons déterminé la vitesse angulaire au moment t_m de la pointe de courant en partant de l'idée qu'au moment t_m $\frac{di}{dt} = 0$, et dès lors la relation fondamentale (1) se présente sous la forme suivante:

$$U = E_m + i_m R, \quad (36)$$

où nous avons noté par E_m la force électromotrice au moment t_m , qui est proportionnelle à la vitesse angulaire cherchée. Après l'avoir transformée nous obtenons l'équation (36) sous la forme

$$\frac{E_m}{R} = \frac{U}{R} - i_m. \quad (37)$$

Si nous prenons en considération que — en passant des valeurs relatives aux valeurs concrètes — la figure 2 donne les courants i_m et $i_c = \frac{U}{R}$ en fonction de z (fig. 3), il en ressort que nous pourrions trouver directement à la base de l'équation (36), la quantité $\frac{E_m}{R}$ proportionnelle à la vitesse angulaire cherchée et qui est la section entre i_c et i_m . De plus, nous obtiendrons d'après la figure 2 une solution de valeur générale, et ceci de nouveau en valeurs relatives.

Substituons la valeur $i_m = \beta \frac{U}{r}$ en (37), et divisons l'équation par $\frac{U}{R}$:

$$\frac{E_m}{U} = 1 - \beta \frac{R}{r} \tag{37a}$$

Si nous notons par ω_m la vitesse angulaire cherchée existant au moment t_m , avec les substitutions $E_m = K\omega_m$, $U = K\omega_\infty$ (ω_∞ est la vitesse angulaire stationnaire) et $\frac{R}{r} = 2z$, nous obtiendrons la relation cherchée sous la forme

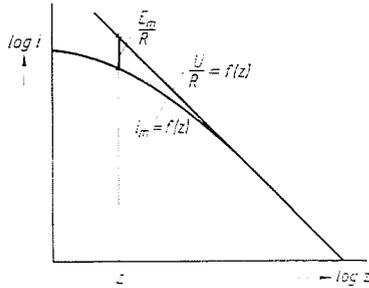


Fig. 3

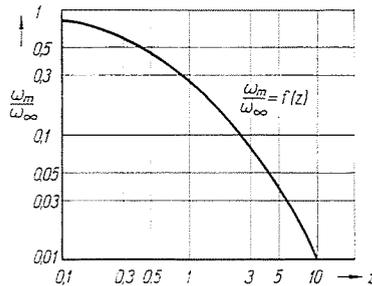


Fig. 4. Rapport de la vitesse angulaire au moment de la pointe de courant et de la vitesse angulaire stationnaire, en fonction du coefficient d'amortissement

$$\frac{\omega_m}{\omega_\infty} = 1 - 2z\beta \tag{38}$$

La figure 4 faite d'après l'équation (38) représente graphiquement la fonction $\frac{\omega_m}{\omega_\infty} = f(z)$, également à une échelle deux fois logarithmique. Il ressort de cette figure qu'au cas où $z = 4$, le moteur n'atteint que les 5,2% de sa vitesse à vide au moment de l'apparition de la pointe de courant. Il en résulte que la pointe diffère à peine du courant stationnaire de court-circuit, comme nous l'avons déjà constaté précédemment.

Si la valeur de z décroît, la différence entre la pointe de courant i_m et le courant i_c de court-circuit augmente de plus en plus. En connaissant $\beta = f(z)$,

nous pouvons calculer directement combien de fois le courant i_c est supérieur à la pointe de courant i_m , si nous évaluons le nombre proportionnel

$$\kappa = \frac{i_c}{i_m} = \frac{\beta_1}{\beta}. \quad (39)$$

La figure 5 représente la relation $\kappa = f(z)$.

Dans la pratique, on rencontre fréquemment l'inverse du problème que nous venons d'étudier, à savoir que ce n'est pas pour la valeur donnée du coefficient d'amortissement z que l'intensité de pointe doit être déterminée, mais

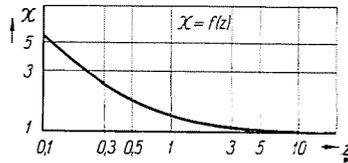


Fig. 5. Rapport du courant stationnaire de court-circuit et de la pointe de courant, en fonction du coefficient d'amortissement

il faut calculer l'amortissement nécessaire pour l'obtention de la pointe de courant prescrite — c'est-à-dire pour une valeur de β donnée.

Dans ce cas, nous pouvons établir pour l'application de l'équation approximative (34), que si $\beta < 0,1$, il est possible de faire les calculs avec l'approximation $i_c = \frac{U}{R}$.

2. Changement de la pointe de courant en cas de couple résistant

Si, au démarrage, le moteur ne doit pas effectuer une simple accélération de masse, mais que l'arbre est aussi chargé d'un couple résistant M_r , l'équation initiale (2) se transforme de la manière suivante

$$M_a = M_r + \Theta \frac{d\omega}{dt}. \quad (40)$$

Dans ce cas, il est beaucoup plus difficile de déterminer $i(t)$ qu'au cas de $M_r = 0$. Pratiquement, ces calculs peuvent être faits au cas d'un couple résistant constant ou variant proportionnellement avec la vitesse, et ceci au prix d'un très grand travail [4], [2]. Si l'on a un couple résistant variant avec la vitesse selon un exposant de puissance plus élevé, la solution ne peut pas être donnée sous une forme fermée [4]. Mais même pour les cas où une solution fermée peut

être obtenue, les calculs se limitent à des valeurs concrètes: là non plus on ne peut obtenir un aperçu général des rapports à présumer.

C'est pourquoi nous avons choisi pour notre part, au lieu de l'étude et de l'analyse des relations mathématiques, la méthode consistant à programmer le problème sur un *calculateur analogique*, en essayant de tirer les conclusions concernant l'intensité de pointe d'après les résultats donnés par cette machine. Tout comme dans le premier chapitre, nous avons effectué les examens en fonction du coefficient d'amortissement, avec trois sortes de couples résistants: constant, variant proportionnellement avec la vitesse, et variant selon le carré de la vitesse. Là encore, nous avons employé la méthode des valeurs relatives, c'est-à-dire que nous avons calculé, d'après les résultats obtenus sur la machine, le rapport de la pointe de courant qui se présente en cas de charge et de la pointe de courant «non chargée» (au cas d'une pure accélération de masse), les deux pointes relevant d'un coefficient d'amortissement identique. Ceci est suffisant, étant donné que nous pouvons facilement déterminer la pointe de courant non chargée, d'après ce que nous avons dit dans le chapitre précédent.

Avant de faire connaître les résultats obtenus, il convient de fixer certaines définitions:

a) Nous avons effectué nos examens pour le moteur *nominalement chargé*.

b) Nous nommons *couple résistant nominal* (M_n) le couple résistant sous l'effet duquel la vitesse angulaire du moteur (en état stationnaire) diminue de la valeur ω_∞ de marche à vide à la valeur nominale ω_n , lorsqu'il n'y a pas de résistance en série dans le circuit d'induit ($R = R_a$).

c) Nous nommons *chute de vitesse nominale* la valeur pour cent de la différence entre la vitesse (ou vitesse angulaire) à vide et la vitesse nominale, rapportée à la vitesse à vide:

$$\Delta\omega_n = \frac{\omega_\infty - \omega_n}{\omega_\infty} 100. \quad (41)$$

d) Nous nommons *coefficient d'amortissement naturel* (z_n) la valeur du coefficient d'amortissement se rapportant à la résistance interne du moteur (R_a), quand il n'y a pas de résistance en série dans le circuit d'induit ($R = R_a$).

Le couplage programmé sur la machine analogique est indiqué sur la figure 6. Sans examiner ici les détails du couplage, nous observerons seulement que nous avons étendu nos examens, en dehors de la pointe de courant, au problème de la durée du démarrage.* C'est là par exemple le but du circuit composé des éléments numérotés 12, 13, 14, ainsi que 15, 16, 17. Nous avons indiqué sur la

* Nous rendrons compte dans une étude ultérieure des résultats se rapportant à la durée du démarrage.

figure le lieu de couplage ou de détection de certaines grandeurs importantes. Ainsi par exemple nous branchons la tension de réseau U sur l'amplificateur-additionneur 5, et le signal proportionnel au couple résistant M_r sur le potentiomètre 11, (au cas échéant à travers une génératrice de fonction). Nous pouvons mettre au point la valeur du coefficient d'amortissement z sur le potentiomètre 3, et nous obtenons à la sortie de l'intégrateur 21 la tension proportionnelle à la pointe i_m du courant. Nous en avons trouvé la valeur soit sur le voltmètre digital incorporé, ou bien en enregistrant les variations temporelles du courant avec un dispositif à écrire.

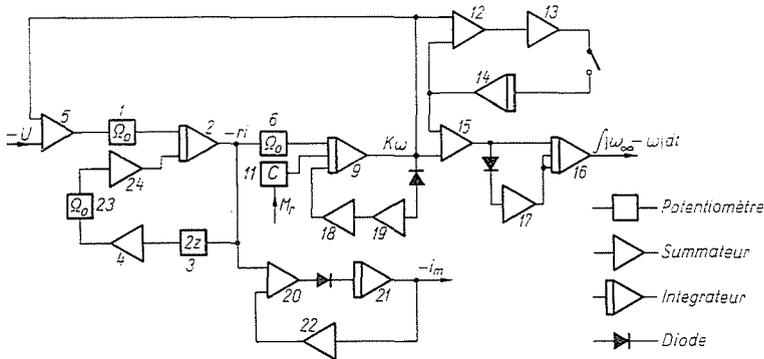


Fig. 6. Couplage du calculateur analogique

2.1. Valeur de la pointe du courant si $M_r = M_n$

Nous avons examiné en premier lieu le cas du couple résistant constant. La valeur du couple résistant est égale à celle du couple nominal. Là aussi, comme au cours des examens ultérieurs, nous avons pris comme chute de vitesse nominale $\Delta\omega_n = 5\%$ (mais nous avons étendu une partie des examens jusqu'à $\Delta\omega_n = 15\%$, comme nous l'indiquerons en détail par la suite). Nous avons augmenté la valeur du coefficient d'amortissement naturel à partir de la valeur $z_n = 0,1$. Étant donné que nous avons maintenu constante la valeur $\Delta\omega_n = 5\%$ de la chute de vitesse nominale, à chacun des différents coefficients d'amortissements naturels correspondent — comme couples nominaux — des couples résistants également différents.

La figure 7 montre le nombre proportionnel entre la pointe de courant en cas de démarrage avec couple résistant (i_{mr}) et la pointe de courant (i_m) «non chargée» (en cas de pure accélération de masse), que nous avons désigné par γ ,

$$\left(\gamma = \frac{i_{mr}}{i_m}\right), \quad (42)$$

en fonction du coefficient d'amortissement z se rapportant aux valeurs constantes du coefficient d'amortissement naturel z_n , comme paramètres. Le cas $z = z_n$ signifie que nous avons branché sur le réseau un moteur sans résistance en série, c'est-à-dire que nous avons effectué un démarrage «brutal», tandis que $z > z_n$ correspond au démarrage avec résistance en série.

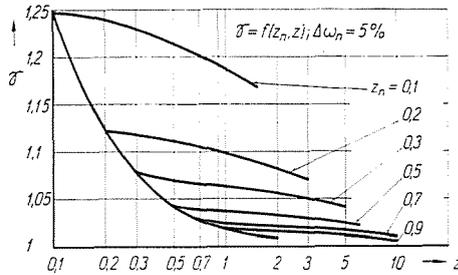


Fig. 7. Rapport de la pointe de courant «chargée» et «non chargée», si le couple résistant est constant

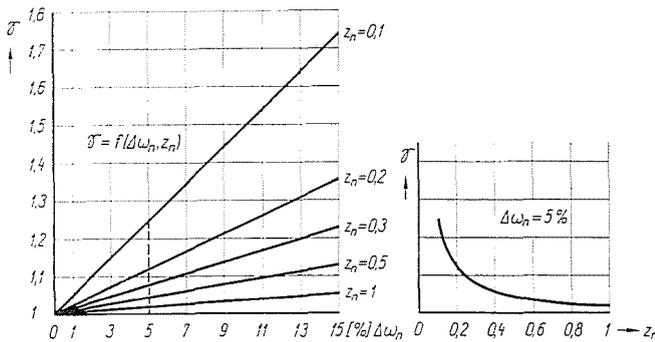


Fig. 8. Rapport de la pointe de courant «chargée» et «non chargée» en fonction de la chute de vitesse naturelle, pour différents coefficients d'amortissement naturels

La figure montre bien que pour une valeur $z_n = 0,1$ d'intérêt purement théorique, mais inexistante dans la pratique, la pointe de courant i_{mr} est supérieure de 25% environ à i_m en cas de démarrage brutal, alors que si le coefficient d'amortissement naturel est $z_n = 0,5$ considéré en pratique comme cas-limite, cette valeur n'est plus que de 4% environ. Avec l'augmentation du coefficient d'amortissement, la valeur de γ continue à diminuer.

Sur la figure 7 nous avons aussi tracé la courbe reliant les points appartenant aux valeurs $z = z_n$. A la base de cette courbe et de la série de courbes déjà obtenues, nous pouvons déterminer par interpolation la valeur de γ pour une valeur quelconque de z_n ou de z .

Les résultats obtenus jusqu'à présent se rapportent à $\Delta\omega_n = 5\%$. Afin de pouvoir continuer nos généralisations, nous avons déterminé les valeurs de γ en fonction de $\Delta\omega_n$ (en allant jusqu'à $\Delta\omega_n = 15\%$) pour des valeurs différentes de z_n comme paramètres. Les résultats obtenus sont indiqués sur la figure 8.

A la base des figures 7 et 8, nous pouvons déterminer la valeur de γ pour des valeurs quelconques de z et $\Delta\omega_n$ (si $z_n > 0,1$ et $\Delta\omega_n < 15\%$). Le procédé consiste à chercher d'abord sur la figure 7 la valeur de γ , si z_n et z sont donnés et $\Delta\omega_n = 5\%$, puis à calculer proportionnellement, à la base de la figure 8,

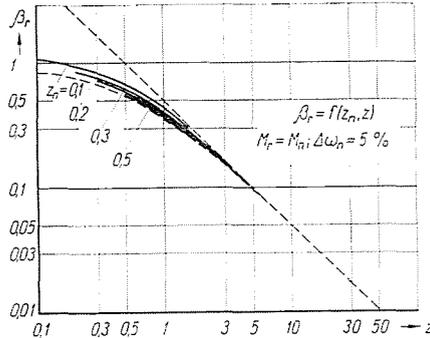


Fig. 9. Valeur de la pointe de courant relative en cas de démarrage avec un couple résistant constant

la valeur de γ obtenue pour la valeur donnée $\Delta\omega_n$. (Sur la figure 8, l'interpolation est facilitée par la courbe $\gamma = f(z_n)$ se rapportant à $\Delta\omega_n = 5\%$, à l'aide de laquelle la valeur z_n donnée peut être projetée à la gauche de la figure sur l'ordonnée appartenant à la valeur $\Delta\omega_n = 5\%$).

Connaissant les valeurs de γ , nous avons calculé les valeurs

$$\beta_r = \gamma\beta \quad (43)$$

se rapportant à $\Delta\omega_n = 5\%$. Sur la figure 9 nous avons tracé avec un trait plein les courbes $\beta_r = f(z)$, et en tireté d'une part la courbe $\beta = f(z)$ se rapportant à la pure accélération de masse, d'autre part la droite oblique correspondant au courant i_c de court-circuit. Il ressort nettement de cette figure que — en cas de $\Delta\omega_n = 5\%$ — si $z_n \geq 0,5$, i_{mr} n'est supérieur à i_m que dans une mesure négligeable, c'est-à-dire que la grandeur de la pointe de courant de démarrage n'est pas influencée par la charge. (Nous pouvons déjà tirer cette conclusion à propos de la figure 7). Si $\Delta\omega_n > 5\%$, la pointe de courant diffère déjà un peu plus de la pointe de courant «non chargée». Nous sommes cependant d'avis que, même dans ce cas, il est suffisant de calculer la pointe de courant i_m

se rapportant à la pure accélération de masse, étant donnée que l'incertitude des données fondamentales du moteur — et en premier lieu celle de l'inductance, mais aussi du couple d'inertie — est plus grande que l'erreur résultant de la négligence du facteur multiplicateur γ .

2.2. Valeur de la pointe de courant si $M_r = M_n f(\omega)$

En ce qui concerne le couple résistant variant proportionnellement à la vitesse angulaire $M_r = M_n \frac{\omega}{\omega_m}$, et encore plus variant au carré $M_r = M_n \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$, les résultats obtenus sur le calculateur analogique montrent que (pour $\Delta\omega_n = 5\%$)

$$i_{mr} \cong i_m$$

soit

$$\gamma \cong 1.$$

Ce résultat est évident, puisque dans ce cas, au moment de la pointe de courant, le couple résistant est inférieur au couple nominal (étant donné que la vitesse angulaire du moteur est inférieure à la nominale); or nous avons démontré dans le paragraphe 2.1. que l'augmentation de la pointe de courant est négligeable même en cas de couple résistant *nominal*.

2.3. Le changement temporel du courant

Bien que notre tâche ait été de déterminer l'intensité de pointe, et qu'à cette fin nous ayons préféré nous servir du voltmètre digital, la représentation sous forme de diagramme de la courbe de courant $i = f(t)$ peut aussi avoir son intérêt. C'est pourquoi nous avons enregistré la courbe de la variation dans le temps du courant avec un enregistreur de diagrammes relié au calculateur analogique. Les figures se rapportent à $\Delta\omega_n = 5\%$ et à un démarrage brutal ($z = z_n$). On voit sur la figure 10 le cas $z_n = 0,1$. Sur la figure 10a—c nous avons comparé la courbe du courant du la pure accélération de masse ($M_r = 0$) et de différents types de couples résistants, alors que la fig. 10d représente la comparaison des trois cas de charge. Ces figures nous montrent que la courbe $M_r = M_n$ et la courbe $M_r = 0$ sont de caractère identique (fig. 10a), alors que les courbes $M_r = f(\omega)$ sont beaucoup plus amorties que les précédentes. Ceci s'explique par le fait que la charge de caractère $M_r = f(\omega)$ représente un amortissement supplémentaire, qui est d'autant plus grand que le couple résistant varie selon un exposant de puissance plus élevé.

La figure 11 représente le cas $z_n = 0,5$. Sur cette figure, nous avons tracé côte à côte les courbes de courant correspondant aux quatre cas de charge (y compris également $M_r = 0$.) La charge $M_r = f(\omega)$ a, cette fois aussi, un

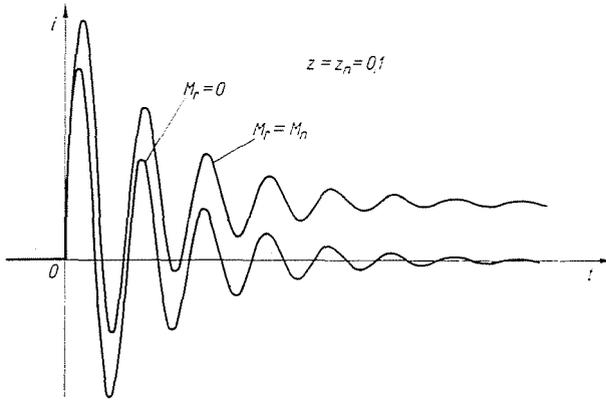


Fig. 10a

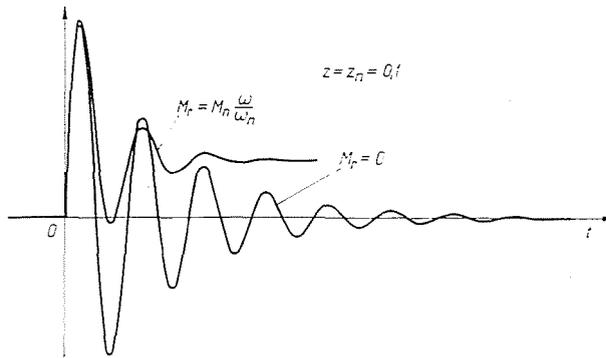


Fig. 10b

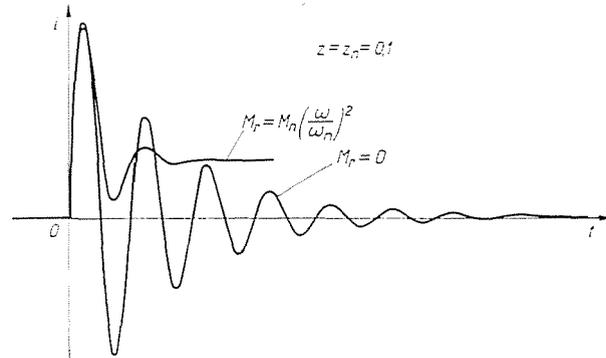


Fig. 10c

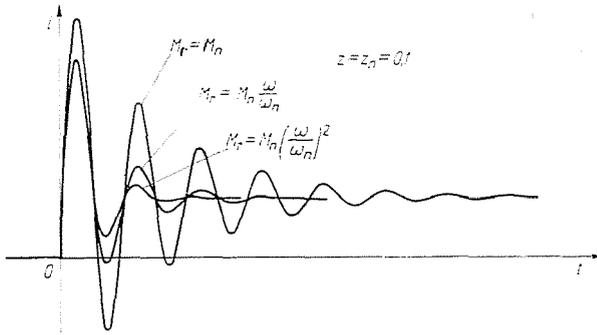


Fig. 10d

Fig. 10. Variation dans le temps du courant de démarrage, en cas de démarrage «brutal», à coefficient d'amortissement naturel $z_n = 0,1$, sous l'effet de couples résistants différents

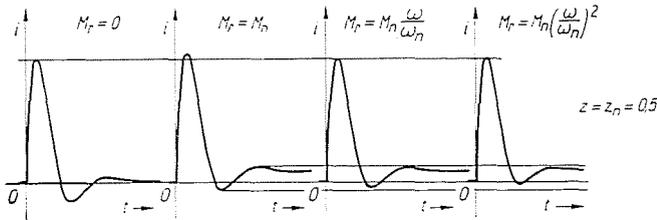


Fig. 11. Variation dans le temps du courant de démarrage, en cas de démarrage «brutal», à coefficient d'amortissement naturel $z_n = 0,5$, sous l'effet de couples résistants différents

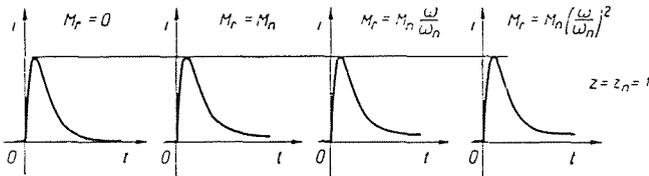


Fig. 12. Variation dans le temps du courant de démarrage en cas de démarrage «brutal», à coefficient d'amortissement naturel $z_n = 1$, sous l'effet de couples résistants différents

effet d'amortissement supplémentaire, mais celui-ci est visiblement inférieur à ce qu'il était au cas de $z_n = 0,1$.

Pour finir, la fig. 12 représente le cas $z_n = 1$. Il en ressort que les trois courbes de courant correspondant à la charge sont presque parfaitement identiques et (abstraction faite du courant de charge stationnaire) elles s'accordent à peu près avec la courbe de courant non chargée. L'effet de l'amortissement supplémentaire n'y est plus visible.

3. Résultats des expériences

Nous avons effectué le procédé de calcul présenté en partant de la méthode «classique», les conditions d'application pratique de la méthode classique restent donc valables dans ce cas. On sait que la méthode classique part dans une certaine mesure de conditions idéalisées, c'est-à-dire qu'elle suppose, d'une part, que la résistance et l'inductance du circuit d'induit sont de valeur constante, et d'autre part que la tension du réseau et le flux du moteur ne varient pas pendant le démarrage.

Bien que ces conditions n'existent pas dans la réalité, les résultats des expériences que l'on trouve dans la littérature pour le cas des moteurs *compensés* (v. par ex. [4], [5]) montrent une bonne concordance avec les valeurs calculées selon la méthode classique.

En ce qui concerne la pointe de courant du moteur non compensé — plus exactement: *partiellement compensé* — nous avons effectué nous-même une série d'expériences.

Afin d'obtenir que l'intensité de pointe diminue le moins possible la tension U du réseau, nous nous sommes efforcé d'effectuer les expériences sur un moteur de petite puissance par rapport aux sources de tension qui nous étaient accessibles. Les données nominales du moteur choisi étaient: 220 V; 7,3 A; 1,2 kW; 3000 tours par minute; l'enroulement compensateur était fixé dans une seule encoche. Le moteur est également pourvu d'un enroulement compound (découplé au cours des expériences). La source de courant était une génératrice de 100 kW.

Le couplage d'essai correspond au schéma de la figure 1. Nous avons branché sur l'enroulement d'excitation une tension continue constante de 220 V. Afin de réduire la pointe du courant, nous n'avons connecté sur l'induit qu'une demi-tension de 110 V. L'amortissement du circuit d'induit a été modifié par une résistance en série. Au cours du démarrage, le moteur n'avait à accélérer que son propre induit.

Les résultats lus sur les oscillogrammes sont indiqués par la figure 13 (valeurs indiquées par un cercle). En cas de fortes pointes de courant, la tension de réseau diminue dans une mesure importante. Dans ces cas, nous avons également converti la valeur de la pointe de courant pour une tension de réseau constante $U = 110$ V (valeurs marquées d'une croix). Nous avons tracé sur la figure, avec un trait continu, la courbe $i_m = f(R)$ calculée pour ce cas d'après l'équation $\beta = f(z)$, et en tireté la ligne droite correspondant au courant stationnaire de court-circuit $i_c = \frac{U}{R}$.

Par suite du nombre élevé des variantes à envisager, on ne pourrait faire une déduction univoque qu'à la base de nombreuses séries d'expériences. Il nous semble cependant, qu'en raison de la bonne concordance — ou même de la

divergence univoque — avec les résultats théoriques, nous pouvons tirer de nos résultats d'expériences la conclusion que, si le coefficient d'amortissement est petit (env. $z < 2$), la pointe de courant réelle est supérieure à celle calculée d'après la relation $\beta = f(z)$. Dans de tels cas, nous devons procéder avec prudence au calcul de la pointe de courant, prenant en considération d'une part le degré de compensation du moteur, et d'autre part le degré de rigidité de la tension de réseau.

4. Conclusions et exemple numérique

Nous avons présenté, pour calculer la pointe du courant de démarrage de moteurs à courant continu à excitation dérivée, une méthode simple, qui rend inutile les calculs avec des fonctions exponentielles.

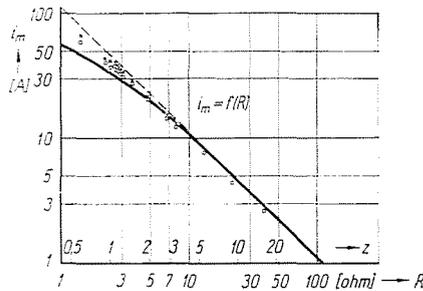


Fig. 13. Pointes de courant mesurées en fonction de la résistance du circuit d'induit, au cas d'un moteur partiellement compensé

En cas de *pure accélération de masse*, nous pouvons calculer la pointe de courant à la base des relations (26a) et (32), avec l'équation

$$i_m = \beta \frac{U}{r} \tag{44}$$

où la valeur de r est donnée par l'équation (31), et celle de β par la figure 2. Si $z > 4$, nous pouvons considérer la valeur de la pointe de courant comme égale à celle du courant stationnaire de court-circuit. Si la machine n'est pas, ou n'est que partiellement compensée, la pointe de courant calculée doit être augmentée pour les valeurs $z < 2 \sim 3$, compte tenu des conditions données.

En démarrant avec un *couple résistant*, il est suffisant, dans la plupart des cas se présentant dans la pratique, de calculer approximativement la pointe de courant, à la base des équations se rapportant à la pure accélération de masse.

Dans les cas extrêmes (couple résistant constant, amortissement faible, forte chute de vitesse nominale) nous pouvons effectuer les calculs de la manière indiquée au chapitre 2, à l'aide de diagrammes appropriés.

Pour finir, notons qu'il est inutile d'exécuter les calculs avec une précision excessive. Il est préférable d'utiliser les équations approximatives simples, étant donné que les données fondamentales — en premier lieu l'inductance du circuit d'induit et parfois même le couple d'inertie — sont généralement déterminées par la fabrique au moyen de calculs approximatifs, dont l'exactitude reste au-dessous de celle des méthodes approximatives que nous proposons.

Exemple numérique : Dans les exemples 16 à 18 présentés par K. W. WAGNER [2, pp. 315—318] les valeurs de courant et de la vitesse angulaire du démarrage brutal d'un moteur sont calculées de la manière «classique»: à l'aide de fonctions hyperboliques ou trigonométriques. À titre de comparaison, nous allons calculer la valeur de la pointe de courant du démarrage selon la méthode simple que nous proposons pour le cas le plus compliqué, celui du démarrage avec un couple résistant nominal (Wagner, exemple 18). Dans son exemple, Wagner ne calcule pas à part la valeur de la pointe de courant, mais donne l'équation décrivant la variation dans le temps du courant, et dessine la courbe du courant en fonction du temps. Ce diagramme donne (avec une précision plus ou moins grande) la pointe du courant.

Le moteur examiné est de 240 kW et d'un nombre de tours de 366/minute. Les données fondamentales nécessaires sont:

$$\begin{aligned} U &= 240 \text{ V,} \\ i_n &= 1000 \text{ A,} \\ R_a &= 0,012 \text{ ohm,} \\ K &= 6,27 \text{ Vs,} \\ \Theta &= 205 \text{ W s}^3, \\ L_a &= 10^{-4} \text{ H.} \end{aligned}$$

Afin de réduire la pointe du courant, Wagner décuple l'inductance du circuit d'induit par une inductance en série, donc

$$L = 10^{-3} \text{ H.}$$

Calcul de la pointe de courant

$$r = K \sqrt{\frac{L}{\Theta}} = 0,01386 \text{ ohm.}$$

$$z = \frac{R_a}{2r} = 0,433.$$

La valeur de β qui y correspond, selon la figure 2, est

$$\beta \cong 0,59.$$

$$i_m = \beta \frac{U}{r} = 10\,210 \text{ A.}$$

(Pour ce cas, c'est-à-dire pour la pure accélération de masse, Wagner obtient comme résultat 10 200 A dans l'exemple 17).

Enfin, la pointe de courant avec charge est

$$i_{mr} = \gamma i_m.$$

Nous prenons la valeur de γ dans la figure 7. Etant donné qu'il s'agit d'un démarrage brutal, $z = z_n$. Le diagramme donne $\gamma \cong 1,05$, donc

$$i_{mr} = 10\,720 \text{ A,}$$

ce qui correspond à la valeur donnée par la figure 95 de Wagner.

Résumé

En partant de la méthode «classique», l'article décrit un procédé simple pour calculer le pointe de courant du démarrage, qui rend superflue l'utilisation de fonctions exponentielles. Le rapport des pointes de courant avec la pointe se produisant en cas de non-amortissement, rapport dit pointe de courant relative, est présenté sous forme d'équations et de diagrammes en fonction du coefficient d'amortissement. La pointe de courant non amortie est facile à calculer, et en la connaissant il est possible de déterminer directement, pour un coefficient d'amortissement donné, la pointe de courant ou le coefficient d'amortissement (résistance en série) nécessité par la pointe de courant prescrite, à la base de la pointe de courant relative.

Le procédé n'est strictement valable que pour les moteurs dont le démarrage est fait sans couple résistant, c'est-à-dire uniquement pour ceux qui produisent une pure accélération de masse. Or l'auteur démontre par des examens effectués sur un calculateur analogique que, dans la pratique, l'influence du couple résistant sur la valeur de la pointe de courant peut être négligée dans la plupart des cas.

L'article est complété par des résultats d'expériences et un exemple numérique.

Bibliographie

1. CSÁKI, F.—KELEMEN, T.: Démarrage automatique d'un groupe auxiliaire d'alimentation. *Periodica Polytechnica (Electrical Engineering)*, 5, 316—340 (1961).
2. WAGNER, K. W.: *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation nebst Anwendungen in Physik und Technik*. Johann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig, 1950. (2^e édition).
3. GILLE, J. C.—PÉLEGRIN, M.—DECAULNE, P.: *Lehrgang der Regelungstechnik*. Vol. I. R. Oldenbourg. München — VEB Verlag Technik, Berlin, 1960.
4. TRETTIN, C.: Das Schalten großer Gleichstrommotoren ohne Vorschaltwiderstände. *ETZ* 33, 759—763, 794—796, 822—825 (1912).
5. LINKE, W.: Das Schalten großer Gleichstrommotoren ohne Vorschaltwiderstände. *ETZ* 39, 453—455, 465—467 (1918).

T. KELEMEN, Budapest, XI., Egry József u. 18—20. Hongrie